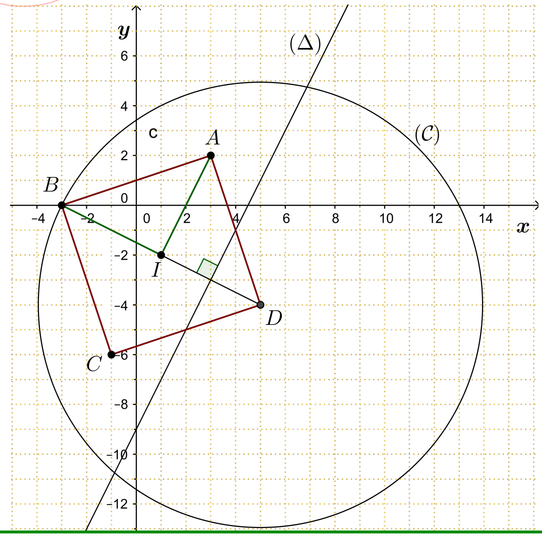
بكالوريا تجريبي - شعبة العلوم التجريبية **تصحيح اختبار مادة الرياضيات**

الموضوع الأول

التمرين الأول(5ن)



النقاط:
0.25ن
(Δ):
0.25ن
(C)
0.25ن

1 1.1 تعليم النقط A، B و I.

$A(3;2)$ ، $z_A = 3+2i$ ، $B(-3;0)$ ، $z_B = -3$ ، $I(1;-2)$ ، $z_I = 1-2i$

2.1 الشكل الجبري للعدد Z حيث $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$

$Z = \dfrac{1-2i-3-2i}{1-2i+3} = \dfrac{-2-4i}{4-2i} = \dfrac{-1-2i}{2-i}$ منه $\boxed{Z = -i}$

0.5ن

استنتاج طبيعة المثلث IAB

لدينا : $|Z| = 1$ معناه $\dfrac{|z_I - z_A|}{|z_I - z_B|} = 1$ معناه $IA = IB$

$\arg(Z) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$ معناه $\arg\left(\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ معناه $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

إذن IABمثلث قائم في I و متساوي الساقين .

0.5ن

3.1 حساب z_C لاحقة النقطة Cصورة I بواسطة التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2.

$h_{(A,2)}(I) = C$ معناه $z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$ معناه $z_C = 2z_I - z_A$ معناه $z_C = 2(1-2i) - (3+2i)$

أي $\boxed{z_C = -1-6i}$

0.5ن

4.1 D مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

حساب z_D:

لدينا $1-1+1 \neq 0$، إذن D نقطة و حيدة تحقق : $z_D = z_A - z_B + z_C = 3+2i+3-1-6i$ أي $\boxed{z_D = 5-4i}$

0.5ن

5.1 اثبات أنّ $ABCD$ مربع .

من 3.1 لدينا $h_{(A,2)}(I) = C$ معناه $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ معناه I منتصف $[AC]$ ومنتصف $[BD]$أي الأقطار متناصفة.

من 2.1 $(AB) \perp (BD)$ أي الأقطار متعامدة و $AB = BD$ أي الأقطار متقايسة .

إذن الأقطار متناصفة ، متعامدة و متقايسة و بالتالي $ABCD$ مربع.

0.5ن

---

2 تعيين و انشاء Γ_1 حيث: $\Gamma_1 = \{M \in (p) \; : \; \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\|\}$

$M \in (\Gamma_1)$ معناه $\|\overrightarrow{MD}\| = \frac{1}{2}\|2\overrightarrow{MI}\|$ معناه $MD = MI$

إذن $\Gamma_1 = (\Delta)$، (Δ) هو محور القطعة المستقيمة $[ID]$

0.75ن

---

3 1.3 تبيان أنّ B تنتمي الى Γ_2 حيث: $\Gamma_2 = \{M \in (p) \; : \; \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{5}\}$

$B \in (\Gamma_2)$ معناه $\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\| = 4\sqrt{5}$ معناه $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\| = 4\sqrt{5}$

و لدينا $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| = |z_D - z_B| = |5-4i+3| = |8-4i| = \sqrt{80}$ و منه $\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\| = 4\sqrt{5}$ و

بالتالي $B \in \Gamma_2$

0.5ن

2.3 تعيين Γ_2

$M \in \Gamma_2$ معناه $\|\overrightarrow{MD}\| = 4\sqrt{5}$ أي $MD = 4\sqrt{5}$

$\Gamma_2 = (\mathcal{C})$ حيث $(\mathcal{C})$ دائرة مركزها D و نصف قطرها $R = BD = 5\sqrt{5}$

0.5ن

التمرين الثاني(5ن)

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 2}$

1 (u_n) متقاربة معناه يوجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

و لدينا $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}$ ، و بما أن f دالة مستمرة عند كل عدد حقيقي $x \neq -2$ فإن :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$ أي $\ell = f(\ell)$ و منه $\ell = \dfrac{\ell+6}{\ell+2}$ أي $\ell^2 + \ell - 6 = 0$ مع $\ell \neq -2$.

