مديرية التربية لولاية باتنة

ثانوية أجيال المستقبل الخاصة — العام الدراسي 2019/2018

السنة الثالثة : العلوم التجريبية — المدة : 3ساعت ونصف الساعة

الامتحان التجريبي (رياضيات).

على الطالب اختيار أحد الموضوعين

الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل :4نقط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس والمباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

الأعداد المركبة $z_A=\sqrt{3}+i$ ؛ $z_B=2\sqrt{3}-2i$ و $z_C=-2i$ هي على الترتيب لواحق النقط A ؛ B و C .

1) – أ) أكتب على الشكل الجبري ثمّ على الشكل المثلّثي العدد المركب $\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$.

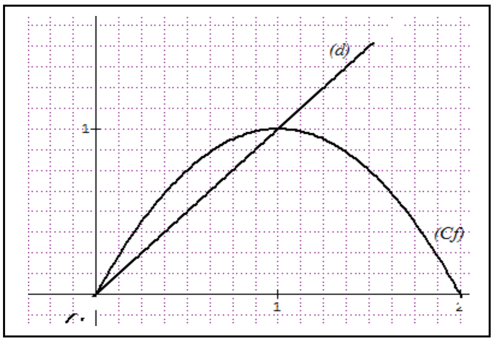
- ب) فسر هندسيا الطويلة وعمدة للعدد المركب $\left(\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) النقطة D هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

- أ) عين z_D لاحقة النقطة D .
- ب) أكتب على الشكل الأسي العدد المركب z_B ثم العدد المركب z_D .
- جـ) استنتج قسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OB}\right)$.
- د) ماذا يمكنك أن تقول عن النقط O ؛ B ؛ D ؟

3) عين الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة لمجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\left|z-\sqrt{3}-i\right|=OC$.

التمرين الثاني :5 نقط



الشكل المقابل هو التمثيل البياني $\left(C_f\right)$ للدالة f المعرّفة على المجال I $[0;2]$ بـ : $f\left(x\right)=x\left(2-x\right)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. واحدة الأطوال هي $4cm$.

$\left(d\right)$ هو المستقيم الذي معادلته $y=x$.

نعرف في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية $\left(u_n\right)$ بحدها الأوّل $u_0=\dfrac{1}{8}$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=u_n\left(2-u_n\right)$

1) أنقل على ورقة الإجابة الشكل ثم على حامل محور الفواصل مثل الحدود u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 و u_3 موضحا خطوط الرسم

2) ما هو تخمينك حول رتابة وتقارب المتتالية $\left(u_n\right)$ ؟

3) – أ) بالتراجع ؛ برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\prec u_n\prec 1$.

- ب) بين أنّ $\left(u_n\right)$ متتالية متزايدة ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

4) نعرف في $\mathbb{N}$ المتتاليتين $\left(v_n\right)$ و $\left(w_n\right)$ كما يلي : $v_n=1-u_n$ و $w_n=\ln\left(v_n\right)$.

برهن أنّ $v_{n+1}=v_n^2$ وأنّ $\left(w_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $q=2$.

التمرين الثّالث :3نقط

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نأخذ النقط :

$A(1;2;3)$ ؛ $B(0;1;4)$ ؛ $C(-1;-3;2)$ ؛ $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1) برهن أن النقط A ؛ B ؛ C تحدد مستويا.

2) – أ) تحقق أنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وأنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AC}$.

- ب) استنتج أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

- جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3) (Δ) هو المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$.

تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

التمرين الرابع :8 نقط

I) g هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = -x-1-\ln x$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) أحسب $g'(x)$ ثمّ تحقّق أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x) \prec 0$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة g .

4) – أ) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وأن $0,2 \prec \alpha \prec 0,3$.

- ب) استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$.

II) نعرّف في المجال $]0;+\infty[$ الدّالة f كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \ln x + x$.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب نهايتي الدالة f .

2) – أ) تحقق أنّه من أجل كل x مكن المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x}$.

- ب) شكّل بعد ذلك جدول تغيرات الدالة f .

3) أدرس وضع (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

4) أنشئ (Δ) و (C_f) .

