الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الشعبة : السنة الثالثة علوم تجريبية — ثانويتي الشيخ محمد بن الحاج عيسى وبن شرودة

البكالوريا التجريبية — دورة ماي 2022

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار احد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط):

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير :

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$ هي :

ا) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{e^3+1}{e+1}}\right)$ ب) $\ln\left(\dfrac{e^3+1}{e+1}\right)^2$ ج) $\ln\left(\dfrac{e^3+1}{e+1}\right)$

2) حل المعادلة التفاضلية $y''+2e^{-2x}=0$ والذي يحقق $y(0)=2022$ و $y'(0)=1443$ هو الدالة h حيث :

ا) $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}+1443x+2022$ ب) $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{-2x}+1442x+\dfrac{4045}{2}$ ج) $h(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+x+2022$

3) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_n=\int_n^{n+1}e^{1-x}dx$ متتالية هندسية أساسها q يساوي :

ا) e ب) $\sqrt{e}$ ج) e^{-1}

4) تتكون مجموعة من الأشخاص من 5 رجال و 3 نساء نريد تشكيل لجنة مكونة من 3 أشخاص رئيس نائب وكاتب ، احتمال أن تكون اللجنة تضم رجل وامرأتان هو :

ا) $\dfrac{15}{56}$ ب) $\dfrac{5}{56}$ ج) $\dfrac{45}{512}$

التمرين الثاني (5 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_1=2$ ومن اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ كما يلي : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$

1) احسب u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$.

3) بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ بـ : $v_n=u_n+\alpha n$ حيث α عدد حقيقي .

أ. عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

Scanné avec CamScanner

5) نأخذ فيما يلي $\alpha = -1$

أ) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n

ب) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

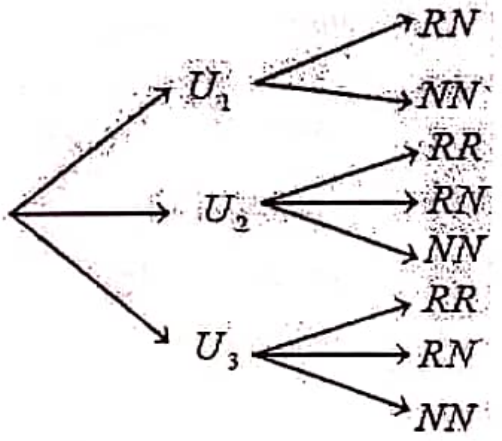
$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ و $S_n' = (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 + ... + (u_n - n)^2$

- احسب المجموعين S_n و S_n' بدلالة n ، ثم عين $\lim_{n\to\infty} T_n$ حيث : $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

التمرين الثالث (04 نقاط):

لدينا ثلاثة صناديق U_1 ، U_2 و U_3 حيث الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و 9 كرات سوداء ، الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 8 كرات سوداء أما الصندوق U_3 يحتوي على 3 كرات حمراء و 7 كرات سوداء نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في أن واحد كرتين من الصندوق المختار نسمي الأحداث التالية: RR : " الحصول على كريتين حمراوين ". RN : "الحصول على كريتين من لونين مختلفين".

NN : "الحصول على كريتين سوداوين".



1) انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة

2) احسب احتمال الحادثة RN

3) احسب $P_{RN}(U_3)$ احتمال السحب من الوعاء U_3 علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة

- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله

5) نضيف إلى الصندوق U_1 ، n كرة سوداء ثم نسحب منه عشوائيا كرتين على التوالي مع الإرجاع .

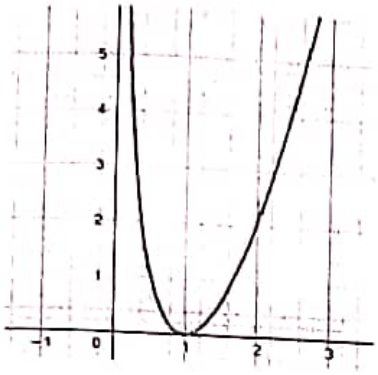
أ) احسب $P(C)$ احتمال سحب كريتين سوداء بدلالة n .