بالفعل ℓ هو جذر لـ P حيث $P(x) = x^2 + x - 6$.

0.5ن

2 تعيين α و β جذري $P(x)$ حيث $\alpha > \beta$

$\Delta = 25$، $\dfrac{-1-5}{2} = -3$ ، $\dfrac{-1+5}{2} = 2$ منه $\boxed{\alpha = 2}$ و $\boxed{\beta = -3}$

0.5ن

3 من أجل $n \in \mathbb{N}$ نضع : $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ أي $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$

1.3 إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية

من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{u_n+6}{u_n+2} - 2}{\frac{u_n+6}{u_n+2} + 3} = \frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n + 6 + 3u_n + 6} = \frac{-u_n + 2}{4u_n + 12} = -\frac{1}{4}\left(\frac{u_n - 2}{u_n + 3}\right)$$

0.75ن

و منه $\boxed{v_{n+1} = -\dfrac{1}{4} v_n}$ ، إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\dfrac{1}{4}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 3} = \dfrac{1-2}{1+3} = -\dfrac{1}{4}$

0.5ن

2.3 استنتاج نهاية المتتالية (u_n).

من أجل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$ منه $u_n = \dfrac{-3v_n - 2}{v_n - 1}$

0.5ن

بما أن $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-2}{-1}$ أي $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$

0.25ن

التمرين الثالث(4ن)

$A(1;-2;4)$ ، $B(-2;-6;5)$ ، $C(-4;0;-3)$.

1.1 A، B و C ليست على استقامية معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا أي لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\\-7\end{pmatrix}$ و بما أنّ $\dfrac{-7}{1} \neq \dfrac{2}{-4} \neq \dfrac{-5}{-3}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

0.5ن

2.1 $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) معناه $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (-3)(1) + (-4)(-1) + (1)(-1) = 0$ محققة

$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = (-5)(1) + (2)(-1) + (-7)(-1) = 0$ محققة

إذن $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC).

0.5ن

3.1 المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي لـ (ABC) منه : $(ABC) : \;\; x - y - z + d = 0$

$C \in (ABC)$ معناه $-4 + 3 + d = 0$ معناه $d = 1$، و منه $\boxed{(ABC) : \quad x - y - z + 1 = 0}$

0.5ن

1.2 التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل O و يعامد (ABC)

(Δ) الذي يشمل O و يعامد (ABC) معناه (Δ) الذي يشمل O و $\vec{n}$ شعاع توجيه له .

$M(x;y;z) \in (\Delta)$ معناه يوجد $t \in \mathbb{R}$ بحيث: $\overrightarrow{OM} = t\vec{n}$ أي $\boxed{(\Delta)\begin{cases} x = t \\ y = -t\;; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}}$

0.5ن

2.2 احداثيات النقطة O' المسقط العمودي لـ O على المستوي (ABC) معناه $O' \in (\Delta)$ و $O' \in (ABC)$

أي $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \\ x - y - z + 1 = 1 \end{cases}$ منه $t + t + t + 1 = 0$ أي $t = -\dfrac{1}{3}$، إذن $\boxed{O'\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}\right)}$ — 0.5ن

3 H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC)، $t \in \mathbb{R}$: $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$

1.3 إثبات أنّ : $t = \dfrac{\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$

لدينا $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = t\|\overrightarrow{BC}\|^2$ منه $\boxed{t = \dfrac{\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}}$ — 0.5ن

2.3 استنتاج العدد الحقيقي t و احداثيات النقطة H.