5) h هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{1}{2}x(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x^2$

- أ) بين أن h هي إحدى الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

- ب) عين الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق $F(1) = 2$.

- جـ) أحسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=1$ ؛ $x=2$ و $y=x$.

الموضوع الثّاني

التمرين الأوّل:4 نقط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+2\right)=0$.

II) النقط A ، B ، C هي على الترتيب صور الأعداد المركبة $z_A=1+i$ ؛ $z_B=1-i$ و $z_C=-i\sqrt{3}$.

1) النقطة E هي نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة B .

بين أنّ $z_E=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$.

2) R هو الدوران الذي مركزه النقطة O و $\frac{\pi}{2}$ قيسا لزاويته.

نضع $R\left(C\right)=F$ و $R\left(E\right)=G$.

- أ) جد العبارة المركبة للدوران R ثمّ :

- ب) تحقّق أنّ $z_F=\sqrt{3}$ وأنّ $z_G=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$.

3) h هو التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته 2 .

ليكن S التحويل المركب من التّحويلين R و h .

عين الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة للتحويل S .

التمرين الثاني : 4 نقط

لدينا ثلاثة صناديق متماثلة : U_1 ؛ U_2 و U_3 .

كل صندوق يحوي 6 كرات من اللونين : أبيض (B) وأحمر (R)

الصندوق U_1 فيه 2 كرتين بيضاوين و4 كرات حمراء.

الصندوق U_2 فيه 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء.

الصندوق U_3 فيه 5 كرات بيضاء و1 كرة حمراء.

نختار عشوائيا احد الصناديق ثمّ نسحب منه كرة واحدة.

1) مثّل هذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

2) احسب احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق U_3 .

3) أحسب احتمال سحب كرة بيضاء

4) علما أنّ الكرة المسحوبة بيضاء ، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق U_3 ؟

التمرين الثالث :4نقط

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = e^{3n+2}$

حيث يشير e إلي أساس اللوغاريتم النيبيري.

1) - أ)بين أنّ (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل .

هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علّل.

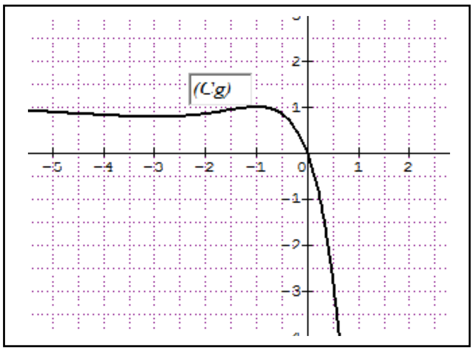
- ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) نعرّف المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

- أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متتالية حسابية يطلب كتابة v_n بدلالة n .
- ب) أحسب بدلالة n :
  - المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ ثمّ
  - الجداء : $T_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$

التمرين الرابع :8 نقط

I)الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_g) للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1-(x+1)^2 e^x$.



1) تحقق أنّ $g(0)=0$.

2) اعتمادا على (C_g) برر ما يلي :

- أ) من اجل كل x من $]-\infty;0[$: $g(x) \succ 0$.
- ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x) \prec 0$.

II) نعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ الدالة f بما يلي : $f(x) = (x+1)-(x^2+1)e^x$.

(C_f) هو التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب غلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) – أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

- ب) تحقق أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$.
- جـ) استنتج ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار$(-\infty)$.
- د) تحقّق أن (C_f) يقع أسفل (Δ) .

3) تحقّق أنه من أجل $x \neq 0$: $f(x) = x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) – أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

- ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) أنشئ (Δ) ثم (C_f) في المعلم السابق. (نأخذ $f(-1) \simeq -0,75$ و $f(-3) \simeq -2,5$)

6) – أ) تحقق أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x) = (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة h حيث: $h(x) = xe^x$.

