وزارة التربية الوطنية ثانوية أحمد الغازي حي 608 مسكن

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبي دورة 2019

الشعبة : علوم تجريبية اختبار في مادة : الرياضيات المدة : 03 سا و 30 د

## على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

## الموضوع الأول:

**التمرين الأول: ( 04 نقط )**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(-2,-1,3\right)$ ، $B\left(1,3,5\right)$ ، $C\left(2,-\frac{1}{2},-4\right)$ ، $E\left(1,-1,2\right)$ و

المستقيم $(\Delta)$ ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

1) أ ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج قيسا بالراديان للزاوية $BAC$ ، ثم استنتج أن النقط $A$ , $B$ و $C$ تعين مستويا .

ب) أوجد العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث يكون الشعاع $\vec{n}\left(\alpha,\beta,1\right)$ ناظميا للمستوي $(ABC)$، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

2) لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$ و $f$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(t\right)=EM$

أ) أكتب $f\left(t\right)$ بدلالة $t$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة $f$.

ب) استنتج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة $EM$ أصغر ما يمكن ؟ استنتج المسافة بين $E$ والمستقيم $(\Delta)$.

ج) استنتج إحداثيات النقطة $H$ المسقط العمودي للنقطة $E$ على المستقيم $(\Delta)$.

3) أ ) أكتب معادلة سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $E$ وتمس المستقيم $(\Delta)$.

بـ ) أدرس الوضع النسبي للمستوي $(ABC)$ و سطح الكرة $(S)$.

**التمرين الثاني: ( 05 نقط )**

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ . نعتبر النقط $A$; $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=i\,z_A$ و $z_C=\overline{z_A}$ . ( $\overline{z_A}$ مرافق $z_A$ ) .

1) أكتب $z_A$ , $z_B$ على الشكل الجبري .

2) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$: $\dfrac{1+i-z}{-1+i-z}=2e^{i\pi}$ ........$(E)$

بـ) استنتج أن النقطة $A$ هي صورة النقطة $B$ بواسطة تشابه مباشر $S$ مركزه النقطة $\Omega$ ذات اللاحقة $z_\Omega$

( حيث $z_\Omega$ هي حل المعادلة $(E)$ ) يطلب تعيين عناصره المميزة وكتابة عبارته المركبة .

3) أ ) أوجد مركز و نصف قطر الدائرة $(\gamma)$ المحيطة بالمثلث $ABC$.

بـ ) بين أن النقطة $H$ ذات اللاحقة $z_H=-1+3i$ هي مركز الدائرة $(\gamma')$ صورة الدائرة $(\gamma)$ بالتحويل $S$ ثم عيّن معادلة ديكارتية للدائرة $(\gamma')$

4) عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

5) أ) عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوى ذات اللاحقة $z$ حيث: $z=z_C-k\dfrac{z_A}{z_C}$ ، $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$

ب) عيّن $(\Gamma')$ مجموعة النقط $M\left(z\right)$ من المستوى حيث: $\arg\left[\left(\dfrac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2k\pi$ , $k\in\mathbb{Z}$ .

## التمرين الثالث: ( 04 نقط)

$(u_n)$ المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=-\frac{5}{4}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=(u_n+2)^2-2$

1) أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $-2 \prec u_n \prec -1$.

ب) بين أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما . جـ) استنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ثم أحسب نهايتها.

2) $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n=\ln(u_n+2)$.

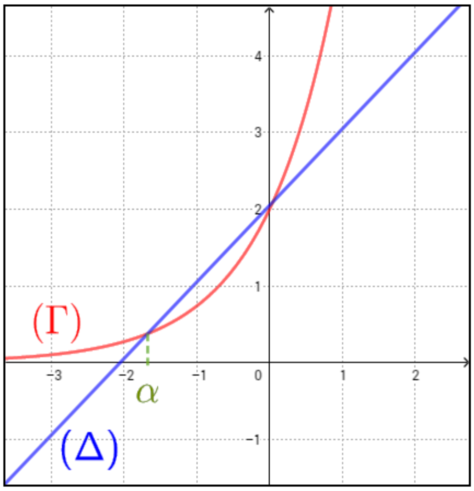
أ) بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول $v_0$ وأساسها $q$ .

ب) أكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$.

3) أ) أحسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

ب) استنتج بدلالة $n$ الجداء $P_n$ حيث: $P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)$ .

## التمرين الرابع: ( 07 نقط)




I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

$(\Gamma)$ التمثيل البياني للدالة: $x\to 2e^x$ ، $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ .

$\alpha$ و $0$ هما فاصلتا نقطتي تقاطع $(\Gamma)$ و $(\Delta)$ حيث $-1.6\prec\alpha\prec-1.5$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى $(\Gamma)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ على $\mathbb{R}$.

2) $g$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=-2e^x+x+2$

حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$.

II) $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

ب) بين أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$ .

جـ) عين دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

د) استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن المستقيم $(D)$ ذا المعادلة: $y=2(ex-3)$ هو مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$ ، أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(D)$ .

ب) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

جـ) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها $\beta$ حيث: $-2.4\prec\beta\prec-2.3$

3) أنشئ كل من $(D)$ ، $(C_f)$. نأخذ $f(-3)\approx-22.31$ ، $f(\alpha)\approx4.15$ .