$\overrightarrow{BO}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = -4 + 36 + 40 = 72$

و $\|\overrightarrow{BC}\|^2 = BC^2 = 4 + 36 + 64 = 104$ و منه $t = \dfrac{72}{104}$ أي $\boxed{t = \dfrac{9}{13}}$ — 0.5ن

لدينا: $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$ معناه $\begin{cases} x_H = -2 - 2 \times \frac{9}{13} \\ y_H = -6 + 6 \times \frac{9}{13} \\ z_H = 5 - 8 \times \frac{9}{13} \end{cases}$ أي $\begin{cases} x_H = -\frac{44}{13} \\ y_H = -\frac{24}{13} \\ z_H = -\frac{7}{13} \end{cases}$ ، إذن $\boxed{H\left(-\dfrac{44}{13}; -\dfrac{24}{13}; -\dfrac{7}{13}\right)}$ — 0.25ن

التمرين الرابع(8ن)

1.1 $(\mathcal{K})$ هو التمثيل البياني للدالة g' و $(\mathcal{T})$ هو التمثيل البياني للدالة g لأن : — 0.5ن

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↗		↘	

2.1 جدول تغيرات الدالة g على المجال $\left[-\dfrac{3}{2}; 5\right]$: — 0.5ن

x	$-\frac{3}{2}$		-1		1		5
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{4}$

3.1 معامل توجيه المماس لـ $(\mathcal{T})$عند النقطة ذات الفاصلة 0 هو $g'(0)$، بقراءة بيانية نجد $g'(0) = 1$ — 0.25ن

2 $(E) : \quad y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

1.2 اثبات أنّ f_0 حل للمعادلة (E) حيث: $f_0(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ ، $D_f = \mathbb{R}$

f_0 حل للمعادلة (E) معناه $f_0'(x) + f_0(x) = 2(x+1)e^{-x}$

لدينا: $f_0'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x)e^{-x} = (2x + 2 - x^2 - 2x)e^{-x}$ أي $\boxed{f_0'(x) = (-x^2 + 2)e^{-x}}$ ، $x \in \mathbb{R}$ — 0.25ن

$f_0'(x) + f_0(x) = (-x^2+2)e^{-x} + (x^2+2x)e^{-x} = (2x+2)e^{-x}$

أي $\boxed{f_0'(x) + f_0(x) = 2(x+1)e^{-x}}$ ، إذن f_0 حل للمعادلة (E) — 0.5ن

2.2 الحل في $\mathbb{R}$للمعادلة: $(E') : \quad y' + y = 0$

(E') تكافئ $y' = -y$ ، هي من الشكل $y' = ay$، حلها هو $\boxed{y = ce^{-x}}$ حيث c ثابت حقيقي. — 0.5ن

3.2 اثبات أنّ f حل لـ(E)يكافئ $u = f - f_0$ حل لـ (E')

أولا: نفرض أنّ f حل للمعادلة (E) أي $f' + f = 2(x+1)e^{-x}$ و نبرهن أنّ u حل للمعادلة (E')أي $u' + u = 0$

لدينا: $u' + u = (f - f_0)' + (f - f_0) = f' - f_0' + f - f_0 = (f' + f) - (f_0' + f_0)$

و بما أنّ f_0 و f هما حلان للمعادلة (E) فإنّ : $(f' + f) - (f_0' + f_0) = 2(x+1)e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} = 0$

و منه $u' + u = 0$ ، إذن u حل للمعادلة (E').

ثانيا: نفرض أنّ u حل للمعادلة (E') و نبرهن أنّ f حل للمعادلة (E)

لدينا u حل للمعادلة (E') معناه $u' + u = 0$

معناه $(f - f_0)' + (f - f_0) = 0$

منه $f' - f_0' + f - f_0 = 0$

أي $(f' + f) - (f_0' + f_0) = 0$

منه $(f' + f) = (f_0' + f_0)$

و بما أنّ $f_0' + f = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ فإنّ $f' + f = 2(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ و هذا يعني أنّ f حل للمعادلة (E). — 0.5ن

4.2 استنتاج عبارة $f(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$ لما تكون f حلا للمعادلة (E):

f حل للمعادلة (E) معناه $f - f_0$ حل لـ (E') (من **3.2**) أي $f(x) - f_0(x) = c\mathrm{e}^{-x}$

و منه $f(x) = f_0(x) + c\mathrm{e}^{-x}$ أي $\boxed{f(x) = (x^2 + 2x + c)\mathrm{e}^{-x}}$ حيث c ثابت حقيقي. — 0.5ن

5.2 تعيين $g(x)$ من أجل $x \in \mathbb{R}$

من السؤال السابق مجموعة حلول المعادلة (E) على $\mathbb{R}$ هي الدوال المعرفة كما يلي:

$x \longrightarrow (x^2 + 2x + c)\mathrm{e}^{-x}$ ، حيث c ثابت حقيقي.