- ب) بين أنّ $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$.
- جـ) باستعمال المكاملة بالأجزاء بين أنّ $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx = 3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

الحل المفصّل للموضوع الأوّل

تمرين 1 :

1) – أ) نكتب على الشكلين الجبري والمثلثي العدد المركب $\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$. 1

لدينا
$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-2i-2\sqrt{3}+2i}{\sqrt{3}+i-2\sqrt{3}+2i}$$
$$=\frac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+3i}$$
$$=\frac{-2\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}-3i\right)}{12} .$$
$$\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

- ب) التفسير الهندسي للطويلة وعمدة للعدد المركب $\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)$. 0,5

لدينا ما يلي :
$$\begin{cases}\left|\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\frac{BC}{BA}\\ Arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

من خلال ما سبق :
$$\frac{z_C-z_B}{z_C-z_A}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} .$$
$$=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]$$

وبالتّالي :

وعليه:
$$\begin{cases}BC=BA\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

2 -) أ) تعيين z_D . 0,5

النقطة D نظيرة A بالنسبة إلى حامل محور التراتيب وهذا معناه

$\mathrm{Re}(z_D)=-\mathrm{Re}(z_A)$ و $\mathrm{Im}(z_D)=\mathrm{Im}(z_A)$.

وبالتالي : $z_D=-\sqrt{3}+i$.

- ب) كتابة z_B و z_A على الشكل الأسي. 0,5

$$z_B=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=4\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

إذا : $z_B=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ثمّ :

$$z_D=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

وعليه : $=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

- جـ) استنتاج قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)$ 0,5

$$\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)\equiv Arg\left(\frac{z_B}{z_D}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\left[Arg\left(z_D\right)-Arg\left(z_B\right)\right][2\pi]$$
$$\equiv\frac{5\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$$

إذا : $\left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right)=\pi+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

- د) موضع النقط O ؛ D ؛ B 0,5

النقط O ؛ D ؛ B في استقامية .

3 -) الطبيعة الهندسية والعناصر المميزة 0,5

لمجموعة النقط M .

$\left|z-\sqrt{3}-i\right|=OC$ معناه $\left|z-\left(\sqrt{3}+i\right)\right|=OC$

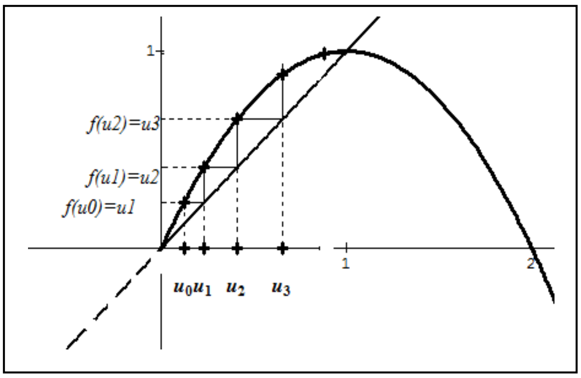
معناه $\left|z_M-z_A\right|=OC$

معناه $MA=OC$

المجموعة هي إذا الدائرة ذات المركز A ونصف القطر المسافة OC .

<u>تمرين 2 :</u>

1) تمثيل الحدود 1



2) التخمين حول رتابة وتقارب (u_n) 0,5

من خلال التمثيل البياني للحدود الأولى للمتتالية (u_n) نلاحظ ما يلي :

*) $u_0 \prec u_1 \prec u_2 \prec u_3$.

إذا كانت (u_n) رتيبة فهي حتما متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

*) النقط $M_n(u_n; f(u_n))$ من (C_f) تقترب من نقطة تقاطع (C_f) و (Δ) وبالتالي (u_n) متتالية متقاربة .

3) – أ) بالتراجع نبين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$ 1

نضع : $P(n): 0 \prec u_n \prec 1 ; n \in \mathbb{N}$

*) نتحقق من صحة $P(0)$.

لدينا فرضا $u_0 = \frac{1}{8}$ إذا : $0 \prec u_0 \prec 1$.

$P(0)$ صحيحة.