4) أ) أوجد العددين الحقيقيين $a$ ; $b$ حتى تكون الدالة $x\to(ax+b)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة $x\to(x+3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$.

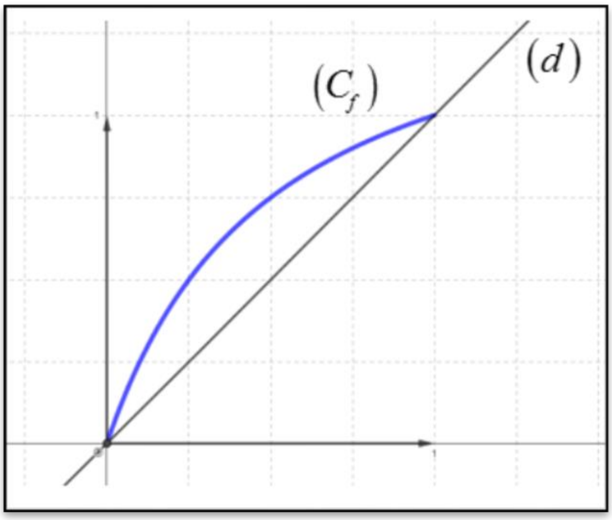
ب) أحسب $I_n$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(D)$ والمستقيمين الذين معادلتيها : $x=1$ ; $x=n$ حيث $n$ عدد طبيعي $(n\succ1)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ .

**انتهى الموضوع الأول**

## الموضوع الثاني:

### التمرين الأول: ( 04 نقط )

الشكل في الورقة المرفقة هو التمثيل البياني $(C_f)$ للدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=\frac{3x}{2x+1}$ و $(d)$ المستقيم ذو المعادلة $y=x$.




1) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ ) مثل على محور الفواصل الحدود $u_3;u_2;u_1;u_0$ للمتتالية $(u_n)$ دون حسابها .مبرزا خطوط التمثيل .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ و تقاربها.

2) أ ) اثبت من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0 \prec u_n \prec 1$

بـ) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ .

3) نعتبر المتتالية $(v_n)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{1-u_n}{2u_n}$.

أ) بين أن المتتالية $(v_n)$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ ، يطلب حساب حدها الأول $v_0$.

بـ) اكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ واستنتج عبارة $u_n$ بدلالة $n$. ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4)احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ والجداء $P_n$ حيث: $S_n=v_0+2v_1+2^2v_2+..+2^n v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$.

### التمرين الثاني: ( 04 نقط )

يحتوي صندوق $U_1$ على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء و كرتين حمراوين . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق ( علما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس ) .

1) أحسب احتمالات الأحداث الآتية : $A$ : " سحب كرتين سوداوين و كرة حمراء ".

$B$ : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " . $C$ : " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل " .

2) أ) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المحصل عليها .

أحسب كلا من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج $P(X=2)$ .

بـ) اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، و يكسب $25\ DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها . هل اللعبة مربحة له ؟

3) نعتبر صندوقا آخر $U_2$ يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق $U_1$ في الصندوق $U_2$ ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من $U_2$ .

أحسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من $U_2$ بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من $U_1$ لها نفس اللون .

### التمرين الثالث: ( 05 نقط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)....\quad z^2+2|z|^2-\frac{3}{4}=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$ .

2) لتكن $A$ , $B$ و $C$ ثلاث نقط من المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{-1}{2}$ ، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$.

أ) أكتب كلا من العددين $z_A+z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي .   بـ) بين أن : $z_A+z_B = z_C{}^{2018}\times(z_A+z_B)^{1439}$ .

3) ليكن $S$ التشابه المباشر الذي مركزه النقطة $A$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$ و نسبته $k=2$ .

أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر $S$.

ب) أوجد لاحقتا النقطتين $B'$ و $C'$ صورتا النقطتين $B$ و $C$ على الترتيب بالتشابه المباشر $S$.

4) بين ان المبدأ $O$ هو مركز ثقل المثلث $ABC$ ثم عين مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$

5) أنشئ النقطة $H$ ذات اللاحقة $z_H$ حيث: $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ دون حساب .

**<u>التمرين الرابع:</u> ( 07 نقط)**

I) $h$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

أدرس اتجاه تغير الدالة $h$ ، استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$: $h(x)>0$ .

II) $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ و المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .   ب) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم : $2x^2f'(x)=-h(x)$

بـ) أدرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ ثم أدرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$ .

3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}^*$: $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

بـ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0.3;0.4[$ .

جـ) استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر $\beta$ يطلب تعيين حصر له .

4) أ) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين $(T_1)$ و $(T_2)$ يوازيان المستقيم $(\Delta)$ يطلب كتابة معادلتيهما .

ب) أنشئ $(\Delta)$، $(T_1)$ ، $(T_2)$ و $(C_f)$ .

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=-\frac{1}{2}x+m$.........$(E)$.

5) لتكن $k$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$ ، $(C_k)$ تمثيلها البياني .

بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى $(C_f)$ إلى المنحنى $(C_k)$ (الإنشاء غير مطلوب ).

6) أ) بين أن الدالة $F$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$ هي دالة أصلية لـ $f$ على $\mathbb{R}^*$.

