الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الأغواط — ثانويات الأغواط المقاطعة – 01-

بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — دورة : مـــــــاي 2019

الشعبة : رياضيـــــــــات

إختبار في مادة الرياضيات — المدة : 4 ساعـــات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

تمرين 01 : (03.5نقاط) نعتبر المتتالية (Z_n) للأعداد المركبة المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases}$$

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

نضع M_n النقطة ذات اللاحقة z_n . نعتبر العدد المركب $z_A = 4 + 2i$ و النقطة A ذات اللاحقة z_A

1) لتكن (U_n) المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = z_n - z_A$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$

ب)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i)$

3)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، النقط M_{n+4} و M_n ، A على إستقامية

التمرين 02 : (04.5نقاط) الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر مجموعتي النقط (E) و (F) المعرفتين كالتالي:

$$(E) = \left\{ M(x, y, z) / (x + y + z + 1)^2 + (x - y + 2)^2 = 0 \right\}$$

$$\left(F\right)=\left\{M\left(x,y,z\right)/\left(x+y+z+1\right)^2-\left(x-y+2\right)^2=0\right\}$$

1. بين أن $\left(E\right)$ هي مستقيم يطلب تعيين شعاع توجيه له
2. بين أن $\left(F\right)$ هي إتحاد مستويين $\left(P_1\right)$ و $\left(P_2\right)$ يطلب إعطاء معادلتيهما ثم تحقق أن $\left(P_1\right)\cap\left(P_2\right)=\left(E\right)$
3. نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي $\left(P_m\right)$ المعرف بالمعادلة الديكارتية :

$$\left(P_m\right):(1+m)x+(m-3)y+(m-1)z+m-3=0$$

أ. تحقق أن $\left(P_m\right)$ يحوي $\left(E\right)$

ب. هل كل مستو يحوي $\left(E\right)$ هو المستوي $\left(P_m\right)$ ؟ برر

<u>التمرين 03 (05نقاط)</u> نعتبرفي المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\left(E\right)$ ذات المجهول $\left(x;y\right)$ حيث : $4x-9y=5$

1) أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $\left(x;y\right)$ حلا للمعادلة $\left(E\right)$ فإن : $x\equiv 8[9]$ ، ثم إستنتج حلول المعادلة $\left(E\right)$

ب) α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي اساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي أساسه y حيث : $x\le 35$ و $y\le 15$

- ❖ عين القيم الممكنة لـ x و y ثم أكتب α في النظام العشري

2) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 4^n على 9

ب) عين الثنائيات $\left(x;y\right)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة $\left(E\right)$ حيث : $2011^x+4^y+7\equiv 0[9]$

3) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر حيث n عدد طبيعي

أ) ما هي القيم الممكنة لـ d

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$

أ) بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كلا من A و B

ب) إستنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

<u>التمرين الرابع</u> (07 نقاط) الجزء $(I$ ليكن k عدد حقيقي موجب تماما

1) الدالة g_k معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_k(x)=1+(1+k(x+1))e^{kx+k}$

أ) أحسب الدالة المشتقة g'_k ثم إستنتج إشارة $g'_k(x)$ من أجل x من $\mathbb{R}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم إستنتج أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $g_k(x) > 0$ (لاحظ أن من أجل x من $\mathbb{R}$: $e^x > x$)

2) الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = x + (x+1)e^{kx+k}$

(C_k) منحني دالة f_k في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

❖ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها

❖ بين أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f'_k(x) = g_k(x)$

الجزء II): بوضع $k = 1$:

أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty} f_1(x)$

ب) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_1) بجوار $-\infty$

ج)أدرس إتجاه تغير الدالة f_1 على $\mathbb{R}$ و إستنتج جدول تغيراتها

د) عين معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_1) عند النقطة التي فاصلتها -1

4) بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 \le \alpha \le 0$

5)أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f_1(x-1) + f_{-1}(-x-1) = -2$. ماذا تستنتج بالنسة لـ (C_1) و (C_{-1}) ؟

ب)أرسم المنحني (C_1) . و إستنتج على نفس المعلم المنحني (C_{-1})

الجزء III) : λ عدد حقيقي أقل تماما من 1 . نعتبر التكامل التالي : $I_k = \int_{\lambda-1}^{-1} -(x+1)e^{kx+k}dx$

1) هل العدد I_k يمثل مساحة ؟ برر

2) بإستعمال التكامل بالتجزئة ، أحسب I_1 ثم إستنتج $\lim_{\lambda\to-\infty} I_1$. فسر هذه النتيجة

إنتهى الموضوع الأول .