**) نفرض أنّه عند الرتبة n ؛ $P(n)$ صحيحة أي

نفرض أنّ : $0 \prec u_0 \prec 1$ ونبين صحة $P(n+1)$

أي نبين ما يلي : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

لدينا وحسب فرضية التراجع $0 \prec u_n \prec 1$

إذا : $(2-u_n) \succ 0$ وبالتالي : $u_n(2-u_n) \succ 0$ ..(1)

ثمّ $u_{n+1} - 1 = u_n(2-u_n) - 1$

$= -u_n^2 + 2u_n - 1$

$= -(u_n - 1)^2$

أي $u_{n+1} - 1 \prec 0$. إذا $u_{n+1} \prec 1$ ... (2)

من (1) و (2) ينتج : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$.

إذا : $P(n+1)$ صحيحة

مما سبق وحسب مبدأ الإستدلال بالتراجع يكون : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$.

ب-) نبين أن (u_n) متتالية متزايدة ثم نستنتج انّها متقاربة 0,5

*) لدينا ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} - u_n = u_n(2-u_n) - u_n$

$= u_n(2 - u_n - 1)$

$= u_n(1-u_n)$

حسب ما سبق : $\begin{cases} u_n \succ 0 \\ (1-u_n) \succ 0 \end{cases}$ إذا $u_n(1-u_n) \succ 0$

أي : $u_{n+1} - u_n \succ 0$

المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$.

**) $\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ متتالية متزايدة تماما} \\ (u_n) \text{ محدودة من العلى بالعدد } 1\end{array}\right\}$.

إذا وحسب مبرهنة التقارب الرتيب : (u_n) متقاربة.

4) نبرهن ما يلي :

-) $v_{n+1} = v_n^2$ 0,5

لدينا : $v_{n+1} = 1 - u_{n+1}$

$= 1 - u_n(2-u_n)$

$= 1 - 2u_n + u_n^2$

$= (1-u_n)^2$

أي : $v_{n+1} = v_n^2$.

-) (w_n) **متتالية هندسية اساسها** $q = 2$. 0,5

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$

$= \ln(v_n^2)$

$= 2\ln(v_n)$

أي : $w_{n+1} = 2w_n$

إذا (w_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$.

<u>تمرين 3 :</u>

1) نبرهن أنّ النقط A، B، C تحدد مستويا 1

لدينا :

$\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ ؛ $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$

نلاحظ ما يلي : $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$ أي

لا يوجد عدد حقيقي k يحقق : $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}$ ليس مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{AC}$ وهذا معناه أن النقط A، B، C ليست في استقامية فهي تعرف إذا المستوي (ABC) .

2) – ا) نتحقق أنّ $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ وعلى $\overrightarrow{AC}$

حسب العبارة التحليلية للجداء السلمي : 0,5

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2(-1) + (-1)(-1) + 1(1)$

$= 0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2(-2) + (-1)(-5) + 1(-1)$

$= 0$

ومنه : $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

- ب) نستنتج أنّ $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) . 0,5

بما أنّ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

- جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

المستوي (ABC) معرّف بالشعاع الناظم $\vec{n}(2;-1;1)$ وبالنقطة $A(1;2;3)$.

من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC)

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ معناه $2(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0$

معناه $2x-y+z-3=0$.

$(ABC):2x-y+z-3=0$.

3) تحقق أنّ D نقطة من (Δ) . 0,5

نحل في $\mathbb{R}$ الجملة : $\begin{cases}4=2-2t\\-2=-1+t\\5=4-t\end{cases} \quad ...\ (I)$

(I) تكافئ $\begin{cases}t=-1\\t=-1\\t=-1\end{cases}$

الجملة تقبل حلا وحيدا وهذا معناه : $D\in(\Delta)$.

<u>تمرين 4 :</u>

(I) 1) حساب $\lim\limits_{x\succ 0} g(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 1

*) $\begin{cases}(-x-1)\to-1\\ \ln x\to-\infty\end{cases}$; $\lim\limits_{x\succ 0} f(x)=+\infty$

*) $\begin{cases}(-x-1)\to-\infty\\ \ln x\to+\infty\end{cases}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2) *) حساب $g'(x)$ 0,5

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)=-1-\dfrac{1}{x}$

$$=-\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

***) تحقق أن $g'(x)\prec 0$**

من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\succ 0$ وعليه :

$$-\left(1+\frac{1}{x}\right)\prec 0$$

أي : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$.