بـ) أوجد الدالة الأصلية للدالة $f$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.

جـ) $\lambda$ عدد حقيقي حيث: $\lambda\succ 1$. أحسب التكامل التالي: $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda} f(x)dx$ وفسر النتيجة هندسيا . أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} A(\lambda)$ .

## انتهى الموضوع الثاني

**بالتوفيــق ......عن أساتذة المادة ..... رمضان مبارك للجميع ..... العاقبة للنجاح إن شاء الله**

| ثانوية أحمد الغازي<br>حي 608 مسكن<br>المسيلة | تصحيح البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات<br>**الموضوع الأول** | 2019 / 2018<br>الشعبة: ع.تجريبية |
|---|---|---|

**التمرين الأول: ( 04 نقاط)**

**1) أ) حساب الجداء السلمي** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;4;2)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(4;\frac{1}{2};-7\right)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=3\ 4\ +4\left(\frac{1}{2}\right)+2\ -7\ =0$$

**استنتاج قيسا بالراديان للزاوية** $BAC$

بماأن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان

وبالتالي: $BAC=\frac{\pi}{2}$

**استنتاج أن** $A$ , $B$ و $C$ **تعين مستوى:** بماأن $B\hat{A}C\neq 0$ و $B\hat{A}C\neq\pi$ فإن النقاط $A$ , $B$ و $C$ ليست على إستقامة واحدة وبالتالي تعين مستوى .

**ب) تعيين العددين الحقيقين** $\alpha$ و $\beta$ **بحيث يكون** $\vec{n}(\alpha,\beta,1)$ **ناظميا للمستوي** $(ABC)$ **ثم استنتاج معادلة ديكارتية له**

$\vec{n}(\alpha,\beta,1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ يعني $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\text{ يكافيء }\begin{cases}3\alpha+4\beta+2=0...(1)\\ 4\alpha+\frac{1}{2}\beta-7=0...(2)\end{cases}$$

(2) يكافيء $-32\alpha-4\beta+56=0....(3)$ بجمع (1) و (3) طرفا لطرف نجد : $-29\alpha+58=0$

ومنه: $\alpha=2$ ، $\beta=-2$ اذن: $\vec{n}(2,-2,1)$

ا **استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي** $(ABC)$ :

$A\in(ABC)$ معناه $2(-2)-2(-1)+3+d=0$ ومنه: $d=-1$

اذن: $(ABC):2x-2y+z-1=0$

**2)أ) كتابة** $f(t)$ **بدلالة** $t$ **ودراسة إتجاه تغير الدالة** $f$:

**لدينا:** $(\Delta):\begin{cases}x=1-t\\y=1-t\ ;t\in\mathbb{R}\\z=1+t\end{cases}$ ، $E(1;-1;2)$

$$f(t)=EM=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{3t^2-6t+5}$$

$f'(t)=\frac{3t-3}{\sqrt{3t^2-6t+5}}$ ، $f'(t)=0$ يكافئ $t=1$ ، $f(1)=\sqrt{2}$

الدالة $f$ متناقصة تماما على $[0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$

**ب) استنتاج قيمة العدد الحقيقي** $t$ **التي تكون من أجلها المسافة** $EM$ **أصغر مايمكن ؟**

الدالة $f$ تقبل قيمة حدية صغرى عند $t=1$ هي: $\sqrt{2}$

ومنه أصغر قيمة للمسافة $EM$ هي $\sqrt{2}$

**استنتاج المسافة بين** $E$ **والمستقيم** $(\Delta)$: $d(E;(\Delta))=\sqrt{2}$

**ج)استنتاج إحداثيات** $H$ **المسقط العمودي** $E$ **على** $(\Delta)$: نعوض $t=1$ في عبارة التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ نجد $H(0;0;2)$

**3) أ) كتابة معادلة سطح الكرة** $(S)$ **التي مركزها** $E$ **وتمس المستقيم** $(\Delta)$ لدينا $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=R^2$

$R=d(E;(\Delta))=\sqrt{2}$ ومنه: $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2$

**ب) دراسة الوضع النسبي للمستوي** $(ABC)$ **و سطح الكرة** $(S)$:

$$d(E,(ABC))=\frac{|2(1)-2(-1)+2-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{3}\approx1.66$$

بمـا أن $d(E,(ABC))\succ R\approx1.41$ فإن $(S)\cap(ABC)=\phi$

**التمرين الثاني: ( 05 نقاط)**

**1)كتابة** $z_A$ , $z_B$ **على الشكل الجبري:** $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=iz_A$

$z_A=1+i$ , $z_B=-1+i$

**2)أ) نحل في** $\mathbb{C}$ **المعادلة** $(E)$ **ذات المجهول** $z$ :

$(E)$ يكافئ $\frac{1+i-z}{-1+i-z}=2(-1)$ يكافئ $3z=-1+3i$

ومنه: $z=\frac{-1}{3}+i$ اذن: $S=\left\{\frac{-1}{3}+i\right\}$

**استنتاج أن** $A$ **هي صورة** $B$ **بواسطة تشابه مباشر** $S$ **مركزه النقطة** $\Omega$ **لاحقتها** $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$ : من $(E)$ نستنتج $\frac{z_A-z_\Omega}{z_B-z_\Omega}=2e^{i\pi}$