اذن g حل للمعادلة (E) معناه $g(x) = (x^2 + 2x + c)\mathrm{e}^{-x}$

من التمثيل البياني لدينا: $g(0) = 1$ و منه $c = 1$ و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\boxed{g(x) = (x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}}$ — 0.5ن

6.2 تعيين الحل h للمعادلة (E) الذي تمثيله البياني يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه يساوي 0 أي $h'(0) = 0$

من **5.2** ينتج: $h(x) = (x^2 + 2x + c)\mathrm{e}^{-x}$ ، حيث c ثابت حقيقي.

$x \in \mathbb{R}$ ، $h'(x) = (2x + 2)\mathrm{e}^{-x} - (x^2 + 2x + c)\mathrm{e}^{-x} = (-x^2 + 2 - c)\mathrm{e}^{-x}$

$h'(0) = 0$ معناه $2 - c = 0$ معناه $c = 2$ و منه $\boxed{h(x) = (-x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}}$ — 0.5ن

3 $f(x) = (x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}$ ، $D_f = \mathbb{R}$

1.3 النهايات:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{cases}$$ منه $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$ ،

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases}$$ منه $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ — 0.5ن

2.3 اتجاه التغير: $\boxed{f'(x) = -x^2\mathrm{e}^{-x}}$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) < 0$، منه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

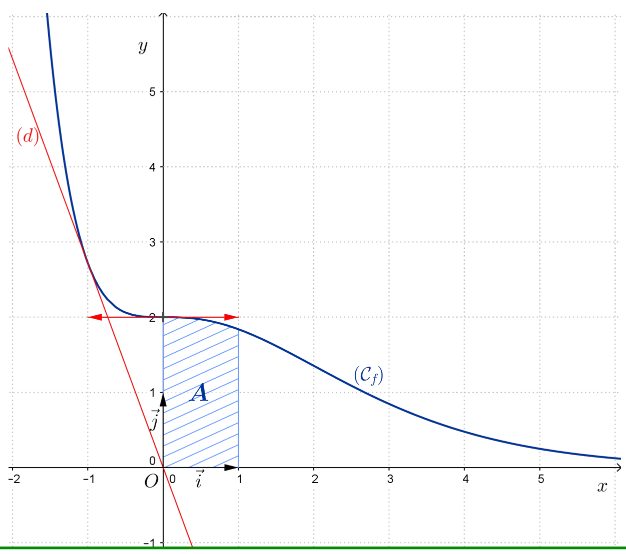
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 2 \searrow$	$-\infty$

— 0.75ن

3.3 **أ** معادلة (d) مماس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0.

(d) : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ منه $\boxed{(d) : \quad y = -\mathrm{e}x}$ — 0.75ن

ب إنشاء (C_f) و (d)



المحور (Ox) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

م مقارب 0.25ن

(d) 0.25ن

(C_f) 0.5ن

4.3 أ تعيين الأعداد الحقيقية a، b و c حتى تكون F دالة أصلية لـ f

معناه $F'(x)=f(x)$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

لدينا: $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$

منه $F'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}=[-ax^2+(2a-b)x+b-c]e^{-x}$

و بالتالي $F'(x)=f(x)$ معناه $-a=1$، $2a-b=2$ و $b-c=2$ أي $\boxed{a=-1}$، $\boxed{b=-4}$ و $\boxed{c=-6}$

و منه $\boxed{F(x)=(-x^2-4x-6)e^{-x}}$

0.5ن

ب مساحة الحيز المحدد بـ (C) و محور التراتيب و محور الفواصل و المستقيم ذي العادلة $x=1$

f موجبة على $[0;1]$، إذن $A=\int_0^1 f(x)dx=[(-x^2-4x-6)e^{-x}]_0^1=(-11e^{-1})-(-6)=(6-11e^{-1})$

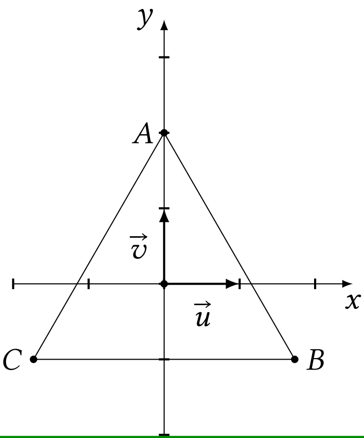
منه $\boxed{A=\frac{24e-44}{e}cm^2}$

0.5ن

الموضوع الثاني

.