أي : من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\prec 0$.

3) إنشاء جدول تغيرات الدالة g . 0,5

g دالة متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

4) أ –) * نبين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$. 0,5

من خلال جدول التغيرات نلاحظ ما يلي :

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;+\infty[$ و $0\in]-\infty;+\infty[$

وعليه : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$.

***)نتحقق أنّ** $0,2\prec\alpha\prec 0,3$.

لدينا :

$g(0,2)\simeq 0,409$ ؛ $g(\alpha)=0$ و $g(0,3)\simeq -0,096$

نلاحظ ما يلي : $g(0,3)\prec g(\alpha)\prec g(0,2)$

بما أن g دالة متناقصة فهي لا تحفظ الترتيب .

وعليه : $0,2\prec\alpha\prec 0,3$.

- ب) استنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$ 0,5

حسب جدول التغيرات وبما أنّ $g(\alpha)=0$ فإنّ إشارة $g(x)$ تكون كما يلي :

0		α		$+\infty$
‖	$+$	0	$-$	

II)1) حساب نهايتي الدّالة f . 1

*) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\ ?\begin{cases}\ln^2 x\to+\infty\\ \ln x\to-\infty\end{cases}$

حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

نزيل هذه الحالة .

$f(x)=\ln x\left(\dfrac{1}{2}\ln x+1\right)+x$.

بالإنتقال إلى النهاية نجد :

$$\lim_{x\succ 0} f(x)=\lim_{x\succ 0}\left[\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)+x\right]$$

$=+\infty$; $(\ln x\to-\infty)$

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ –) تحقق أن $f'(x)=\frac{-g(x)}{x}$. 0,5

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[2.\frac{1}{x}\ln x\right]+\frac{1}{x}+1$$

$$=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+1$$

$$=\frac{x+1+\ln x}{x}$$

$$=\frac{-(-x-1-\ln x)}{x}$$ أي : $f'(x)=-\frac{g(x)}{x}$

- ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f . 0,5

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) دراسة وضع (C_f) بالنسبة إلى (Δ) 1

ندرس في المجال $]0;+\infty[$ إشارة الفرق $f(x)-x$

. $f(x)-x=\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$

إشارة هذا الفرق هي إذا من إشارة الجداء

. $\ln x\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$

*) إشارة $\ln x$ كما يلي :

0		1		$+\infty$
	$-$	0	$+$	

*) لتحديد إشارة $\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$ نحل في المجال

$]0;+\infty[$ المتراجحة : $\frac{1}{2}\ln x+1\ge 0$

$\frac{1}{2}\ln x+1\ge 0$ معناه $\ln x\ge -2$

معناه $x\ge e^{-2}$

إشارة $\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$:

0		1		$+\infty$
	$-$	0	$+$	

إشارة الفرق $[f(x)-x]$ في الجدول :

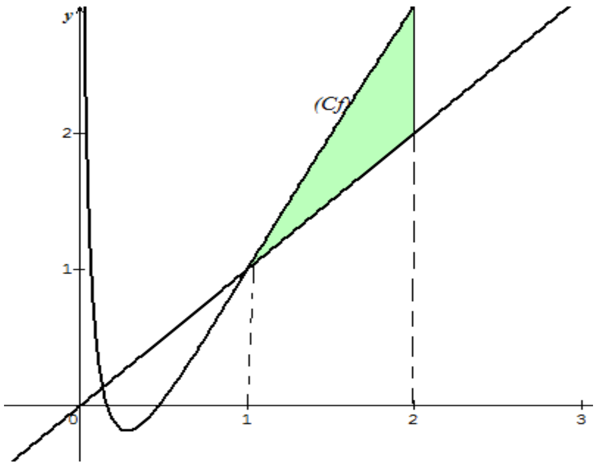
	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{1}{2}\ln x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

*) (C_f) أعلى (Δ) على المجالين $]0;e^{-2}[$ و $]1;+\infty[$

*) (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين ذات الفاصلتين 1و e^{-2}

*) (C_f) أسفل (Δ) في المجال $]e^{-2};1[$.