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\ \in (x;y)$ المعرفة بـ : $2019x-2018y=1-\lambda$

بحيث $\lambda\in\mathbb{Z}$

أ) عين قيم λ التي من اجلها تقبل المعادلة (E) حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب)بين ان الثنائية $(1-\lambda;1-\lambda)$ حل خاص للمعادلة (E)

ت)حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ث)نعتبر في $\mathbb{Z}$ جمله المعادلتين : $(S):\begin{cases}a\equiv 1[2018]\\ a\equiv\lambda[2019]\end{cases}$ بحيث $a\in\mathbb{Z}$

❖ إستنتج حل جملة المعادلتين(S)

5) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 2^n على 7

ب)إستنتج باقي قسمة العدد $1440+2018^{2019}$ على 7

ج) بوضع $\lambda=0$: عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حلول المعادلة (E) و تحقق $2^{y-x}\equiv 4[7]$

التمرين الثاني : (04نقاط) ليكن n عدد طبيعي بحيث : $n\geq 4$

1) يحتوي صندوق U على n كرة لا يمكن التمييز بينها عند اللمس منها 3 حمراء و البقية سوداء. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كريتين

❖ أحسب إحتمال كل حادثة من الحادثتين التاليتين :

A : سحب كريتين من نفس اللون

B : سحب كرة حمراء على الأكثر

2) نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k لصندوق k $(1\leq k\leq 3)$ الذي يحتوي على k كرة حمراء و $n-k$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من 3 صناديق و نسحب في آن واحد كريتين .

ليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

❖ عين مجموعة قيم X

❖ أثبت أن : $P(X=1)=\dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ و $P(X=2)=\dfrac{8}{3n(n-1)}$

❖ عين قانون الإحتمال لـ X

التمرين الثالث : (04.5 نقاط) حل في $\mathbb{C}$ جملة المعادلتين : $\begin{cases} z_1 - z_2 = 4i \\ z_1 + 3z_2 = 4\sqrt{3} \end{cases}$

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$

1. أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسي .
2. إستنتج قيم n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ عدد تخيلي صرف .
3. S التحويل النقطي الذي مركزه O ويحول A إلى B

♣ أوجد الكتابة المركبة للتشابه S ثم عين العناصر المميزة له

4.نعرف متتالية النقط A_n التي لاحقتها Z_n من المستوي المركب كمايلي : $\begin{cases} A_0 = A \\ A_{n+1} = S(A_n) \end{cases}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) أنشىء في المستوي المركب . النقط A_0, A_1, A_2

ب) برهن أن : $Z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

4. نعتبرالمتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $\begin{cases} U_0 = A_0A_1 \\ U_n = A_nA_{n+1} \end{cases}$

أ/ بين أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول U_0

ب/ إستنتج عبارة U_n بدلالة n

جـ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots\cdots\cdots + U_n$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

التمرين 04 : (06.5 نقاط) الجزء I): الدالة g معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$

1) أدرس إتجاه تغيرالدالة g على المجال $]0,+\infty[$

2) برر وجود عدد حقيقي α حيث $g(\alpha) = 0$. ثم جد قيمة مقربة لـ α مدور إلى 10^{-3}

الجزء II) : الدالة f معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

(C_f) منحني f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (بحيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

1) أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

2) أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$

3) أ)بين أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب) شكل جدول تغيرات دالة f

4) أرسم (Δ) و (C_f)

<u>الجزء</u> III) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم .و ليكن I_n الحيز من المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذو المعادلتين : $x = 1$ و $x = n$

1) برر أن هذه المساحة معطاة بـ : $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

2) أ) تأكد أن الدالة : $F : x \to -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \frac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0,+\infty[$

ب)إستنتج عبارة I_n بدلالة n

3) أحسب نهاية المساحة I_n لما n تؤول الى $+\infty$

إنتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي لإختبار التجريبي مادة الرياضيات

