الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحسن ابن الهيثم النزلة　　　　المستوى : 3 ثانوي

الأستاذ: بوقفة عبد الفتاح　　　　شعبة : علوم تجريبية

الإختبار التجريبي رقم 11 شعبة علوم (Bac 2022)

التمرين 01 (4 نقاط) — 28 دقيقة

في كل سؤال يوجد إقتراح واحد صحيح عينه مع التبرير .

❶ (u_n) متتالية عددية معرفة على N بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{6u_n+5}{u_n+2}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n-5}{u_n+1}$ ، المتتالية (v_n) هندسية أساسها :

أ) $q = \frac{1}{7}$　　ب) $q = \frac{1}{2}$　　جـ) $q = 6$

❷ h حل للمعادلة التفاضلية : $y' + y = 1$ ومنه منحناها البياني (C_h) يقبل مقارب مائل عند $+\infty$ معادلته :

أ) $y = 0$　　ب) $y = -1$　　جـ) $y = 1$

❸ في قسم نهائي 30% متفوقين في مادة الرياضيات و 35% متفوقين في مادة الفيزياء و 10% متفوقين في المادتين معا ، إحتمال أن يكون التلميذ متفوقا في مادة الرياضيات علما أنه متفوق في مادة الفيزياء هو :

أ) $\frac{2}{7}$　　ب) $\frac{1}{3}$　　جـ) $\frac{2}{13}$

❹ الدالة الأصلية F والتي تحقق $F(1) = 0$ للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x+1}{x}$ هي الدالة :

أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$　　ب) $F(x) = 1 - x + \ln x$　　جـ) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

التمرين 02 (4 نقاط) — 32 دقيقة

يحتوي صندوق على أربع كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 و خمس كرات بيضاء مرقمة من 5 إلى 9 ، جميع الكرات متماثلة ولا نميز بينها باللمس ، نسحب عشوائيا و على التوالي ثلاث كريات دون إرجاع ، ونشكل عدد ذا ثلاثة أرقام . الكرية الأولى نسجل بها رقم المئات والكرية الثانية نسجل بها رقم العشرات والكرية الثالثة نسجل بها رقم الآحاد .

❶ أحسب إحتمال الحدثين التاليين : A " العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300 "

B " العدد المحصل عليه زوجي " .

❷ أ/ أحسب إحتمال أن يكون العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300 علما أنه زوجي .

ب/ هل الحدثين A و B مستقلان ؟

❸ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات ، وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية سحب عدد الكرات البيضاء المحصل عليها .

أ/ عين قيم المتغير X ، ثم عرف قانون إحتماله .

ب/ أحسب أمله الرياضي .

قد تكون عاجزا عن رد الجميل ، لكن كن أرقى من أن تنكره .

التمرين 03 (5 نقاط) 55 دقيقة

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بـ : $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n+3} \end{cases}$

❶ عين قيم u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

❷ فيما يلي : نضع $u_0 = 0$

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq u_n < 1$.

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم إستنتج أن (u_n) متقاربة وأحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

❸ أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \leq 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

جـ / إستنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

❹ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

أ/ بين أن (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن v_n بدلالة n و استنتج عبارة u_n بدلالة n

❺ أحسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n حيث :

$T_n = \frac{1}{u_0+2} + \frac{1}{u_1+2} + \cdots + \frac{1}{u_n+2}$ و $\ln(T'_n) = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

التمرين 04 (7 نقاط) 65 دقيقة

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $g(x) = 2x + \ln[4(e^{-x} - 1)]$.

❶ أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❷ من أجل $m' < 0$ ، بين أن المعادلة $g(x) = m'$ تقبل حلين متمايزين .

II- f هي الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بـ : $f(x) = x - \ln(1 - e^x)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

❶ أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ <}} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

❸ أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $-\ln 2$.

❹ إستنتج أن المنحني (C_f) يقع فوق (T) .

❺ أحسب $f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ، ثم أنشئ المماس (T) و المنحني (C_f) .

❻ نعتبر المعادلة (E) التالية $f(x) = 2x + m$ ، حيث m عدد حقيقي كيفي .