4) إنشاء (Δ) و (C_f) 0,5



5) أ –)نبين أن h دالة أصلية للدالة f . 0,5

h قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا :

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left[(\ln x)^2+x.\frac{2}{x}\ln x\right]+x$$

$$=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x+x$$ أي $h'(x)=f(x)$

h هي إذا دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ب-) نعين الدالة الأصلية F حيث $F(1)=2$. 0,5

F تحقق : $F(x)=h(x)+c\,/\,c\in\mathbb{R}$ و $F(1)=2$.

$F(1)=2$ معناه $h(1)+c=2$

معناه $\frac{1}{2}+c=2$ ؛ نجد : $c=\frac{3}{2}$.

إذا : $F(x)=\frac{1}{2}x(\ln x)^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$.

- جـ) حساب المساحة S للحيز. 0,5

(C_f) أعلى (Δ) في المجال $[1;2]$ وبالتالي :

أي $S=\int_1^2\left[f(x)-x\right]dx.ua$

$$S=\int_1^2 f(x)dx.ua-\int_1^2 xdx.ua$$

$$=\left[\frac{1}{2}x(\ln x)^2\right]_1^2 ua$$ نجد : $S\simeq 0,480ua$

الحل المفصل للموضوع الثاني

تمرين 1 :

I) نحل المعادلة: 1,5

$$\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z^2-2z+2\right)=0$$

معناه

$$\left[\begin{array}{l} z+i\sqrt{3}=0 \;\;;\; z=-i\sqrt{3} \\ z^2-2z+2=0 \quad ...(1) \end{array}\right.$$

المميز Δ للمعادلة (1) هو:

$$\Delta=-4\prec 0$$

للمعادلة (1) حلان مترافقان هما z_1 و z_2 حيث :

$z_1=\frac{2+2i}{2}$ أي $z_1=1+i$ و $z_2=\overline{z_1}=1-i$

إذا كانت S هي مجموعة حلول المعادلة فإنّ :

$$S=\left\{-i\sqrt{3},1+i,1-i\right\}$$

II -1) نبين أنّ $z_E=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$ 0,5

E نظيرة C بالنسبة إلى B معناه B منتصف $[CE]$

معناه $z_B=\frac{z_C+z_E}{2}$

معناه $z_E=2z_B-z_C$

بالتعويض : $z_E=2(1-i)-(-i\sqrt{3})$

$$=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$$

2) – أ) إيجاد العبارة المركبة للدوران R 0,5

عبارة R من الشكل $z'=az+b$

بما أن المركز هو O وقيس الزاوية هو $\frac{\pi}{2}$ ينتج :

$$b=0 \text{ و } a=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=i$$

إذا : $R:z'=iz$

ب -) تتحقق أنّ $z_F=\sqrt{3}$ **وأن** $z_G=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$ 1

*) $R(C)=F$ معناه $z_F=iz_C$

$z_F=i\left(-i\sqrt{3}\right)$ أي $z_F=\sqrt{3}$

*) $R(E)=G$ معناه $z_G=iz_E$

$$=i\left[2+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right]$$

$$z_G=2i-\left(\sqrt{3}-2\right)$$

$$=\left(2-\sqrt{3}\right)+2i$$

3) تعيين طبيعة التحويل S 0,5

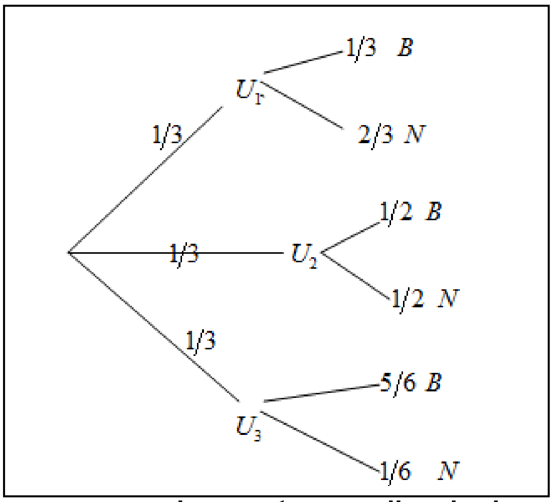
S هو مركب تحاكي موجب ودوران لهما نفس المركز.