شعبة الرياضيات

الموضوع 02:

تمارين	التصحيح	التنقيط الجزئي	التنقيط الكلي
ت 01	**1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين $(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعرفة بـ :** $2019x-2018y=1-\lambda$ **بحيث** $\lambda\in\mathbb{Z}$ **تعيين قيم λ التي من اجلها تقبل المعادلة (E) حلولا في $\mathbb{Z}^2$** **تقبل المعادلة (E) إذاا كان $PGCD(2019;2018)$ يقسم العدد $1-\lambda$** **و فعلا محققه لأن $PGCD(2019;2018)=1$ و عدد 1 يقسم اي عدد اي يقسم $1-\lambda$ إذن محققة من أجل $\lambda\in\mathbb{Z}$**	0.25	0.25
	ب) إثبات ان الثنائية $(1-\lambda;1+\lambda)$ حل خاص للمعادلة (E) **بالتعويض في المعادلة (E) نجد المطلوب :** $2019(1-\lambda)-2018(1-\lambda)=2019-2019\lambda-2018+2018\lambda=1-\lambda$	0.25	0.25
	ت) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) **إيجاد قيمة $(x;y)$ بدلالة λ : لدينا** $\begin{cases}2019(1-\lambda)-2018(1-\lambda)=1-\lambda\\2019x-2018y=1-\lambda\end{cases}\Rightarrow$ $\begin{cases}2019(x-1+\lambda)-2018(y-1+\lambda)=0\\\Rightarrow 2019(x-1+\lambda)=2018(y-1+\lambda)\end{cases}$ **و منه حسب غوص لدينا :** $2019/2018(y-1+\lambda)$ **و بما أن 2019 و 2018 أوليان فيما بينهما فإن 2019 يقسم** $y-1+\lambda$ **ومنه : يوجد عدد صحيح k بحيث :** $y=2019k+1-\lambda$ **و بنفس الكيفية نجد :** $x=2018k+1-\lambda$ **بحيث** $k\in\mathbb{Z}$ $\begin{cases}x=2018k+1-\lambda\\y=2019k+1-\lambda\end{cases};k\in\mathbb{Z},\lambda\in\mathbb{Z}$	0.25 0.25 0.25	0.75
	ث) نعتبر في $\mathbb{Z}$ جمله المعادلتين : $(S):\begin{cases}a=1[2018]\\a=\lambda[2019]\end{cases}$ **بحيث** $a\in\mathbb{Z}$ ❖ **إستنتاج حل جملة المعادلتين (S) :**		

$$(S):\begin{cases} a\equiv 1[2018] \\ a\equiv \lambda[2019]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2018k+1;k\in\mathbb{Z} \\ a=2019k'+\lambda;k'\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

0.25

$$\Rightarrow \{2018k+1=2019k'+\lambda \Rightarrow 2019k'-2018k=1-\lambda$$

و من حل جملة معادلتين يكافئ حل المعادلة الأخيرة ذات المجهولين

0.5

$(k';k)\in\mathbb{Z}^2$ و هي نفس حلول المعادلة (E) :

$$k'=2018k_1+1-\lambda;k_1\in\mathbb{Z}$$

$$k=2019k_1+1-\lambda;k_1\in\mathbb{Z}$$

0.25

ومنه : $a=2018k+1=2018(2019k_1+1-\lambda)+1$ $=4074342k_1-2018\lambda+2019$ مع $k_1\in\mathbb{Z}$

3) إيجاد بواقي قسمة العدد 2^n على 7

0.75 — 01

$2^0\equiv 1[7]$ ، $2^1\equiv 2[7]$ ، $2^2\equiv 4[7]$ ، $2^3\equiv 1[7]$

إذن n دورية و دورها 3 و منه :

0.25

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$2^n\equiv$	1	2	4

4) إستنتاج باقي قسمة العدد $2018^{2019}+1440$

0.25 — 0.75

$$2018\equiv 2[7];1441=3(480)+1\Rightarrow 2018^{1441}\equiv 2^{1441}[7]$$

0.25

$$\equiv 2^{3(480)+1}[7]\equiv 2[7]$$

0.25

و$1440\equiv 5[7]$

إذن $2018^{2019}+1440\equiv 2+5[7]\equiv 0[7]$

5) بوضع $\lambda=0$: عين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حلول المعادلة (E) و تحقق $2^{y-x}\equiv 4[7]$