التمرين الأول(4ن)



1 $z_A=2i$، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=2ie^{i\theta}$ حيث $\theta\in\mathbb{R}$.

نضع $\theta=\frac{2\pi}{3}$ و منه $z_C=2ie^{i\frac{2\pi}{3}}=2i(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$ أي

$\boxed{z_C=-\sqrt{3}-i}$

1.1 تعليم النقط A، B و C.

0.75ن

2.1 $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-\sqrt{3}-i-2i}{\sqrt{3}-i-2i}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}-3i}$ منه $\boxed{\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

طبيعة المثلث ABC:

$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1$ منه $\frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=1$ و منه $AC=AB$، إذن المثلث ABCمتساوي الساقين.

و بما أنّ $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{3}$ فإن ABC مثلث متقايس الأضلاع .

0.75ن

2 نفرض أنّ $\theta\in]0;2\pi[$

1.2 التحقق أنّ $e^{i\theta}-1=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\begin{aligned} e^{i\theta}-1 &= \cos\theta+i\sin\theta-1\\ &= i\sin\theta+\cos\theta-1\\ &= 2i\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}+1-2\sin^2\tfrac{\theta}{2}\\ &= 2i\sin\tfrac{\theta}{2}\left(\cos\tfrac{\theta}{2}+i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

منه $\boxed{e^{i\theta}-1=2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}$

0.5ن

2.2 استنتاج أنّ $z_A-z_C=4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\begin{aligned} z_A-z_C &= 2i-2ie^{i\theta}\\ &= -\ 2i(e^{i\theta}-1)\\ &= -2i\times 2i\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

منه $\boxed{z_A-z_C=4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$

0.5ن

3.2 تعيين θ حتى يكون ABC مثلث متساوي الساقين في A.

معناه $AB = AC$ أي $\left|4\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}\right| = 2\sqrt{3}$

بما أنّ $\theta \in]0;2\pi[$ فإنّ $\frac{\theta}{2} \in]0;\pi[$ و منه $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

إذن $AB = AC$ معناه $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ معناه $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$ أو $\frac{\theta}{2} = \frac{2\pi}{3}$ معناه $\boxed{\theta = \frac{2\pi}{3}}$ أو $\boxed{\theta = \frac{4\pi}{3}}$

0.5ن

0.5ن

التمرين الثاني(4ن)

1 حساب u_1 و u_2 حيث
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}\ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$u_1 = 5 - \frac{4}{u_0} = 5 - \frac{4}{2}$ أي $\boxed{u_1 = 3}$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{u_1} = 5 - \frac{4}{3}$ أي $\boxed{u_2 = \frac{11}{3}}$

0.5ن

1.2 إثبات أنّ من أجل $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 4$

✦ من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 2$ و $2 \leqslant 2 \leqslant 4$ أي $2 \leqslant u_0 \leqslant 4$ صحيحة

0.25ن

✦ نفرض أنّ $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ من أجل n كيفي و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$

لدينا:
$$\begin{aligned} 2 &\leqslant u_n \leqslant 4 \\ \frac{1}{4} &\leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 &\leqslant \frac{4}{u_n} \leqslant 2 \\ -2 &\leqslant -\frac{4}{u_n} \leqslant -1 \\ 3 &\leqslant 5 - \frac{4}{u_n} \leqslant 4 \\ 2 \leqslant 3 &\leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \end{aligned}$$

0.5ن

إذن $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ صحيحة .

خلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n، $2 \leqslant u_n \leqslant 4$

0.25ن

2.2 إثبات أنّ (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n} = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n} = \frac{(u_n - 1)(4 - u_n)}{u_n}$$

من السؤال السابق ينتج أنّ: $u_n > 0$ ، $4 - u_n \geqslant 0$ و$u_n - 1 > 0$، إذن $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

خلاصة: المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

0.5ن

3.2 لدينا (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$ومحدودة من الأعلى بالعدد 4، إذن فهي متقاربة.