ب) أحسب $\lim_{n\to+\infty} P(C)$ ثم أعط تفسيرا للنتيجة المحصل عليها.

Scanné avec CamScanner

التمرين الرابع (07 نقاط):

I. الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x^2+(\ln x)^2-2\ln(x)-1$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$



بقراءة بيانية

1) عين $g(1)$ ، $g'(1)$.

2) حدد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+\dfrac{1-(\ln x)^2}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2\ cm$.

1) ا) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

د) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

3) اكتب معادلة المماس (T) عند فاصلة نقطة الانعطاف

4) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ) يطلب تعيين فواصلهما .

6) أرسم كلا من (T)، (Δ) و (C_f) .

7) m وسيط حقيقي . ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m ، عدد حلول المعادلة $1-(\ln x)^2=mx$.

8) ا) بين أن الدالة $x\mapsto\dfrac{1}{3}(\ln x)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

ب) استنتج عبارة لـ F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من اجل القيمة e

ج) احسب العدد A مساحة الحيز المستوى المحدد بالمحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\dfrac{1}{e}$ ، $x=e$ و $y=x$

انتهى الموضوع الأول

Scanné avec CamScanner

التمرين الأول

1/ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$ هي:

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(e^x+1)\right]_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln(e^3+1)-\ln(e+1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^3+1}{e+1}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{e^3+1}{e+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\ln\left(\sqrt{\frac{e^3+1}{e+1}}\right)$$

2/ حل المعادلة التفاضلية:

$y''+2e^{2x}=0$

والذي يحقق $y(0)=2022$

$y'(0)=1443$

هو الدالة h حيث:

$y''+2e^{-2x}=0$

ومنه $y''=-2e^{-2x}$

$y'=-2\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2x}+C_1$

$y'=e^{-2x}+C_1$

لدينا $y'(0)=1443$

ومنه $e^{-2(0)}+C_1=1443$

$1+C_1=1443$

$\Rightarrow C_1=1442$

إذن: $y'=e^{-2x}+1442$

$y=-\frac{1}{2}e^{-2x}+1442x+C_2$

لدينا $y(0)=2022$

ومنه $-\frac{1}{2}e^{-2(0)}+1442(0)+C_2=2022$

$-\frac{1}{2}+C_2=2022$

$\Rightarrow C_2=2022+\frac{1}{2}$

$C_2=\frac{4045}{2}$

إذن حل المعادلة التفاضلية

$y''+2e^{-2x}=0$

والذي يحقق

$\begin{cases} y(0)=2022 \\ y'(0)=1443 \end{cases}$

هو الدالة h حيث:

$h(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}+1442x+\frac{4045}{2}$

Scanné avec CamScanner

3/ المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}$$

$$= -e^{-n-1} + e^{-n}$$

$$= e^{-n} - e^{-n-1}$$

$$= e^{-n}(e-1)$$

حساب u_{n+1}

$$u_{n+1} = e^{-(n+1)}(e-1)$$

$$= e^{-n-1}(e-1)$$

$$= e^{-1}e^{-n}(e-1)$$

$$= e^{-1}u_n$$

ومنه المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها:

$$q = e^{-1}$$

4/ تتكون مجموعة من 5 رجال و3 نساء تريد تشكيل لجنة تضم 3 أشخاص رئيس نائب وكاتب.

احتمال أن تكون اللجنة تضم رجل واحد على الأقل هو:

تعيين الحادثة A:

A: "اللجنة تضم رجل واحد على الأقل"

عدد الحالات الملائمة لـ A هو:

$$3 \times A_5^1 \times A_3^2 = 90$$

احتمال الحادثة A

$$P(A) = \frac{3A_5^1 \times A_3^2}{A_8^3}$$

$$= \frac{3 \times 5 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$$

$$= \frac{15}{56}$$

Scanné avec CamScanner

التمرين الثاني

(u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1/ حساب u_2 ، u_3

$$u_2 = u_{1+1} = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3}(1) + 1$$
$$= \frac{2}{3}(2) + \frac{1}{3} + \frac{3}{3}$$
$$= \frac{4+1+3}{3}$$
$$= \frac{8}{3}$$

$$u_3 = u_{2+1} = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}(2) + 1$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{2}{3} + \frac{3}{3}$$
$$= \frac{16+6+9}{9}$$
$$= \frac{31}{9}$$

تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا: $u_1 < u_2 < u_3$

نقول أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$u_n \leq n + 3$$

نسمي الخاصية $P(n)$ حيث

$P(n)$: $u_n \leq n+3$

نتحقق من صحة الخاصية

$P(1)$ أي $n=1$ من أجل $P(n)$

$P(1)$: $u_1 \leq 1+3$

لدينا $u_1 = 2 < 4$

وعليه الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n \leq n+3$

ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$

$P(n+1)$: $u_{n+1} \leq n+4$ أي

لدينا: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

وحسب فرضية التراجع

لدينا $u_n \leq n+3$

$\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$ ومنه

$\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$

وبالتالي: $u_{n+1} \leq n+3$

Scanné avec CamScanner

الإثبات الحاصية: $P(n+1)$ صحيحة
ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لدينا $u_n \leq n+3$
تحقيقه: من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

3) نتبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$$

$$= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3} - \frac{3}{3}u_n$$

$$= \frac{1}{3}[2u_n + n + 3 - 3u_n]$$

$$= \frac{1}{3}[n+3-u_n]$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$

تدريس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$:

لدينا: $u_n \leq n+3$

ومنه $n+3-u_n \geq 0$

$\frac{1}{3}(n+3-u_n) \geq 0$

إذن: $u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}^*$

4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$v_n = u_n + \alpha n$ حيث α عدد حقيقي

تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية:

(v_n) هندسية إذا وفقط إذا كان $q \in \mathbb{R}$: $v_{n+1} = q v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha(n+1)$

$= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 + \alpha n + \alpha$

$= \frac{2}{3}(v_n - \alpha n) + \frac{1}{3}n + \alpha n + \alpha + 1$

$= \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3}\alpha n + \frac{1}{3}n + \alpha n + \alpha + 1$

$= \frac{2}{3}v_n + (\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} + \alpha)n + \alpha + 1$

$= \frac{2}{3}v_n + (\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3})n + \alpha + 1$

(v_n) هندسية معناه

$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3} = 0 \\ \alpha + 1 = 0 \end{cases}$ ومنه

قيمة α هي -1 وأساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$

وحدها الأول $v_1 = u_1 - 1$

$v_1 = 2 - 1$

$\boxed{v_1 = 1}$

Scanné avec CamScanner

نأخذ فيما يلي $q=-1$

$v_n = u_n - n$

أ) التعبير عن v_n, u_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_1=1$

إذن: $v_n = v_1 q^{n-1}$

$= 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

لدينا $v_n = u_n - n$

ومنه $u_n = v_n + n$

إذن $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n$

ب) حساب S_n, S'_n بدلالة n

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$u_1 = v_1 - 1$

$u_2 = v_2 - 2$

$u_3 = v_3 - 3$

$\vdots$

$u_n = v_n - n$

بالجمع طرف لطرف نجد

$u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n - (1+2+\dots+n)$

$S_n = T_n + A_n$

حيث $T_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_1=1$

$A_n = 1+2+\dots+n$ و عبارة عن مجموع متتالية حسابية

$A_n = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$T_n = v_1 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

إذن: $S_n = 3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \frac{n(n+1)}{2}$

حساب S'_n بدلالة n

$S'_n = (u_1-1)^2 + (u_2-2)^2 + \dots + (u_n-n)^2$

$(u_1-1)^2 = v_1^2$

$(u_2-2)^2 = v_2^2$

$\vdots$

$(u_n-n)^2 = v_n^2$

إذن: $S'_n = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$

$= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^0\right)^2 + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^1\right)^2 + \dots + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)^2$