0.5

لدينا مما سبق أن $\begin{cases} x=2018k+1-\lambda \\ y=2019k+1-\lambda\end{cases};k\in\mathbb{N},-\lambda\in\mathbb{N}$ نعوض بقيم

0.25

(x,y) في المعادلة $2^{y-x}\equiv 4[7]$ نجد :

0.25

$$2^{y-x}=2^{2019k+1-2018k-1}=2^k\equiv 4[7]$$

من الجدول نجد قيم k التي من أجلها تكون بواقي قسمة 2^k على 7 هي

$$3k''+2/k''\in\mathbb{N}$$

ت 02

0.25 — 0.25

أولا عدد الحالات الممكنة هي $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

A : سحب كريتين من نفس اللون يعني أما كريتين حمراويين او سوداويين

0.5 | 0.5

$$P(A)=\frac{C_3^2+C_{n-3}^2}{C_n^2}=\frac{3+\left(\frac{(n-4)(n-5)}{2}\right)}{\left(\frac{(n-1)(n)}{2}\right)}=$$

$$\frac{6+(n-4)(n-5)}{(n-1)(n)}=\frac{n^2-9n+26}{(n-1)(n)}$$

B : سحب على الأكثر كرة حمراء

يعني سحب كرة واحدة حمراء او عدم سحب كرة حمراء

0.5 | 0.5

$$P(B)=\frac{C_3^1\times C_{n-3}^1+C_{n-3}^2}{C_n^2}=\frac{3\times(n-3)+\left(\frac{(n-4)(n-5)}{2}\right)}{\left(\frac{(n-1)(n)}{2}\right)}=$$

$$\frac{6(n-3)+(n-4)(n-5)}{(n-1)(n)}=\frac{n^2-3n+2}{(n-1)(n)}$$

نعيد التجربة و نضيف صندوقين بحيث نرمز لـ U_k لصندوق k $(1\le k\le 3)$

الذي يحتوي على k كرة حمراء و $n-k$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من 3 صناديق و نسحب في آن واحد كريتين .

ليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكرات الحمراء.

0.75

تعيين مجموعة قيم X:

$X\in\{0;1;2\}$

0.75

2) إثبات أن : $P(X=1)=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ و $P(X=2)=\frac{8}{3n(n-1)}$

الحادثة : $(X=1)$ يعني سحب كرة واحدة حمراء و التي إحتمال أن تكون ن الصندوق الأول أو الثاني أو الثالث : لذلك

0.5

$$P(X=1)=\frac{1}{3}\left(\frac{C_1^1\times C_{n-1}^1}{C_n^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{C_2^1\times C_{n-2}^1}{C_n^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{C_3^1\times C_{n-3}^1}{C_n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1\times(n-1)+2(n-2)+3(n-3)}{\frac{n(n-1)}{2}}\right)=2\times\frac{6n-14}{3n(n-1)}=\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

0.5

الحادثة : $(X=2)$ سحب كريتين حمراويين أي ممكن من الصندوق الأول أو الثاني أو

الثالث و لكن بما أن الصندوق الأول يحتوي على كرة واحدة حمراء و منه يكون سحب

0.5

	0.5	كريتين حمراويين من الصندوق الثاني أو الثالث : $$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_n^2}+\frac{1}{3}\times\frac{C_3^2}{C_n^2}=\frac{2}{3}\left(\frac{1+3}{n(n-1)}\right)=\frac{8}{3n(n-1)}$$
01	0.25	2) قانون الإحتمال لدينا إحتمال $(X=1)$ و $(X=2)$ إذن بقي إحتمال $(X=0)$: $$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1\Rightarrow P(X=0)$$ $$=1-P(X=1)-P(X=2)$$ لدينا : $$1-\frac{4(3n-7)}{3(n)(n-1)}-\frac{8}{3(n)(n-1)}=\frac{n(n-1)-12n+28-8}{n(n-1)}$$ $$\frac{3n^2-15n+20}{n(n-1)}$$
	0.75	إذن :

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{3n^2-15n+20}{3n(n-1)}$	$\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\frac{8}{3n(n-1)}$