0.25ن

1.3 إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $4 - u_{n+1} \leqslant \frac{4 - u_n}{2}$

$4 - u_{n+1} = 4 - 5 + \frac{4}{u_n} = \frac{4 - u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$، من أجل $n \in \mathbb{N}$

و لدينا $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ و منه $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ أي $\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$

و بما أنّ $n \in \mathbb{N}$: $4 - u_n \geqslant 0$ فإنّ $n \in \mathbb{N}$: $\frac{4 - u_n}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}(4 - u_n)$

أي $\boxed{n \in \mathbb{N} : \quad 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{4 - u_n}{2}}$

0.5ن

2.3 إستنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

لدينا $n \in \mathbb{N}$: $2 \leqslant u_n \leqslant 4$ منه $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 2$ ، إذن $\boxed{n \in \mathbb{R} : \quad 4 - u_n \geqslant 0}$

✦ من أجل $n=0$ ، $4-u_0 = 4-2 = 2$ و $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} = 2$ و بما أن $2 \leqslant 2$ فإن $4-u_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$ صحيحة

✦ نفرض أنّ $4-u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل n كيفي و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $4-u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

من $\boxed{1.3}$ لدينا $4-u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(4-u_n)$

منه، من فرضية التراجع ينتج: $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \geqslant 4-u_{n+1}$ أي $4-u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ و هو المطلوب.

خلاصة: ن أجل كل عدد طبيعي n: $4-u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\boxed{\text{من أجل كل عدد طبيعي } n: \quad 0 \leqslant 4-u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

0.75ن

$\boxed{3.3}$ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

من $\boxed{2.3}$ لدينا $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant 4-u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

و بما أن $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}(4-u_n) = 0$ و منه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

0.5ن

التمرين الثالث(5ن)

$(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل النقطة $B(1,-2,1)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ ، شعاع ناظمي له ، و $(\mathcal{Q}) : x+2y-7=0$ ، منه

$\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ ناظمي لـ $(\mathcal{Q})$

$\boxed{1.1}$ إثبات أنّ $(\mathcal{P})$و $(\mathcal{Q})$متعامدان:

لدينا: $\vec{n}\cdot\vec{n'} = (-2)(1)+(1)(2)+(5)(0) = 0$ منه $(\mathcal{P})$و $(\mathcal{Q})$متعامدان.

0.5ن

$\boxed{2.1}$ إثبات أنّ $(\mathcal{P})\cap(\mathcal{Q}) = (\Delta)$ حيث (Δ) يشمل $C(-1;4;-1)$و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له.

0.25ن

$\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا (لأن $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$متعامدان) ، إذن $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

(Δ) يشمل C معناه $C \in (\mathcal{P})$ و $C \in (\mathcal{Q})$

✦ نعوض احداثيات Cفي معادلة $(\mathcal{Q})$نجد : $-1+2(4)-7=0$ ، منه $C \in (\mathcal{P})$.

0.5ن

✦ $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل النقطة $B(1,-2,1)$ و $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ منه $(\mathcal{P}) : \quad -2x+y+5z-1==0$.

و بتعويض احداثيات Cفي معادلة $(\mathcal{P})$نجد: $-2(-1)+4+5(-1)-1=0$ و منه $C \in (\mathcal{Q})$.

شعاع $\vec{u}$ توجيه لـ (Δ) معناه $\vec{u}.\vec{n}=0$ و $\vec{u}.\vec{n'}=0$

$\vec{u}.\vec{n} = (2)(-2)+(-1)(1)+(1)(5)=0$ ، $\vec{u}.\vec{n'} = (2)(1)+(-1)(2)+(1)(0)=0$

إذن $\vec{u}$ شعاع توجيه لـ (Δ).

0.5ن

$\boxed{3.1}$ حساب المسافة بين النقطة A و المستوي $(\mathcal{P})$و بين A و $(\mathcal{Q})$ حيث $A(5;-2;-1)$

$d(A,(\mathcal{P})) = \frac{|-2(5)-2+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+5^2}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$ ، $d(A,(\mathcal{P})) = \frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

0.5ن

$\boxed{4.1}$ حساب المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

بما أن $(\mathcal{P})$ و $(\mathcal{Q})$متعامدان وفق (Δ)فإن $d^2(A,(\Delta)) = d^2(A,(\mathcal{P}))+d^2(A,(\mathcal{Q})) = \left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 18$

و منه $\boxed{d(A,(\Delta)) = 3\sqrt{2}}$

0.5ن

2 لدينا $M_t(1+2t; 3-t; t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$

M_t هي نقطة متغيرة من المستقيم (Δ)

1.2 $D_f = \mathbb{R}$ ، $AM_t = \sqrt{(1+2t-5)^2 + (3-t+2)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{6(t^2-4t+7)} = f(t)$ — 0.5ن

2.2 اتجاه تغير الدالة f: — 0.25ن

$$f'(t) = \frac{6(2t-4)}{2\sqrt{6(t^2-4t+7)}} = \frac{6(t-2)}{\sqrt{6(t^2-4t+7)}}$$