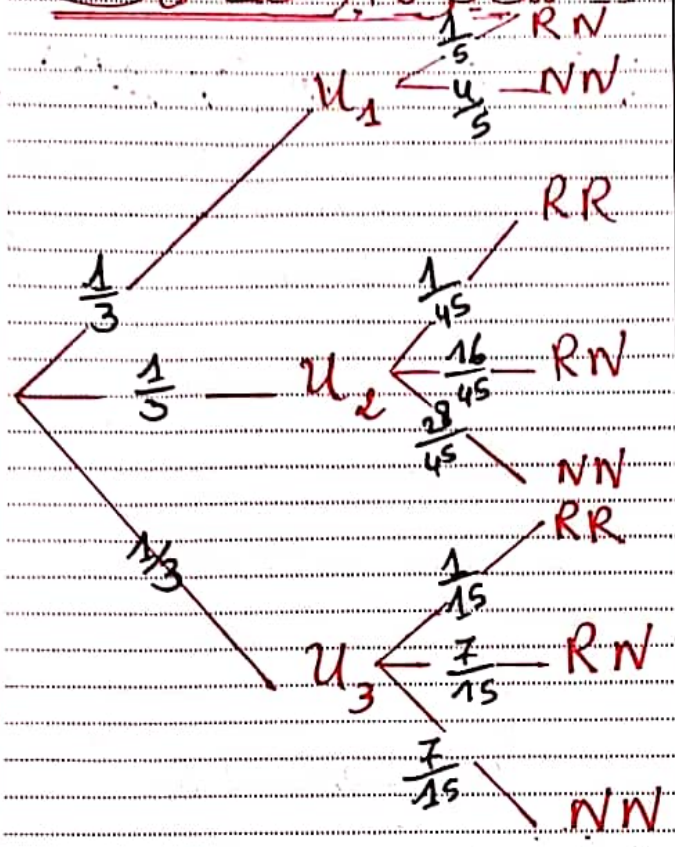
$= \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^0 + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^1 + \dots + \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{n-1}$

S'_n عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها $q=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ وحدها الأول هو 1

Scanné avec CamScanner

حل التمرين الثالث

1- شجرة الاحتمال



$$P_{u_1}(RN) = \frac{C_1^1 C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

$$P_{u_1}(NN) = \frac{C_9^2}{C_{10}^2} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

$$P_{u_2}(RR) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$P_{u_2}(RN) = \frac{C_2^1 C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}$$

$$P_{u_2}(NN) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}$$

$$P_{u_3}(RR) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

$$P_{u_3}(RN) = \frac{C_3^1 C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

$$P_{u_3}(NN) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

$$S'_n = 1\alpha\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$$

$$= \frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$\lim_{n\to+\infty} T_n$: حساب

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{n^2}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n^2} = 0$$

ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = 0 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Scanné avec CamScanner

2) حساب احتمال الحادثة RN

$$P(RN) = P(U_1 \cap RN) + P(U_2 \cap RN) + P(U_3 \cap RN)$$
$$= P(U_1) \times P_{U_1}(RN) + P(U_2) \times P_{U_2}(RN) + P(U_3) \times P_{U_3}(RN)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{16}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{15}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{16}{45} + \frac{7}{15}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{9+16+21}{45}\right)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{46}{45} = \frac{46}{135}$$

3) حساب $P_{RN}(U_3)$

$P_{RN}(U_3)$ احتمال السحب من الوعاء U_3 علما أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون

$$P_{RN}(U_3) = \frac{P(U_3 \cap RN)}{P(RN)}$$
$$= \frac{P(U_3) \times P_{U_3}(RN)}{P(RN)}$$
$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{7}{15}}{\frac{46}{135}}$$
$$= \frac{21}{46}$$

4) قيم المتغير العشوائي X

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل تنبيجة لسحب عدد الكرات المسحوبة "الحمراء"

$X=0$ أي سحب كريتين سوداوين

$X=2$ أي سحب كريتين حمراوين

$X=1$ أي سحب كرة حمراء وكرة سوداء

$$P(X=0) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{28}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{15}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{28}{45} + \frac{7}{15}\right)$$
$$= \frac{17}{27}$$

$$P(X=1) = P(RN) = \frac{46}{135}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{45} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{15}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{15}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1+3}{45}\right)$$
$$= \frac{4}{135}$$

$X = x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{85}{135}$	$\frac{46}{135}$	$\frac{4}{135}$