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m ، عدد حلول المعادلة (E)

❼ نسمي α و β حلي المعادلة (E) في حالة وجودهما . بين أن $\alpha + \beta = -m$ ، ثم بين أن $f(\alpha) + f(\beta) = 0$

الحل المفصل للاختبار التجريبي رقم 11

التمرين 01

$$v_n = \frac{u_n-5}{u_n+1}$$

① (v_n) هندسية معناه $v_{n+1} = q\times v_n$

إذن نقوم بحساب v_{n+1} ومنه

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{6u_n+5}{u_n+2}-5}{\frac{6u_n+5}{u_n+2}+1}$$

$$= \frac{\frac{6u_n+5-5u_n-10}{\cancel{u_n+2}}}{\frac{6u_n+5+u_n+2}{\cancel{u_n+2}}} = \frac{u_n-5}{7u_n+7}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{7}\left(\frac{u_n-5}{u_n+1}\right) \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{7}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{7}$

ومنه الإجابة الصحيحة هي (أ)

② $y'+y=1$ يكافئ $y'=-y+1$

$$h(x) = ce^{-x}+1$$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty} ce^{-x}+1 = \boxed{1}$

فإن $y=1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_h) بجوار $+\infty$

ومنه الاقتراح الصحيح هو (ج)

③ نرمز للرياضيات بالرمز "M"

ونرمز للفيزياء بالرمز "F"

$P(M) = \frac{30}{100}$; $P(F) = \frac{35}{100}$

$$P(M\cap F) = \frac{10}{100}$$

$$P_F(M) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{10}{35}$$

$$P_F(M) = \frac{10\div 5}{35\div 5} = \boxed{\frac{2}{7}}$$

ومنه الإجابة الصحيحة هي (أ)

④ من أجل كل $t\in]0;+\infty[$

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{t+1}{t}\,dt$$

$$= \int_1^x \left(\frac{t}{t}+\frac{1}{t}\right)dt = \int_1^x \left(1+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \left[t+\ln t\right]_1^x = x+\ln x-(1+\ln 1)$$

$$F(x) = x+\ln x-1$$

$$\boxed{F(x) = x-1+\ln x}$$

ومنه الإجابة الصحيحة هي (أ)

التمرين 2

4 حمراء: 4 ; 3 ; 2 ; 1

5 بيضاء: 9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 5

عدد الحالات الممكنة للسحب

بما أن السحب على التوالي دون إرجاع نستخدم الترتيبة

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \boxed{504}$$

أ) حساب $P(A)$

$$P(A) = \frac{A_2^1\times A_8^2}{504} = \frac{112}{504} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

توضيح: نشكل عددا F_3 بحيث رقم المئات يكون إما 1 أو 2

حساب $P(B)$

نشكل عددا بحيث رقم الآحاد يكون زوجيا

$$P(B) = \frac{A_8^2\times A_4^1}{504} = \frac{224}{504} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

②ب)

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

نحسب $P(A\cap B)$

"$A\cap B$" العدد المحصل عليه أصغر تماما من 300 وزوجي

$$P(A\cap B) = \frac{A_2^1 A_7^1 A_4^1}{504} = \boxed{\frac{56}{504}}$$

ومنه نستنتج

$$P_B(A) = \frac{\frac{56}{504}}{\frac{224}{504}} = \frac{56}{224} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

ب) هل الحدثين A و B مستقلان

بما أن $P_B(A) = \frac{1}{4}$ و $P(A) = \frac{2}{9}$

فإن $P_B(A) \neq P(A)$

إذن الحدثين A و B غير مستقلان

③ ② قيم المتغير العشوائي X

$X = \{0;1;2;3\}$

قانون الإحتمال

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \boxed{\frac{4}{84}}$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_9^3} = \boxed{\frac{30}{84}}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3} = \boxed{\frac{40}{84}}$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 C_4^0}{C_9^3} = \boxed{\frac{10}{84}}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

ب) حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n=4} x_i P_i$$

$$= \frac{(0\times4)+(1\times30)+(2\times40)+(3\times10)}{84}$$

$$E(X) = \frac{140}{84} = \boxed{1{,}67}$$

التمرين 3

$$u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n+3}$$

① تعيين قيم u_0

(u_n) ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$$

وعليه

$$2 - \frac{4}{\alpha+3} = \alpha$$

$$-\frac{4}{\alpha+3} = \alpha - 2$$

$$(\alpha+3)(\alpha-2) = -4$$

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$ أو

إذن تكون (u_n) ثابتة من أجل $u_0 = 1$ أو $u_0 = -2$

② أ) برهن بالتراجع أن $0 \leq u_n < 1$

من أجل $n=0$ لدينا

$$0 \leq u_0 = 0 < 1$$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

* نفرض أن الخاصية محققة من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

لدينا

$$0 \leq u_n < 1$$

$$3 \leq u_n + 3 < 4$$

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{-4}{u_n+3} < -1$$

$$0 \leq \frac{2}{3} \leq 2 - \frac{4}{u_n+3} < 1$$

$$0 \leq u_{n+1} < 1$$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل n طبيعي فإن $0 \leq u_n < 1$