الدالة f متزايدة تماما على $[2; +\infty[$ و متناقصة تماما على $]-\infty; 2]$ — 0.25ن

$f(2) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$3\sqrt{2}$	$\nearrow$	

إذن القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي $3\sqrt{2}$ و تبلغها من أجل $t = 2$. — 0.25ن

3.2 بما أن M_t نقطة متغيرة من المستقيم (Δ) فإن أصغر مسافة بين A و (Δ) هي $AM_2 = 3\sqrt{2}$ و هذا يتوافق مع النتيجة المحصل عليها في السؤال 4.1. — 0.25ن

التمرين الرابع(7ن)

1 $g(x) = -x^2 + 1 - 2\ln|x|$

1.1 تغيرات الدالة g:

✦ مجموعة التعريف : $D_g = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ — 0.25ن

✦ النهايات: $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ — 0.75ن

✦ المشتقة : $g'(x) = -2x - \frac{2}{x}$ أي $g'(x) = -2\left(x + \frac{2}{x}\right)$ ، $x \in \mathbb{R}^*$ — 0.25ن

✦ اتجاه التغير :

✧ لما $x \in]-\infty; 0[$ ، $g'(x) > 0$ منه الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty; 0[$ — 0.25ن

✧ لما $x \in]0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$ منه الدالة g متناقصة تماما على $]0; +\infty[$

✦ جدول التغيرات: — 0.25ن

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$g'(x)$			$+$	‖		$-$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	0	$-\infty$

2.1 $g(1) = 0$ و $g(-1) = 0$. — 0.5ن

إشارة $g(x)$: — 0.25ن

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

2 $f(x) = -x + 2 + \frac{1 + 2\ln|x|}{x}$ ، $D_f = \mathbb{R}^*$.

1.2 الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ولدينا:

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{2}{x} \times x - 1 - 2\ln|x|}{x^2} = \frac{-x^2 + 2 - 1 - 2\ln|x|}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - 2\ln|x|}{x^2}$$ — 0.25ن

أي $\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$.

2.2 أ تغيرات الدالة f:

✦ مجموعة التعريف: $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ — 0.25ن

✦ النهايات: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$ — 01ن

✦ اتجاه التغير :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب تماما. — 0.25ن

✧ الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1; 0[$ و $]0; 1]$

✧ الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$

ن0.25

✦ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

✦ المستقيمات المقاربة

ن0.5

✧ $x = 0$ مستقيم مقارب لـ (C_f) لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$

✧ $y = -x + 1$: (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ لأنّ :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x) - (-x+2)\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\frac{1+2\ln|x|}{x} = 0$$

✦ وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ): $f(x) - (-x+2) = \dfrac{1+2\ln|x|}{x}$

ن0.5

$1 + 2\ln|x| < 0$ معناه $\ln|x| < -\dfrac{1}{2}$ أي $|x| < e^{-\frac{1}{2}}$ أي $-e^{-\frac{1}{2}} < x < e^{-\frac{1}{2}}$

x	$-\infty$		$-e^{-\frac{1}{2}}$		0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$1+2\ln\|x\|$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-(-x+2)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

✧ على كل من المجالين $]-\infty; -e^{-\frac{1}{2}}[$ و $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$ ، (C_f) تحت (Δ)

✧ على كل من المجالين $]-e^{-\frac{1}{2}}; 0[$ و $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ ، (C_f) فوق (Δ)

✧ (C_f)يقطع(Δ) في نقطتين $A\left(-e^{-\frac{1}{2}}; 2+e^{-\frac{1}{2}}\right)$ و $B\left(e^{-\frac{1}{2}}; 2-e^{-\frac{1}{2}}\right)$

ن0.5

3.2 البرهان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) + f(-x) = 4$

$$f(x) + f(-x) = -x + 2 + \frac{1+2\ln|x|}{x} + x + 2 + \frac{1+2\ln|-x|}{-x} = 4$$

نستنتج أنّ (C_f) يقبل مركز تناظر النقطة $I(0;2)$.