Scanné avec CamScanner

15

نضيف الى الصندوق u_1: n كرة سوداء وتسحب منه عشوائيا كرتين على التوالي مع الارجاع

عدد الكرات السوداء $9+n$

عدد الكرات الكلية هو $10+n$

عدد الحالات الممكنة هو

$(10+n)^2$

أ) حساب $P(C)$ بدلالة n

$$P(C)=\frac{(9+n)^2}{(10+n)^2}$$

$$=\frac{n^2+18n+81}{n^2+20n+100}$$

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} P(C)$

$$\lim_{n\to+\infty} P(C)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+18n+91}{n^2+20n+100}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2}$$

$$=1$$

Scanné avec CamScanner

حل التمرين الرابع

I) الدالة العددية g معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$g(x) = x^2 + (\ln x)^2 - 2\ln x - 1$

1) دراسة تغيرات g:

أ) تعيين $g(1)$ ، $g'(1)$

$g(1) = 0$

$g'(1) = 0$

ب) تعيين حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$+$	

II - تعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x) = x + \dfrac{1-(\ln x)^2}{x}$

1) أ- حساب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x + \dfrac{1-(\ln x)^2}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(x + \dfrac{1}{x}\left(1-(\ln x)^2\right)\right)$

$= -\infty$

لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\left(1-(\ln x)^2\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = +\infty\end{cases}$

تفسير النتيجة هندسيا

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \dfrac{1-(\ln x)^2}{x}\right)$

$= \dfrac{\infty}{+\infty}$ "ح-غ-ت من الشكل"

نضع: $t = \ln x$ ومنه $x = e^t$

لما $x\to+\infty$ فإن $t\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^t + \dfrac{1-t^2}{e^t}\right)$

$= \lim\limits_{t\to+\infty}\left(e^t + \dfrac{1}{e^t} - \dfrac{t^2}{e^t}\right)$

$= +\infty$

لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{e^t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^2}{e^t} = 0\end{cases}$

ج) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجبا تماما: $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ والدالة المشتقة f' حيث:

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{2}{x}\ln x - 1(1-(\ln x)^2)}{x^2}$$

$$= 1 + \frac{-2\ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\ln x - 1 + (\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + (\ln x)^2 - 2\ln x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}$$

ب) دراسة إشارة $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $x^2 > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$ وبالتالي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ج) جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	e	↗	$+\infty$

د) استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف وتعيين احداثياتها

بما أن الدالة f' انعدمت عند القيمة $x=1$ ولم تغير متاسشاتها قبل وبعد الانعدام فإن (C_f) يقبل النقطة $A(1;f(1))$ نقطة إنعطاف أي $A(1;2)$

3) معادلة المماس (T) عند نقطة الإنعطاف

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

لدينا

$$\begin{cases} f'(1) = \frac{g(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

ومنه

$$(T): y = 0(x-1) + 2$$

إذن :

$$(T): y = 2$$

4) تبيان أن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x + \frac{1-(\ln x)^2}{x} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-(\ln x)^2}{x}\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{e^t} - \frac{t^2}{e^t}\right]$$

$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

Scanné avec CamScanner

دراسة الوضع النسبي لـ $(\mathcal{C}_f)$ مع (Δ)

تدرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{1-(\ln x)^2}{x}$$

$$=\frac{(1-\ln x)(1+\ln x)}{x}$$

يكافئ $f(x)-y=0$

$$\begin{cases}(1-\ln x)(1+\ln x)=0\\ x\neq 0\end{cases}$$

ومنه

$1+\ln x=0$ أو $1-\ln x=0$

$\ln x=-1$ $\ln x=1$

إذن $x=e^{-1}$ أو $x=e$

نلخص إشارة الفرق في الجدول التالي:

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$\ln(x)+1$	‖	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه نستنتج الوضعية النسبية بين $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) كالتالي:

x	0		e^{-1}		e		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖ $(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)	$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)

تقبل $(\mathcal{C}_f)$ تقاطع مع (Δ) في: $H_1(e^{-1};e^{-1})$ و $H_2(e;e)$

5/ تبيان أن $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ)