ومنه: $z_A=2e^{i\pi}z_B+(1-2e^{i\pi})z_\Omega$ العبارة من الشكل $z'=ke^{i\theta}z+(1-ke^{i\theta})z_\Omega$ معناه $S(B)=A$ حيث $S$ تشابه مباشر نسبته $k=2$ وزاويته $\theta=\pi$ ومركزه النقطة الصامدة $\Omega$ لاحقتها $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$ . عبارته المركبة : $z'=-2z-1+3i$

**حالة خاصة:** $S$ هو تحاك مركزه النقطة $\Omega$ ونسبته $K=-2$

**3) أ) إيجاد مركز و نصف قطر الدائرة** $(\gamma)$ **المحيطة بالمثلث** $ABC$: بما أن $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$

فإن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ و $AB=AC=2$ اذن المثلث $ABC$ قائم في $A$ ومتقايس الضلعين.مركز الدائرة $(\gamma)$ هو منتصف الوتر $[BC]$ هو المبدأ $O$ لأن $\frac{z_B+z_C}{2}=0$ و نصف قطرها $r=\frac{BC}{2}=\sqrt{2}$

بماأن: $-2\prec u_n\prec-1$ فإن $u_n+1\prec0;u_n+2\succ0$

ب) نبين أن النقطة $H$ ذات اللاحقة $z_H=-1+3i$ هي مركز الدائرة $(\gamma')$ صورة الدائرة $(\gamma)$ بالتحويل $S$ ثم تعيّن معادلة ديكارتية للدائرة $(\gamma')$ لدينا: $(\gamma')$ نصف قطرها $r'=2\sqrt{2}$

ومركزها $H$ حيث $S(O)=H$ أي: $z_H=-2z_O-1+3i$

ومنه: $z_H=-1+3i$ ، $(\gamma'):(x+1)^2+(y-3)^2=8$

4) تعيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا: $\frac{z_A}{z_C}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=e^{in\frac{\pi}{2}}$ عدد حقيقي موجب يكافئ $\frac{n\pi}{2}=2k\pi$

ومنه: $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

5) أ) تعيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}$ ، $k$ يمسح $\mathbb{R}^+$ :

$$z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}=1-i-k\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=1-i+k\left(-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=1-i+ke^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=1-i+ke^{i\frac{3\pi}{2}}$$

ومنه: $(\Gamma)$ هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة $C$ موازي لحامل محور التراتيب شعاع توجيهه لاحقته $e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$ .

ب) تعيّن $(\Gamma')$ مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$\arg\left[\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=\pi+2k\pi$ ....(1)، $k\in\mathbb{Z}$ (1) يكافئ

$2\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\pi+2k\pi$ يكافئ $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

ومنه: $(\Gamma')$ هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطتين $A;B$

## التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) نبين بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ : $-2\prec U_n\prec-1$

لتكن الخاصية $P(n)$ : $n\in\mathbb{N}$ : $-2\prec U_n\prec-1$

① من أجل $n=0$ : $-2\prec U_0\prec-1$ محققة لأن $U_0=\frac{-5}{4}$

ومنه: $P(0)$ صحيحة .

② نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-2\prec U_{n+1}\prec-1$ أي نبين: $-2\prec(U_n+2)^2-2\prec-1$

$-2\prec U_n\prec-1$ يكافئ $0\prec U_n+2\prec1$ يكافئ

$-2\prec(U_n+2)^2-2\prec-1$ ومنه: $-2\prec U_{n+1}\prec-1$

اذن $P(n+1)$ صحيحة . من ① و ② حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n$

ب) نبين أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما: ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n=u_n^2+3u_n+2=(u_n+1)(u_n+2)$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\prec0$ نستنتج ان $(u_n)$ متناقصة تماما

ج) استنتاج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة ثم حساب نهايتها:

بما أن المتتالية $(u_n)$ متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $-2$ فهي متقاربة نحو عدد حقيقي $l$ .

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(u_n+2)^2-2\right]$ يكافئ $l=(l+2)^2-2$ نجد:

$l^2+3l+2=0$، $\Delta=1$، $l=-2$ مقبول أو $l=-1$ مرفوض لأنها متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بـ$-2$ اذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$

2) أ) نبين أن $(v_n)$ متتالية هندسية يطلب حدها الاول $v_0$ وأساسها $q$: $(v_n)$ م.هـ تكافئ من اجل كل عدد طبيعي $n$ يوجد $q\in\mathbb{R}$ حيث $v_{n+1}=q.v_n$ ، لدينا:

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}+2)=\ln(u_n+2)^2=2\ln(u_n+2)$$

ومنه: $v_{n+1}=2v_n$ . إذن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول $v_0=\ln(u_0+2)=\ln\frac{3}{4}$

ب) كتابة عبارة $v_n$ بدلالة $n$ ثم استنتاج عبارة $u_n$ بدلالة $n$:

$v_n=v_0q^n=\left(\ln\frac{3}{4}\right)\times2^n$ و $v_n=\ln(u_n+2)$ يكافئ $e^{v_n}=u_n+2$

ومنه: $u_n=e^{v_n}-2=e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)2^n}-2$

3) أ) حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

$$S_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=\ln\left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]=\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})$$