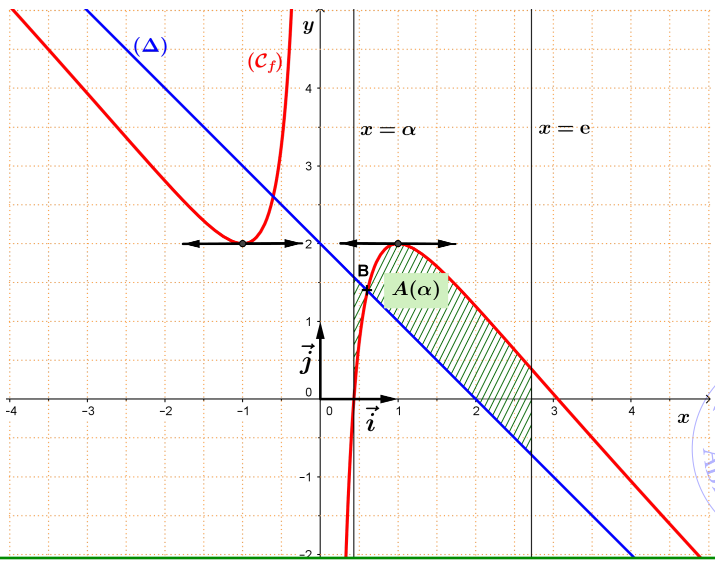
ن0.5

4.2 الاثبات أنّ $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]0.4; 0.5[$

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0.4; 0.5]$ و $f(0.4) \simeq -0.48$ و $f(0.5) \simeq 0.73$، إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0.4; 0.5[$.

ن0.5

5.2 أ إنشاء (Δ) و(C_f)



ب المناقشة البيانية حسب الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $1 - x^2 + x\ln m + 2\ln|x| \cdots (*)$

$(*)$ يكافئ $-x\ln m = -x^2 + 1 + 2\ln|x|$ يكافئ $-\ln m = -x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2\ln|x|}{x}$

و منه $2 - \ln m = -x + 2 + \dfrac{1 + 2\ln|x|}{x}$ أي $2 - \ln m = f(x)$ أي $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2 - \ln m \end{cases}$

معناه حلول المعادلة $(*)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الموازي لمحور الفواصل ، ذي المعادلة $y = 2 - \ln m$ و لدينا:

- ✦ إذا كان $2 - \ln m < 2$ معناه $-\ln m < 0$ معناه $\ln m > 0$ معناه $m > 1$، المعادلة $(*)$ تقبل حلين موجبين.
- ✦ إذا كان $2 - \ln m = 2$ معناه $\ln m = 0$ معناه $m = 1$، المعادلة $(*)$ تقبل حلين مضاعفين $x_1 = 1$ و $x_2 = -1$.
- ✦ إذا كان $2 - \ln m > 2$ معناه $-\ln m > 0$ معناه $\ln m < 0$ معناه $0 < m < 1$، المعادلة $(*)$ تقبل حلين سالبين.

0.5ن

6.2 أ حساب المساحة $A(\alpha)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمان اللذان معادلتيهما $x = \alpha$ و $x = \mathrm{e}$

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \int_{\alpha}^{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}} ((2 - x) - f(x))dx + \int_{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}^{\mathrm{e}} (f(x) - (2 - x))dx \\
&= \int_{\alpha}^{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}} -\frac{1 + 2\ln|x|}{x}dx + \int_{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}^{\mathrm{e}} \frac{1 + 2\ln|x|}{x}dx \\
&= \int_{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}^{\alpha} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln|x|}{x}\right) dx + \int_{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln|x|}{x}\right) dx \\
&= \left[\ln x + (\ln x)^2\right]_{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}^{\alpha} + \left[\ln x + (\ln x)^2\right]_{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}^{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

منه $A(\alpha) = \left(\ln^2\alpha + \ln\alpha + \dfrac{5}{2}\right)\ (4\mathrm{cm}^2)$ أي $\boxed{A(\alpha) = \left(4\ln^2\alpha + 4\ln\alpha + 10\right)\ \mathrm{cm}^2}$

0.5ن

ب اثبات أنّ: $A(\alpha) = \left(\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2 + 9\right)\ \mathrm{cm}^2$

$f(\alpha) = 0$ معناه $2\ln\alpha = \alpha^2 - 2\alpha - 1$

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= (2\ln\alpha)^2 + 2(2\ln\alpha) + 10 \\
&= (\alpha^2 - 2\alpha - 1)^2 + 2(\alpha^2 - 2\alpha - 1) + 10 \\
&= \alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha + 1 + 2\alpha^2 - 4\alpha + 8
\end{aligned}$$

منه $\boxed{A(\alpha) = \left(\alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2 + 9\right)\ \mathrm{cm}^2}$.

0.5ن