$(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) معناه:

$$\begin{cases}(\Delta)\parallel(T_1)\parallel(T_2)\\ f'(x_0)=1\end{cases}$$

نحل المعادلة: $f'(x_0)=1$

$\frac{g(x_0)}{x_0^2}=1$ تكافئ $f'(x_0)=1$

تكافئ $g(x_0)=x_0^2$

ومنه $x_0^2+(\ln x_0)^2-2\ln x_0-1=x_0^2$

إذن: $(\ln x_0)^2-2\ln x_0-1=0$ ... (*)

بوضع $t=\ln x_0$ مع $x_0>0$

نجد: $t^2-2t-1=0$

$t_1=1-\sqrt{2}$ $t_2=1+\sqrt{2}$

ومنه: حلول المعادلة (*) هي

$$\begin{cases}x_1=e^{1-\sqrt{2}}\\ x_2=e^{1+\sqrt{2}}\end{cases}$$

إذن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ).

6/ رسم (T) ، (Δ) ، $(\mathcal{C}_f)$

على الورقة المرفقة

7/ المناقشة البيانية

المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $1-(\ln x)^2=mx$

-11-

Scanné avec CamScanner

$1-(\ln x)^2 = mx$

بالقسمة على العدد الحقيقي الموجب تماما نجد

$\frac{1-(\ln x)^2}{x} = m$

بإضافة x للطرفين نجد

$x + \frac{1-(\ln x)^2}{x} = x + m$

إذن :

$f(x) = x + m$

منا فنشخ بيانيا نجد ما يلي.

حلول المعادلة بيانيا : هي فواصل نقط تقاطع المستقيمات (Δ_m) حيث $(\Delta_m) : y = x + m$ مع المنحنى (C_f)

تعيين العددين الحقيقيين α و β حيث :

$\alpha = -e^{1-\sqrt{2}} + f(e^{1-\sqrt{2}})$; $\beta = -e^{1+\sqrt{2}} + f(e^{1+\sqrt{2}})$

المعادلة $m < \beta$ تقبل حل وحيد

المعادلة $m = \beta$ تقبل حلين

المعادلة $\beta < m < \alpha$ تقبل حلين

المعادلة $m = \alpha$ تقبل حل وحيد

المعادلة $m > \alpha$ لا تقبل حلول.

ج) تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{3}(\ln x)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن

$H(x) = \frac{1}{3}(\ln x)^3$

$h(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$

تكون الدالة H أصلية للدالة h إذا كان :

$H'(x) = h(x)$

$H'(x) = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{1}{x}(\ln x)^2$

$= \frac{3(\ln x)^2}{3x}$

$= \frac{(\ln x)^2}{x}$

$= h(x)$

ومنه الدالة $x \mapsto \frac{1}{3}(\ln x)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$

ب) استنتاج عبارة الدالة F الأصلية للدالة f والتي تنعدم عند e

$F(x) = \int_e^x f(t)\,dt$

$= \int_e^x \left(t + \frac{1-(\ln t)^2}{t}\right) dt$

$= \int_e^x \left(t + \frac{1}{t} - \frac{(\ln t)^2}{t}\right) dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^2 + \ln t - \frac{1}{3}(\ln t)^3\right]_e^x$

$= \frac{1}{2}x^2 + \ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3 - \frac{1}{2}e^2 - 1 + \frac{1}{3}$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{(\ln x)^3}{3} + \ln x - \frac{1}{2}e^2 - \frac{2}{3}$

Scanné avec CamScanner

ج) حساب مساحة الحيز A

A مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (φ) و المستقيمات $x=e$ ، $x=\frac{1}{e}$ و $y=x$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[e^{-1};e]$ المثيل البياني للدالة f يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x$

إذن:

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{e}(f(x)-y)\,dx$$

$$=\int_{1/e}^{e}\left(x-\frac{1-(\ln x)^2}{x}-x\right)dx$$

$$=\int_{1/e}^{e}\left(\frac{1}{x}-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)dx$$

$$=\left[\ln x-\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_{1/e}^{e}$$

$$=\ln e-\frac{(\ln e)^3}{3}-\ln e^{-1}+\frac{(\ln e^{-1})^3}{3}$$

$$=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\ u.a$$

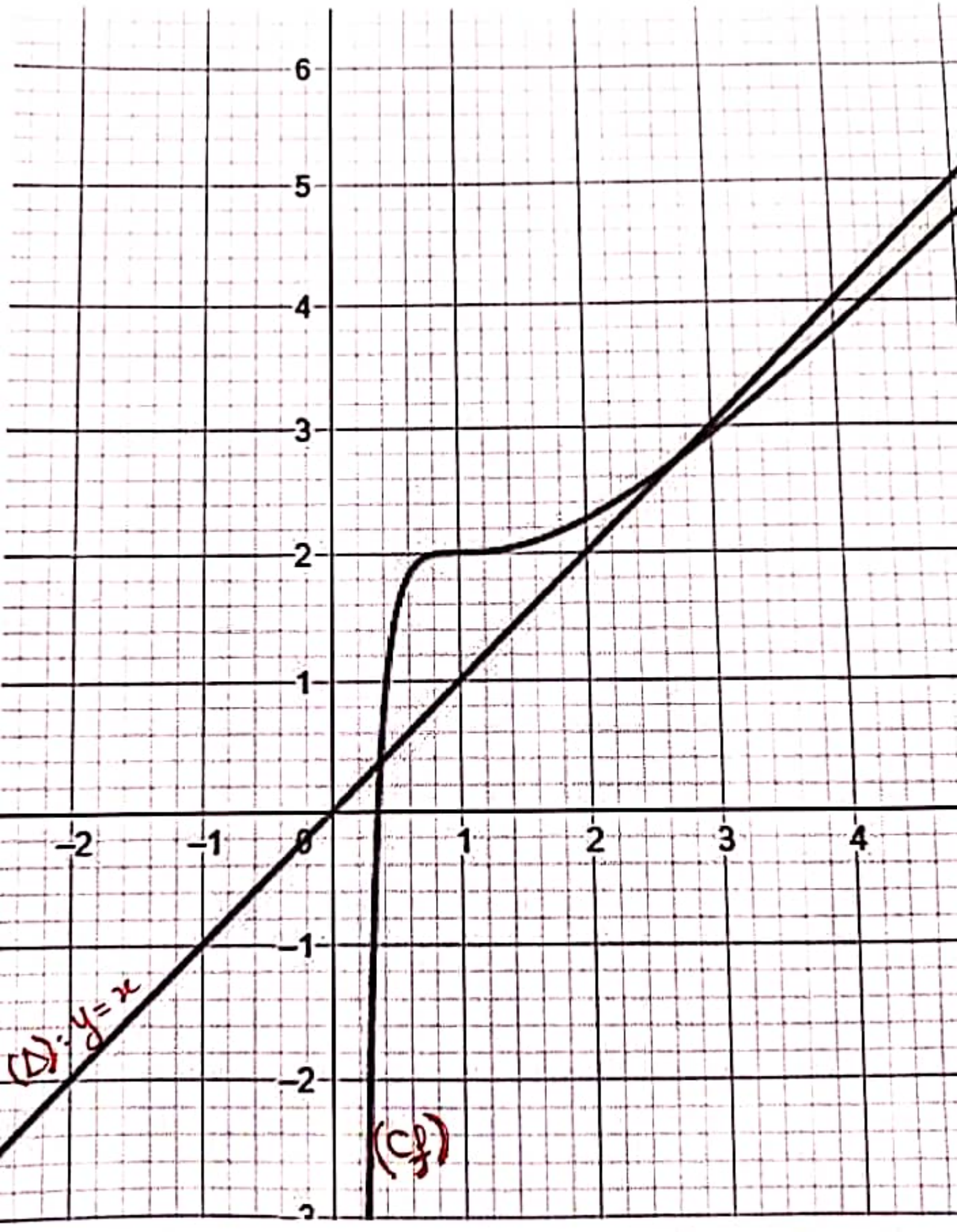
وبما أن وحدة المعلم هي $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ فإن مساحة الحيز بالـ cm^2 هي:

$$A=\frac{4}{3}(2cm)(2cm)$$

$$=\frac{4}{3}\times 4\,cm^2$$

$$=\frac{16}{3}\,cm^2$$

Scanné avec CamScanner



Scanné avec CamScanner