إذا : S هو التشابه الذي مركزه النقطة O ؛ نسبته 2

وقيس زاويته $\frac{\pi}{2}$.

تمرين 2 :

1) تمثيل التجربة بشجرة الاحتمالات 1



2) حساب احتمال سحب كرة بيضاء من U_3 1

$$P\left(B\cap U_3\right)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}$$

$$=\frac{5}{18}$$

3) حساب احتمال سحب كرة بيضاء 1

$$P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{5}{18}$$

$$=\frac{5}{9}$$

4) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ؛ نحسب احتمال أن تكون من الصندوق U_3. 1

$$P_B\left(U_3\right)=\frac{P\left(B\cap U_3\right)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}} \quad \text{أي} \quad P_B\left(U_3\right)=\frac{1}{2}$$

تمرين 3

1) – أ)نبين أنّ (u_n) **متتالية هندسية** 1

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1}=e^{3n+3+2}$$
$$u_{n+1}=e^{3}\times e^{3n+2}$$
$$=e^{3}\times u_n$$
وعلية المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسه $q=e^3$

وحدها الأول $u_0=e^2$

*) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3n+2}\right)$
$$=+\infty\ ;(3n+2\to+\infty)$$
المتتالية (u_n) لست متقاربة. $\color{red}{0,5}$

- ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) $\color{red}{0,5}$

بما أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n\succ 0$ ح نقارن النسبة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^3\succ 1\ .$$
إذا المتتالية (u_n) متزايدة تماما في $\mathbb{N}$

2) – ا)* نبين أن (v_n) متتالية حسابية $\color{red}{0,5}$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :
$$v_{n+1}-v_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$$
$$=\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$
وحسب ما سبق: $v_{n+1}-v_n=\ln\left(e^3\right)$
$$=3$$
المتتالية (v_n) هي إذا متتالية حسابية أساسها $r=3$

وحدها الأوّل $v_0=\ln(u_0)$
$$=2\quad(\ u_0=e^2\ )$$
***) كتابة v_n بدلالة n** $\color{red}{0,5}$

عبارة الحد العم للمتتالية الحسابية (v_n) معطاة بالعلاقة : $v_n=v_0+n.r$

بالتعويض نجد : $v_n=3n+2$

- ب) نحسب بدلالة n

- المجموع : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$ $\color{red}{0,5}$

S_n هو مجموع n جدا الأولى من المتتالية الحسابية (v_n)

ومنه : $S=\dfrac{n}{2}(v_0+v_{n-1})$
$$=\frac{n}{2}(2+3n-1)$$
$$S_n=\frac{n(3n+1)}{2}$$
- **الجداء:** $T_n=u_0\times u_1\times\ldots\times u_{n-1}$ $\color{red}{0,5}$

من العلاقة $v_n=\ln(u_n)$ ينتج $u_n=e^{v_n}$.

في هذه الحالة :
$$T_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_{n-1}}$$
$$=e^{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}$$
$$=e^{S_n}$$
بتعويض S_n بقيمته ينتج : $T_n=e^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

تمرين 4 :

I)

1) تتحقق أن $g(0)=0$ $\color{red}{0,5}$

لدينا : $g(0)=1-(0+1)^2e^0$
$$=1-1$$
$$=0$$
2) اعتمادا على (C_g) نبرر ما يلي : $\color{red}{1}$

- أ) من أجل كل x من $]-\infty;0[$: $g(x)\succ 0$

(C_g) أعلى حامل محور الفواصل في المجال $]-\infty,0[$
إذا g دالة موجبة تماما على هذا المجال .

- ب) من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\prec 0$.

بيانيا (C_g) يقع أسفل حامل محور الفواصل عل هذا المجال أي g دالة سالبة تماما .

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g(x)\prec 0$

II)

1) – أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ $\color{red}{0,5}$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=?\ \begin{cases}(x^2+1)\to 0\\ e^x\to 0\end{cases}$$
لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $(0\times\infty)$.