0.5	0.25 0.25	1) حل في $\mathbb{C}$ جملة المعادلتين : $\begin{cases} z_1 - z_2 = 4i \\ z_1 + 3z_2 = 4\sqrt{3} \end{cases}$ بطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد : $4z_2 = 4\sqrt{3} - 4i \Rightarrow z_2 = \sqrt{3} - i$ بتعويض قيمة z_2 نجد : $z_1 = 4i + z_2 = 4i + \sqrt{3} - i = \sqrt{3} + 3i$	ت 03
0.5	0.5	2) كتابة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسي $\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{2}}$	
0.25	0.25	3) إستنتاج قيم n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ عدد تخيلي صرف العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تخيلي صرف يكافئ $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\Rightarrow n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow n = 2k+1; k \in \mathbb{N}$	
0.75	0.25 0.25 0.25	3) S التحويل النقطي الذي مركزه O ويحول A إلى B كتابة الكتابة المركبة للتشابه S ثم عين العناصر المميزة له لدينا : $\begin{cases} S(O) = O \\ S(A) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_O = az_O + b \\ z_B = az_A + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ z_B = az_A + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{z_B}{z_A} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{2}} \end{cases}$ و منه S تشابه مباشر مركزه O و نسبته $\sqrt{3}$ وز اويته $\frac{\pi}{2}$ 4) نعرف متتالية النقط A_n التي لاحقتها Z_n من المستوى المركب كمايلي : $A_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $A_{n+1} = S(A_n)$ إنشاء في المستوى المركب . النقط A_2, A_1, A_0 : A_0 نقطة لاحقتها : $z_0 = \sqrt{3} - i$ و A_1 نقطة لاحقتها $\sqrt{3} + 3i$ $A_2 = S(A_1) \Rightarrow z_2 = \sqrt{3}i(z_1) = \sqrt{3}i(\sqrt{3}+3i) = 3i - 3\sqrt{3}$	
0.75	0.25 + 0.25 +	أ)الإنشاء :	

	0.25	ب)برهن أن : $Z_n = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$:	
0.5	0.5	$A_n = S(A_{n-1}) = SoS(A_{n-2}) = SoSoS(A_{n-3}) = \dots = \underbrace{SoSoSoS..oS}_{n\text{ مرة}}(A_0)$ أي : $z_n = \left(\sqrt{3}i\right)^n z_0 = \left(\sqrt{3}\right)^n e^{n\frac{\pi i}{2}} z_0 = \left(\sqrt{3}\right)^n e^{n\frac{\pi i}{2}}\left(\sqrt{3}-i\right)$ $= \left(\sqrt{3}\right)^n e^{n\frac{\pi i}{2}}\left(2e^{-\frac{\pi}{6}i}\right) = 2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6})i}$	
0.75	0.5 0.25	5) نعتبرالمتتالية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كمايلي: $\begin{cases} U_0 = A_0A_1 \\ U_n = A_nA_{n+1} \end{cases}$ أ/ إثبات أن المتتالية (U_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول U_0 وأساسها q $\begin{cases} U_0 = A_0A_1 \\ U_n = A_nA_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_0 = \lvert z_1 - z_0\rvert \\ U_n = \lvert z_{n+1} - z_n\rvert \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_0 = 4 \\ U_n = \lvert z_{n+1} - z_n\rvert \end{cases}$ لإثبات أن المتتالية هندسية نحسب النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{A_{n+1}A_{n+2}}{A_nA_{n+1}} = \frac{\lvert z_{n+2} - z_{n+1}\rvert}{\lvert z_{n+1} - z_n\rvert} = \frac{\lvert \sqrt{3}iz_{n+1} - z_{n+1}\rvert}{\lvert \sqrt{3}iz_n - z_n\rvert} =$ $\frac{\lvert z_{n+1}\rvert \lvert \sqrt{3}i - 1\rvert}{\lvert z_n\rvert \lvert \sqrt{3}i - 1\rvert} = \frac{\lvert z_{n+1}\rvert}{\lvert z_n\rvert} = \sqrt{3}$ ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = \sqrt{3}$ وحدها الأول $U_0 = 4$	
0.5	0.5	ب/ إستنتج عبارة U_n بدلالة n : $U_n = U_0 \times q^n = 4\times\left(\sqrt{3}\right)^n$	
0.25	0.25	جـ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_n = 4\left(\frac{\sqrt{3}^{n+1} - 1}{\sqrt{3}-1}\right) = 2(\sqrt{3}+1)\left(\sqrt{3}^{n+1} - 1\right)$	
0.25	0.25	$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$	
		الجزء $I)$: الدالة g معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$	تمر