ب) إتجاه تغير (u_n)

ندرس إشارة الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{4}{u_n+3} - u_n$$

$$= \frac{2U_n+6-4-U_n^2-3U_n}{U_n+3}$$

$$= \frac{-U_n^2-U_n+2}{U_n+3}$$

بما أن $0 \le U_n < 1$

فإن $3 \le U_n+3 < 4$

ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط

$-U_n^2-U_n+2=0$

$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow \begin{cases} U_{n_1} = 1 \\ U_{n_2} = -2 \end{cases}$

U_n	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$U_{n+1}-U_n$		$-$	0	$+$			0	$-$	

وبما أن $0 \le U_n < 1$ فإن

$U_{n+1}-U_n > 0$

ومنه نستنتج أن (U_n) متزايدة

إستنتاج أن (U_n) متقاربة

بما أن (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

بما أن (U_n) متقاربة فإن

$$\lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

$$2-\frac{4}{l+3} = l$$

أي $l^2+l-2=0$

$\begin{cases} l = 1 \\ \text{أو} \\ l = -2 \ (\text{مرفوض}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$

③ أ) بين أن

$$0 \le 1-U_{n+1} \le \frac{1}{3}(1-U_n)$$

أولا نبرهن أن $0 \le 1-U_{n+1}$

بما أن $0 \le U_n < 1$

فإن $0 \le U_{n+1} < 1$

وعليه $0 \le 1-U_{n+1}$

و.هـ.م

ثانيا: يجب أن نبرهن

$$1-U_{n+1} \le \frac{1}{3}(1-U_n)$$

$$1-U_{n+1}-\frac{1}{3}(1-U_n) \le 0 \quad ??$$

$$= 1-2+\frac{4}{U_n+3}-\frac{1}{3}(1-U_n)$$

$$= -1+\frac{4}{U_n+3}-\frac{1}{3}(1-U_n)$$

$$= \frac{-3(U_n+3)+12-(1-U_n)(U_n+3)}{3(U_n+3)}$$

$$= \frac{\cancel{-3U_n}\cancel{-9}+\cancel{12}-U_n\cancel{-3}+U_n^2\cancel{+3U_n}}{3(U_n+3)}$$

$$= \frac{U_n(U_n-1)}{3(U_n+3)}$$

لدينا $0 \le U_n < 1$

و $9 \le 3(U_n+3) \le 12$

و $-1 \le U_n-1 < 0$

فإن $\dfrac{U_n(U_n-1)}{3(U_n+3)} \le 0$

وعليه

$$1-U_{n+1}-\frac{1}{3}(1-U_n) \le 0$$

ومنه

$$1-U_{n+1} \le \frac{1}{3}(1-U_n)$$

و.هـ.م

ب) برهن أن $0 \le 1-U_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$

من أجل $n=0$: لدينا $U_0 = 0$ ومنه

$$0 \le 1-U_0 \le \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

*) نفرض أن الخاصية محققة من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي نبرهن أن

$$0 < 1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \; ??$$

لدينا $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

بالضرب في $\left(\frac{1}{3}\right)$ نجد

$$0 < \frac{1}{3}(1 - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

لدينا مما سبق

$$1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$$

وعليه بالتعدي

$$0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

ومنه $0 < 1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ج) إستنتاج نهاية (u_n) من جديد

$$0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

حسب مبرهنة الحصر فإن

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - u_n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} -u_n = -1$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

4) بين أن (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{2 - \frac{4}{u_n+3} - 1}{2 - \frac{4}{u_n+3} + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{u_n - 1}{4(u_n + 2)} = \frac{1}{4} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{4}}$

حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

عبر عن v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 q^n \Rightarrow \boxed{v_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