نزيل هذه الحالة :
$$f(x)=(x+1)-x^2e^x-e^x$$
بالانتقال إلى النهاية نجد :
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)-x^2e^x-e^x\right]$$
$$=-\infty\ ;\ \begin{cases}(x+1)\to-\infty\\ x^2e^x\to 0;e^x\to 0\end{cases}$$
- ب) تتحقق أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ $\color{red}{0,5}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-(x^2+1)e^x\right]$$
$$=0$$

-جـ) استنتاج أن (Δ) مستقيم مقارب 0,5

بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$.

- د) تتحقق أن (C_f) أسفل (Δ) 0,5

وضع (C_f) بالنسبة إلى (Δ) تحدد إشارة الفرق $\left[f(x)-(x+1)\right]$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\left[f(x)-(x+1)\right]=-(x^2+1)e^x$

من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$\begin{cases}-(x^2+1)\prec 0\\ e^x\succ 0\end{cases}$ وبالتالي $\left[f(x)-(x+1)\prec 0\right]$

(C_f) يقع إذا أسفل مستقيمة المقارب (Δ) .

3) *) تتحقق أن $f(x)=x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$ 0,5

من اجل $x\neq 0$

$$x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]=\left[x+\frac{x}{x}-x\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$$
$$=\left[x+1-(x^2+1)e^x\right]$$
$$=f(x)$$

*) استنتاج $\lim_{x\to-\infty}+f(x)$ 0,5

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]$$
$$=-\infty\ ;\begin{cases}\left(1+\frac{1}{x}\right)\to 1\\ \left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\to+\infty\end{cases}$$

4) نبين أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ 0,5

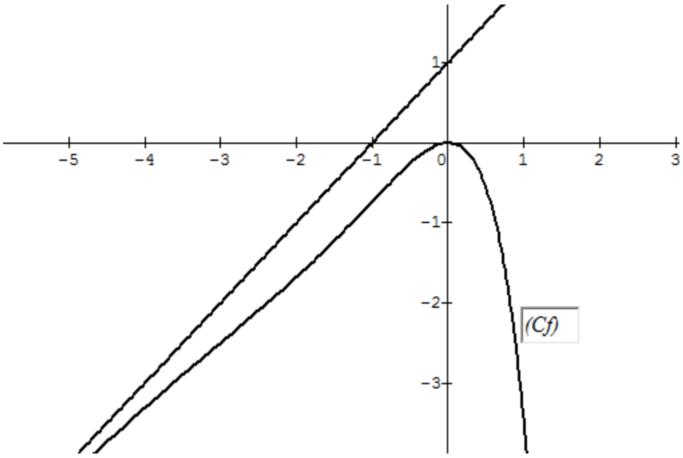
$$f'(x)=1-\left[2xe^x+(x^2+1)e^x\right]$$
$$=1-\left[(2x+x^2+1)e^x\right]$$
$$=1-(x+1)^2e^x$$
$$=g(x)$$

- ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f 0,5

أشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

5) إنشاء (Δ) ثم (C_f) 0,5



6) تحقق أنّ H دالة أصلية للدالة h 0,5

H قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$H'(x)=e^x+(x-1)e^x$$
$$=xe^x$$
$$=h(x)$$

إذا H هي إحدى الدوال الأصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

- ب) نبين أنّ $\int_{-1}^{0}xe^xdx=\frac{2}{e}-1$ 0,5

$$\int_{-1}^{0}xe^xdx=\left[(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}$$

$=-1-(-2)e^{-1}$. أي $\int_{-1}^{0}xe^xdx=\frac{2}{e}-1$

-جـ) بالتجزئة نبين أنّ $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^xdx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$ 1

نضع $\begin{cases}u(x)=x^2+1\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ نجد $\begin{cases}u'(x)=2x\\ v(x)=e^x\end{cases}$

حسب مفهوم المكاملة بالتجزئة :

$$\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^xdx=\left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}2xe^xdx$$
$$=\left[(x^2+1)e^x\right]_{-1}^{0}-\left[2(x-1)e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=\left[(x^2-2x+3)e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$=3-6e^{-1}$$