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})=-\infty$

ب) استنتاج بدلالة $n$ الجداء $P_n$: لدينا $u_n=e^{u_n}-2$

ومنه: $u_n+2=e^{v_n}$ ، $P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)$

$$P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times.....\times e^{v_n}$$

$$=e^{v_0+v_1+...+v_n}=e^{S_n}=e^{\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})}$$

## التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) $g(x)=-2e^x+x+2$ ، $(\Delta):y=x+2$ ، $(\Gamma):y=2e^x$

1) بقراءة بيانية تحدد وضعية $(\Gamma)$ بالنسبة لـ$(\Delta)$ على $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الوضعية | | فوق | $(\Gamma)\cap(\Delta)=\{E'(\alpha,2e^{\alpha})\}$ | تحت | $(\Gamma)\cap(\Delta)=\{E(0,2)\}$ | فوق | |

2) تحديد إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ :لدينا

$$g(x)=-2e^x+x+2=-(2e^x-(x+2))$$

إشارة $g(x)$ تتعلق بوضعية $(\Gamma)$ بالنسبة لـ$(\Delta)$ على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

بما أن $f$ معرفة ومستمرة ورتيبة تماما(متزايدة تماما) على

$II)$ $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$ **1) أ)حساب:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{0}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{-\infty}\right]=-\infty$$

**ب)نبين أن من أجل كل** $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة $f'$ :

$$f'(x)=2e+(-x-2)e^{-x+1}=-(2e^{x}+x+2)e^{-x+1}$$

$$=-g(x)e^{-x+1}$$

**ج) تعيين دون حساب:** لدينا $f'(\alpha)=-g(\alpha)e^{-\alpha+1}=0$

ومنه: $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)=0$

**تفسير النتيجة هندسيا:**المنحنى $(C_f)$ يقبل في النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ مماسا أفقيا معادلته: $y=f(\alpha)$

**د) استنتاج اتجاه تغير الدالة** $f$ **ثم تشكيل جدول تغيراتها:**

لدينا $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$ ومنه شارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ لأن: $e^{-x+1}\succ 0$.

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

الدالة $f$ متناقصة تماما على $[\alpha;0]$ ومتزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\alpha]$ و $[0;+\infty[$

| $x$ | $-\infty$ | $B$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $2.15$ | ↗ | $+\infty$ |

**2)أ) نبين أن** $(D):y=2(ex-3)$ **مستقيم مقارب لـ** $(C_f)$ **عند** $+\infty$: لدينا

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{0}\right]=0$$

ومنه: $(D):y=2(ex-3)$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$ عند $+\infty$

****دراسة وضعية المنحنى** $(C_f)$ **بالنسبة للمستقيم** $(D)$:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=(x+3)e^{-x+1}$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الوضعية | تحت | $(C_f)\cap(D)=\{F(-3;-22.31)\}$ | فوق |

**ب) نبين أن المنحنى** $(C_f)$ **يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها**

$f$ قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ : $f''(x)=(x+1)e^{-x+1}$

$f''(x)$ انعدمت مغيرة إشارتها عند $-1$ ومنه: $\omega(-1;3.34)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**ج) نبين أن المنحنى** $(C_f)$ **يقطع محور الفواصل في نقطه واحدة فاصلها** $\beta$ **حيث:** $-2.4\prec\beta\prec-2.3$ ،

لدينا: $f(-2.3)\approx 0.47$ ، $f(-2.4)\approx -1.07$

و $f(-2.4).f(-2.3)\prec 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها $\beta$ حيث $f(\beta)=0$ ، $]-2.4;-2.3[$

**3) إنشاء كل من** $(D)$ ، $(C_f)$ :

$(C_f)$

$f(-3)\approx-22.31$ ، $f(\alpha)\approx 4.15$

**4) أ) إيجاد** $a;b$ **حتى تكون الدالة**

$x\to(ax+b)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة:

$x\to(x+3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$ ، لتكن

$F(x)=(ax+b)e^{-x+1}$ ، $k(x)=(x+3)e^{-x+1}$

$F$ دالة اصلية للدالة $k$ على $\mathbb{R}$ معناه $F$

قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $F'(x)=g(x)$

لدينا : $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$F'(x)=(-ax+a-b)e^{-x+1}$$

بالمطابقة نجد:

$$-a=1;a-b=3$$

ومنه: $a=-1;b=4$

$$F(x)=(-x+4)e^{-x+1}$$

**ب)حساب** $I_n$ **مساحة الحيز المستوى المحدد بـ** $(C_f)$ **و** $(D)$ **والمستقيمين الذين معادلتيهما:** $x=n\ ;x=1\ (n\succ 1)$