ين 04

دراسة إتجاه تغيرالدالة g على المجال $]0,+\infty[$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 1 + 2\ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(2x^2 - \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$ 0.25 | 0.5

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} 2x^3 - 1 + 2\ln x = -\infty$$ 0.25

ومنه نستنتج وجود مستقيم مقارب افقي معادلته $x=0$

2) الدالة g معرفة و قابلة لإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دوال قابلة لإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ 0.25 | 0.5

ومنه $g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} = 2\left(\frac{3x^3+1}{x}\right)$ و هي موجبة تماما من أجل كل x من $]0,+\infty[$ 0.25

جدول التغيرات : 0.5 | 0.5

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2)تبرير وجود عدد حقيقي α حيث $g(\alpha)=0$. ثم إيجاد قيمة مقربة لـ α مدور إلى 10^{-3} :

حسب نظرية القيم المتوسطة لدينا :

أ) الدالة g مستمرة على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دوال مستمرة على $]0,+\infty[$ 0.25

ب) الدالة g رتيبة تماما على $]0,+\infty[$ 0.25 | 01

ت) و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x) \times \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) < 0$ 0.25

إذن حسب شروط سابقة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا و ليكن α من المجال $]0,+\infty[$

إيجاد القيمة المقربة لـ α مدور إلى 10^{-3}

نستعمل طريقة المسح بحيث : نلاحظ أن $g(1) = 2(1)^3 - 1 + 2\ln(1) = 1$

إذن قيمة الحل α محصورة في المجال $]0;1[$ بإستعمال طريقة المسح لدينا :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$g(x)$				....	......	....	-1.0	-0.4	0.25

0.25

و منه نلاحظ أن قيمة α تنتمي إلى المجال $]0.8;0.9[$ ثم نعيد تقسيم المجال بخطوة 0.01

x	0.81	0.82	0.83	0.84	0.85	0.86	0.87	0.88	0.89
$g(x)$				....	......	-0.0295	0.0385	-0.4	0.0385

و منه نلاحظ أن قيمة α تنتمي إلى المجال $]0.86;0.87[$ ثم نعيد تقسيم المجال بخطوة 0.001

x	0.861	0.862	0.863	0.864	0.865	0.866	0.867	0.868	0.869
$g(x)$				-0.0024-	0.0044.	0.112	0.0179	0.0248	0.0361

و بنفس الطريقة نجد قيمة α في المجال $]0.864;0.865[$

0.25 | 0.25

3) إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\qquad$ | $\qquad$ $+$

الجزء $II)$: الدالة f معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ :

$$f(x)=2x-\frac{\ln x}{x^2}$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

0.5 | 0.25 | 0.25

(2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-\frac{\ln x}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x-\frac{\ln x}{x^2}=+\infty$$

3) إثبات أن (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

0.25 | 0.25

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

الوضع النسبي : ندرس إشارة الفرق التي هي من إشارة $\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ 0.25 0.25

3) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

الدالة f معرفة و قابلة لإشتقاق ومنه 0.5 0.5

$$f'(x)=\left(2x-\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\left(2-\frac{(1-2\ln x)}{x^3}\right)$$

$$=\frac{2x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

ب) شكل جدول التغيرات الدالة f 0.5 0.5

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

رسم (Δ) و (C_f) 0.75 0.75

<u>الجزء</u> III) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم . ليكن I_n الحيز من المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذو المعادلتين : $x=1$ و $x=n$

برر أن هذه المساحة معطاة بـ : $I_n=2\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}dx$ 0.25 0.25

لدينا $f(x)-y=-\dfrac{\ln x}{x^2}<0$ من أجل كل $x\in[1;+\infty[$ ومنه

$$I_n=\int_1^n -(f(x)-y)dx=\int_1^n\left(-2x+\frac{\ln x}{x^2}+2x\right)dx=\int_1^n\frac{\ln x}{x^2}dx$$