إستنتاج u_n بدلالة n

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$$

$$v_n u_n - u_n = -1 - 2v_n$$

$$u_n(v_n - 1) = -1 - 2v_n$$

$$u_n = \frac{-1 - 2v_n}{v_n - 1} = \frac{-1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^n}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}$$

$$\boxed{u_n = \frac{-1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}}$$

5) حساب T_n

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{u_n + 2 - 1 - 2}{u_n + 2}$$

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} = \frac{1 - v_n}{3}$$

$$T_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}v_0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}v_1 + \dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}v_n$$

$$T_n = \frac{1}{3}(n+1) - \frac{1}{3}\underbrace{(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}_{\text{مج م هـ}}$$

$$\boxed{T_n = \frac{1}{3}(n+1) + \frac{2}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}$$

حساب T'_n

$$T'_n = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$\boxed{T'_n = e^{-\frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]}}$$

التمرين 4

$g(x) = 2x + \ln\left[4(e^{-x}-1)\right]$

① تغيرات الدالة g

$\lim_{x \to 0} 2x + \ln\left[4(\underbrace{e^{-x}-1}_{0^+})\right] = \boxed{-\infty}$

$\lim_{x \to -\infty} 2x + \ln 4 + \ln(e^{-x}-1)$

$= \lim_{x \to -\infty} 2x + \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{e^{x}} - 1\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} 2x + \ln 4 + \ln\left(\frac{1-e^{x}}{e^{x}}\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} 2x + \ln 4 + \ln(1-e^{x}) - \ln e^{x}$

$= \lim_{x \to -\infty} 2x + \ln 4 + \ln(1-e^{x}) - x$

$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x + \ln 4}_{-\infty} + \underbrace{\ln(1-e^{x})}_{0} = \boxed{-\infty}$

g تقبل الإشتقاق و دالتها المشتقة هي

$g'(x) = 2 + \frac{-4e^{-x}}{4(e^{-x}-1)} = 2 - \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1}$

$= \frac{2e^{-x}-2-e^{-x}}{e^{-x}-1} = \frac{e^{-x}-2}{e^{-x}-1}$

من أجل كل $x \in]-\infty;0[$ فإن $e^{-x}-1 > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$e^{-x}-2 \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \geq 2$

$-x \geq \ln 2 \Rightarrow x \leq -\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖

g متزايدة على المجال $]-\infty;-\ln 2]$

ومتناقصة على المجال $[-\ln 2;0[$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

② بين أن $g(x) = m'$ تقبل حلين

من جدول التغيرات نلاحظ أن 0 هي قيمة حدية عظمى للدالة ومنه من أجل كل $x \in]-\infty;0[$ فإن $g(x) < 0$

وبما أن الدالة غير رتيبة على المجال

ومنه $g(x) = m'$ تقبل حلين متمايزين

II) $f(x) = x - \ln(1-e^{x})$

① حساب $\lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} x - \ln(\underbrace{1-e^{x}}_{0^+}) = \boxed{+\infty}$

$x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} x - \underbrace{\ln(1-e^{x})}_{0} = \boxed{-\infty}$

② بين أن f متزايدة تماما

$f'(x) = 1 - \frac{-e^{x}}{1-e^{x}} = 1 + \frac{e^{x}}{1-e^{x}}$

$= \frac{1-e^{x}+e^{x}}{1-e^{x}} = \frac{1}{1-e^{x}}$

بما أنه من أجل كل $x \in]-\infty;0[$ فإن

$1-e^{x} > 0$

وعليه $f'(x) > 0$

ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖

③ معادلة المماس (T)

$(T): y = f'(-\ln 2)(x+\ln 2) + f(-\ln 2)$

$(T): y = 2(x+\ln 2) + 0$

$(T): y = 2x + 2\ln 2$

④ استنتاج أن (C_f) يقع تحت (T)

ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-2x-2\ln 2 = x-\ln(1-e^{x})-2x-\ln 4$$
$$= -x-\left[\ln(1-e^{x})+\ln 4\right]$$
$$= -x-\ln\left[4(1-e^{x})\right]$$
$$= -x-\ln\left[4e^{x}\left(\frac{1}{e^{x}}-1\right)\right]$$
$$= -x-\ln\left[e^{x}\cdot 4\left(e^{-x}-1\right)\right]$$
$$= -x-\ln e^{x}-\ln\left[4(e^{-x}-1)\right]$$
$$= -x-\cancel{x}-\ln\left[4(e^{-x}-1)\right]$$
$$= -\left[2x+\ln\left[4(e^{-x}-1)\right]\right]$$
$$= -g(x)$$