$$I_n=\int_1^n\left[f(x)-y\right]dx=\int_1^n(x+3)e^{-x+1}dx$$

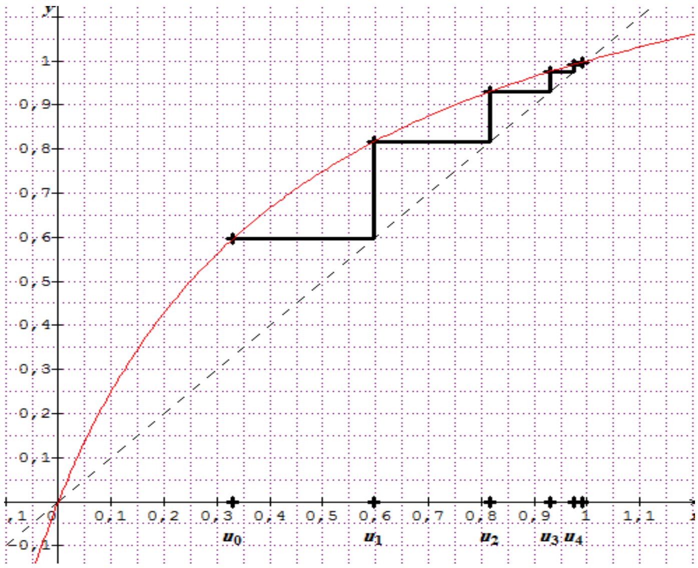
$$=\left[(-x-4)e^{-x+1}\right]_1^n=-(n+4)e^{-n+1}+5\,(u.a)$$

**حساب:** $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-(n+4)e^{-n+1}+5\right]=5$

## تصحيح الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

**1)أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$:**




**ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير $(u_n)$ و تقاربها:**

المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما ومتقاربة

**2)أ) اثبات من أجل كل عدد طبيعي $n$:** $0<u_n<1$

نبرهن بالبرهان بالتراجع

① من أجل $n=0$: $0<u_0<1$ محققة لان: $u_0=\frac{1}{3}$

② نفرض أن من أجل عدد طبيعي $n$: $0<u_n<1$ صحيحة

ونبرهن ان : $0<u_{n+1}<1$

لدينا: $0<u_n<1$ و $f(0)=0\ ;\ f(1)=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

بما أن $f$ متزايدة تماما على $[0;1]$ فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$

ومنه : $0<u_{n+1}<1$ .

من ① و ② نستنتج حسب البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $0<u_n<1$

**ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ واستنتاج أنها متقاربة**

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{-2u_n^2+2u_n}{2u_n+1}=\frac{-2u_n(u_n-1)}{2u_n+1}$

بما أن: $0<u_n<1$ فإن $u_n-1<0$ ، ومنه: $u_{n+1}-u_n>0$

نستنتج أن $(u_n)$ متزايدة تماما ومتقاربة نحو عدد حقيقي $\ell$

لأنها: محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما.

**حساب** $\lim_{n\to+\infty} u_n$ :

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3u_n}{2u_n+1}$ يكافئ $\ell=\frac{3\ell}{2\ell+1}$ يكافئ $\frac{-2\ell(\ell-1)}{2\ell+1}=0$

ومنه $\ell=0$ (مرفوض) أو $\ell=1$ (مقبول محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما ) ، ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$

**3) أ) نبين أن $(v_n)$ متتالية هندسية :**

لدينا:

$$v_{n+1}=\frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}}=\frac{1-\frac{3u_n}{2u_n+1}}{2\left(\frac{3u_n}{2u_n+1}\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1-u_n}{2u_n}\right)=\frac{1}{3}v_n$$ ومنه

$(v_n)$ م.هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1-u_0}{2u_0}=1$

**ب)كتابة $v_n$ بدلالة $n$ واستنتاج $u_n$ بدلالة $n$:** $v_n=v_0q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $u_n=\frac{1}{2v_n+1}$ ومنه $u_n=\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$ ، $\lim_{n\to+\infty} u_n=1$

**ج- حساب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ و الجداء $P_n$ :**

$$S_n=v_0+2v_1+2^2v_2+\ldots+2^nv_n$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

هو مجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

وأساسها $\frac{2}{3}$ ومنه: $S_n=1\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]=3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots\times v_n$$

$$=v_0\times(v_0q)\times(v_0q^2)\times\ldots\times(v_0q^n)$$

$$=(v_0)^{n+1}\times q^{0+1+2+\ldots+n}=(1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

عدد الحالات الممكنة : $C_9^3=84$

**1) حساب احتمال الأحداث:**

$p(A)=\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}\approx0.07$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}\approx0.06$

الحدث $C$ : سحب كرة بيضاء على الأقل

الحدث $\overline{C}$ : عدم سحب كرة بيضاء

**ط1:** $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx0.88$

**ط2:** $p(C)=\frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3\times C_5^0}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx0.88$

**2)أ) حساب $p(X=1)$ و $p(X=3)$ ثم استنتاج $p(X=1)$**

قيم المتغير العشوائي $X$ هي : $1;2;3$

$X=1$: " سحب 3 كرات بلون واحد "

$p(X=1)=p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

$X=3$: " سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة "

$p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}$

$X=2$: " سحب 3 كرات بلونين مختلفين "

$(R;R;\bar{R})$ أو $(N;N;\bar{N})$ أو $(B;B;\bar{B})$

**ط1**: $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$

**ط2**: $p(X=2)=1-[p(X=3)+p(X=1)]=\frac{55}{84}$

**ب)** ليكن $Y$ متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه: $-25;0;+25$،

$E(Y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)=\frac{475}{84}\approx 5.65$

بما أن: $E(Y)\succ 0$ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب

**3) حساب احتمال ان تكون الكرتان من $U_2$ بيضاوين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:**

ليكن الحدث $F$: سحب كرتان من $U_2$ بيضاوين

لدينا: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

$p(B\cap F)=\frac{C_4^3}{84}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{84}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{41}{1260}$

ومنه: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}=\frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}\approx 0.55$

**التمرين الثالث: (05 نقاط)**

**1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة** $(E)$: $z^2+2|z|^2-\frac{3}{4}=0$:

عددان حقيقيان $x;y$ حيث: $z=x+iy$ ليكن

$(E)$ تكافئ $(x+iy)^2+2(x^2+y^2)-\frac{3}{4}=0$ تكافئ

$3x^2+y^2-\frac{3}{4}+2xyi=0$ تكافئ $\begin{cases}3x^2+y^2-\frac{3}{4}=0...(1)\\ 2xy=0 \quad ...(2)\end{cases}$

$(2)$ تكافئ $x=0$ أو $y=0$ ثم بالتعويض في المعادلة $(1)$

من أجل: $x=0$ يكون: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل: $y=0$ يكون: $x=\frac{1}{2}$ أو $y=-\frac{1}{2}$

ومنه: $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

**2)أ) كتابة كلا من العددين $z_A+z_B$ و $z_C$ على الشكل الأسي**

$z_A+z_B=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، $z_C=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$

**ب) نبين أن**: $z_C^{2018}.(z_A+z_B)^{1439}=z_A+z_B$

$z_C^{2018}.(z_A+z_B)^{1439}=\left(-(z_A+z_B)\right)^{2018}(z_A+z_B)^{1439}$

$=(z_A+z_B)^{3457}=e^{i\left(\frac{2\times3457\pi}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{6912+2\pi}{3}\right)}=e^{i\left(2304+\frac{2\pi}{3}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=z_A+z_B$

**3)أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر** $S\left(A;2;\frac{\pi}{2}\right)$:

$z'-z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ ومنه: $z'=2iz-\frac{1}{2}+i$

**ب)إيجاد لاحقتا النقطتين $B'$ و $C'$ صورتا النقطتين $B$ و $C$ على الترتيب بالتشابه المباشر** $S$:

$z_{B'}=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i$ ، $z_{C'}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}+2i$

**4)نبين ان المبدأ $O$ هو مركز ثقل المثلث** $ABC$: لاحقة مركز ثقل المثلث $ABC$ هي: $\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=0=z_O$

**نعين $(\mu)$ مجموعة النقط $M$ من المستوى التي تحقق** :

$\left(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right)\left(\vec{MA}-\vec{MB}\right)=0$،

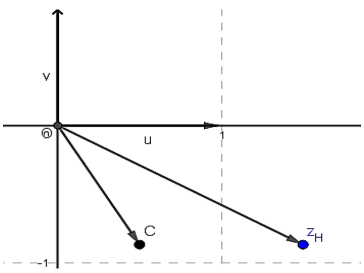
$M\in(\mu)$ معناه $3\vec{MO}\left(\vec{MA}-\left(\vec{MA}+\vec{AB}\right)\right)=0$

معناه $\vec{OM}.\vec{AB}=0$

ومنه: $(\mu)$ هي مستقيم يشمل المبدأ وشعاع الناظمي

لاحقته: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ معادلته $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

**4)إنشاء النقطة $H$ ذات اللاحقة** $z_H=1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ **دون حساب:**



لدينا:لاحقة الشعاع $\vec{u}$ هي 1،

لاحقة الشعاع $\vec{OC}$ هي $e^{i\frac{-\pi}{3}}$

ومنه: $\vec{OH}=\vec{u}+\vec{OC}$،

الشعاع $\vec{OH}$ هو محصلة الشعاعين $\vec{OC}$ و $\vec{u}$

**التمرين الرابع: ( 07 نقاط)**

I) $h$ الدالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x)=x^2-\ln x^2$

**دراسة اتجاه تغير الدالة $h$**: $h$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث

$h'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $x$ | | − | | − | ‖ | + | | + | |
| $h'(x)$ | | − | 0 | + | ‖ | − | 0 | + | |

الدالة $h$ متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجالين $[-1;0[$ ، $[1;+\infty[$

لدينا: $\lim\limits_{|x|\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=+\infty$ و $h(-1)=h(1)=1$

اذن: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $h(x)\succ 0$

II) $f$ معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

**1)أ) حساب:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{2\ln|x|}{x}\right)^{\nearrow 0}-x^{\nearrow+\infty}-\left(\frac{2}{x}\right)^{\nearrow 0}\right)=-\infty$$

و $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\ln|x|}{-x}\right)^{\nearrow 0}-x^{\nearrow-\infty}-\left(\frac{2}{x}\right)^{\nearrow 0}\right)=+\infty$$

**ب)حساب:** $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow+\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=+\infty$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{< \\ x\to 0}}\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow-\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=-\infty$$

**تفسّير النتيجة بيانيا:** $(C_f)$يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

**2)أ)نبين أنه من أجل كل** $x\in\mathbb{R}^*$ : $2x^2f'(x)=-h(x)$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;+\infty[$ ، $]-\infty;0[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{\frac{2x.x}{x^2}-1.\ln(x^2)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right]=\frac{-2+\ln(x^2)-x^2+2}{2x^2}$$