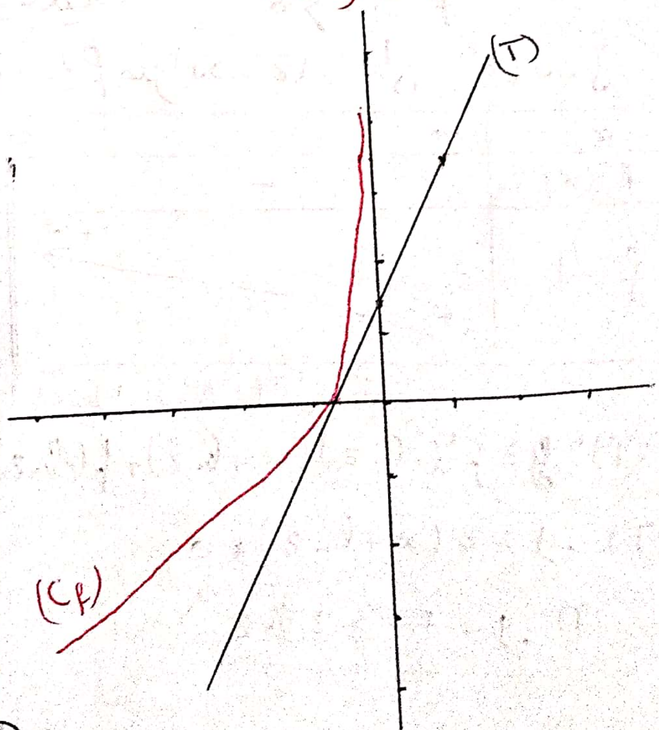
وبما أن $g(x)<0$ فإن $-g(x)>0$

وعليه (C_f) يقع فوق (T)

⑤ حساب $f(\ln(\frac{1}{2}))$

$$f(\ln(\tfrac{1}{2})) = f(-\ln 2) = 0$$

إنشاء (C_f) و (T)



⑥ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 2x+m$

$m \in]-\infty ; 2\ln 2[$ المعادلة لا تقبل أي حلول

$m = 2\ln 2$ المعادلة تقبل حل واحد

$m \in]2\ln 2 ; +\infty[$ المعادلة تقبل حلان متمايزان

⑦ بين أن $\alpha+\beta = -m$

$$f(x) = 2x+m$$
$$x+\ln(1-e^{x}) = -m$$
$$\ln e^{x}+\ln(1-e^{x}) = -m$$
$$\ln(e^{x}-e^{2x}) = -m$$
$$e^{x}-e^{2x} = e^{-m}$$
$$e^{2x}-e^{x}+e^{-m} = 0$$

إذا كان α و β حلي المعادلة (E) فإن α, β حلي المعادلة $e^{2x}-e^{x}+e^{-m}=0$

$$\begin{cases} \alpha = \ln\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4e^{-m}}}{2}\right) \\ \beta = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1-4e^{-m}}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\alpha+\beta = \ln\left[\frac{1-\sqrt{1-4e^{-m}}}{2}\times\frac{1+\sqrt{1-4e^{-m}}}{2}\right]$$

$$\alpha+\beta = \ln\left(\frac{1-\left(\sqrt{1-4e^{-m}}\right)^2}{4}\right) = \ln\left(\frac{1-(1-4e^{-m})}{4}\right)$$

$$\alpha+\beta = \ln\left(\frac{4e^{-m}}{4}\right) \Rightarrow \alpha+\beta = -m$$

و.ه.م

بين أن $f(\alpha)+f(\beta) = 0$

$$\begin{cases} f(\alpha) = 2\alpha+m \\ f(\beta) = 2\beta+m \end{cases} \Rightarrow f(\alpha)+f(\beta) = 2\alpha+2\beta+2m$$

$$f(\alpha)+f(\beta) = 2(\underbrace{\alpha+\beta}_{-m}+m)$$
$$f(\alpha)+f(\beta) = 2(-m+m)$$
$$f(\alpha)+f(\beta) = 2(0)$$
$$f(\alpha)+f(\beta) = 0$$

و.ه.م