ومنه: $2x^2f'(x)=-\left(x^2-\ln(x^2)\right)=-h(x)$ : $f'(x)=\frac{-h(x)}{2x^2}$

**ب) دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ ثم تشكيل جدول تغيراتها :**

من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$ : $f'(x)\prec 0$ ومنه:

الدالة $f$ متناقصة تماما على المجالين $]0;+\infty[$ ، $]-\infty;0[$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $B$ | $0$ | $\alpha$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | ‖ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $3/2$ ↘ | $0$ ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘ | $0$ ↘ | $-3/2$ ↘ | $-\infty$ |

**ج) نبين أن $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$ :**

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{2\ln|x|}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب لـ $(C_f)$

**دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة لـ$(\Delta)$**: ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x^2-2}{x}\right]$$

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$ يكافئ $-\ln x^2-2=0$ و $x\neq 0$

يكافئ $\ln x^2=-2$ يكافئ $x^2=e^{-2}$ يكافئ $x=\frac{1}{e}$ أو $x=-\frac{1}{e}$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{e}\approx-0.37$ | | $0$ | | $\frac{1}{e}\approx 0.37$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\ln x^2-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضعية | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{-1}{e};0.18\right)\right\}$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ | ‖ | $(C_f)$ فوق $(\Delta)$ | $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{1}{e};-0.18\right)\right\}$ | $(C_f)$ تحت $(\Delta)$ |

**3) أ) التحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم :**

$-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$ :

إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $-x\in\mathbb{R}^*$ و

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+x-\frac{2}{-x}\right)=0$$

نستنتج أن الدالة $f$ فردية .

**تفسيرالنتيجة بيانيا**: النقطة $O$ مركز تناظر للمنحنى $(C_f)$.

**ب)نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال** $]0.3;0.4[$: لدينا الدالة $f$ معرفة ومستمرة (قابلة للإشتقاق)و رتيبة تماما (متناقصة تماما )على المجال $]0.3;0.4[$

و $f(0.4)\times f(0.3)\prec 0$ ، $f(0.3)\approx 0.53$ ; $f(0.4)\approx-0.41$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]0.3;0.4[$ حيث $f(\alpha)=0$

**استنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا آخر $\beta$ يطلب تعيين حصرا له:** بما أن النقطة $O$مركز تناظر لـ$(C_f)$و المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]0.3;0.4[$ فإن$(C_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\alpha$ ويقطعه كذلك في نظيرتها فاصلتها $\beta$ بالنسبة للنقطة $O$ حيث $0.3\prec\alpha\prec 0.4$ و عليه يكون $-0.4\prec\beta\prec-0.3$

**4) أ) نبين أن المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين $(T_1)$ و$(T_2)$ يوازيان المستقيم $(\Delta)$ يطلب كتابة معادلتيهما:** $f'(x_0)=\frac{-1}{2}$

$\frac{-(x_0{}^2-\ln(x_0{}^2))}{2x_0{}^2}=\frac{-1}{2}$ يكافئ $\ln(x_0{}^2)=0$ ومنه: $x_0=1$ أو $x_0=-1$

ومنه: $(T_1): y=\frac{-1}{2}x+1$ ، $(T_2): y=\frac{-1}{2}x-1$

**ب)إنشاء** $(\Delta)$ ، $(T_1)$ ، $(T_2)$ و $(C_f)$ :

**ج) مناقشة بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد و إشارةحلول المعادلة $(E)$:** هي تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta_m)$ حيث: $(\Delta_m): y=-\frac{1}{2}x+m$



| | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد و | حــل | حـــل | حليـن | حليـن | حـــل | حـــل | حــل |

**5)نبين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول** $(C_f)$ **إلى** $(C_k)$

$D_k=\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$

بما أن: $k(x)=f(x+1)+2$ فإن $(C_k)$ هو صورة $(C_f)$ بانسحاب شعاعه : $\vec{V}=-\vec{i}+2\vec{j}$

**6) أ) نبين ان الدالة** $F$ **هي دالة أصلية للدالة** $f$ **على** $\mathbb{R}^*$

لدينا: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$

تكون $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$ إذا كانت الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $F'(x)=f(x)$

لدينا: الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{4}.2\ln(x^2).\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{\ln(x^2)}{x}-\frac{2}{x}\right)=f(x)$$

ومنه: $F$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$

**ب)إيجاد الدالة الاصلية للدالة** $f$ **والتي تنعدم من أجل** $x=1$:

بما أن الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$ فإنها تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}^*$ من الشكل: $x\to F(x)+c$ حيث $c$ ثابت حقيقي.

$F(1)+c=0$ يكافئ $c=\frac{1}{4}$ ومنه الدالة الاصلية للدالة $f$ والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدالة:

$$x\to\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)+\frac{1}{4}$$

**ج) حساب التكامل:** $A(\lambda)=-\int_1^{\lambda}f(x)dx$ حيث $\lambda\succ1$

$$A(\lambda)=-\int_1^{\lambda}f(x)dx=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)\right]_1^{\lambda}$$

$$=\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln(\lambda^2)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\quad(u.a)$$

**تفسيرالنتيجة هندسيا:** $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1\,;x=\lambda\,;y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\lambda^2+\frac{1}{8}\left[\ln(\lambda^2)\right]^2+\ln\lambda-\frac{1}{4}\right)=+\infty$$

بالتوفيق في البكالوريا