إمكانية وجود إنشاء للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

أ) تأكد أن الدالة : $F:x\to-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$ هي دالة أصلية للدالة $x\to\dfrac{\ln x}{x^2}$ على المجال $]0,+\infty[$ 0.25 0.25

الدالة $x\to\dfrac{\ln x}{x^2}$ دالة مستمرة على $]0,+\infty[$ ومنه تقبل دوال أصلية على

		المجال $]0,+\infty[$: نتحقق أن $F'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ $F'(x)=\left(-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right)'=\left(-\frac{(1+\ln x)}{x}\right)'=-\frac{-\ln x}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$ إستنتاج عبارة I_n بدلالة n
0.25	0.25	$I_n=\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}dx=F(x)]_1^n=\frac{-(\ln x)-1}{x}\Big]_1^n=\frac{-\ln(n)-1}{n}+1=\frac{n-1-\ln(n)}{n}$
0.25	0.25	حساب نهاية المساحة I_n لما n تؤول الى $+\infty$ $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{-\ln(n)-1}{n}+1=1$

التصحيح النموذجي لإختبار التجريبي مادة الرياضيات

شعبة الرياضيات

الموضوع 01:

التمارين	التصحيح	ع مجزأة	ع كاملة
ت01	نعتبرالمتتالية (Z_n) للأعداد المركبة المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases}$ نضع M_n النقطة ذات اللاحقة z_n . نعتبر العدد المركب $z_A = 4+2i$ و النقطة A ذات اللاحقة z_A لتكن (U_n) المتتالية المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = z_n - z_A$ **1)إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n :** $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 - 4 - 2i = \frac{1}{2} i \times z_n + 1 - 2i$ $= \frac{1}{2} i (z_n - 2i - 4) = \frac{1}{2} i \times (z_n - z_A) = \frac{1}{2} i \times (u_n)$	01	01
	ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4-2i)$ لدينا مما سبق أن $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} i$ ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2} i$ وحدها الأول $u_0 = z_0 - z_A = -4-2i$ إذن : $u_n = u_0 \times q^n = (-4-2i) \times \left(\frac{1}{2} i\right)^n$	0.5 0.5 0.5	1.5
	ت)برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، النقط M_{n+4} و M_n ، A على إستقامية للإثبات أن ثلاث نقط على إستقامية نختار شعاعين و نثبت أنهما مرتبطين خطيا و ليكن $\overrightarrow{AM_n}$ و $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ اي نثبت أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AM_{n+4}} = k \overrightarrow{AM_n}$ نحسب النسبة التالية $\frac{z_{n+4} - z_A}{z_n - z_A}$ و نثبت انها عدد	0.25	

	حقيقي : $$\frac{z_{n+4}-z_A}{z_n-z_A}=\frac{u_{n+4}}{u_n}=\frac{(-4-2i)\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+4}}{(-4-2i)\left(\frac{1}{2}i\right)^{n}}=\left(\frac{1}{2}i\right)^4=\frac{1}{32}$$ ومنه $\arg\left(\frac{z_{n+4}-z_A}{z_n-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AM_n},\overrightarrow{AM_{n+4}}\right)=2k\pi;k\in\mathbb{Z}$ ومنه النقط M_{n+4} و M_n ، A على إستقامة واحدة	0.5 0.25	01
ت02	نعتبر مجموعتي النقط (E) و (F) المعرفة كالتالي: $(E)=\{M(x,y,z)/(x+y+z+1)^2+(x-y+2)^2=0\}$ $(F)=\{M(x,y,z)/(x+y+z+1)^2-(x-y+2)^2=0\}$ بين أن (E) هي مستقيم يطلب تعيين شعاع توجيه له $M(x,y;z)\in(E)\Rightarrow(x+y+z+1)^2+(x-y+2)^2=0$ $\Rightarrow\begin{cases}(x+y+z+1)^2=0\\(x-y+2)^2=0\end{cases}$ و $\Rightarrow\begin{cases}(x+y+z+1)=0\\(x-y+2)=0\end{cases}$ $\begin{cases}x+y+z+1=0\\x=y-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2y+1\\x=y-2\end{cases}$ ومنه : بوضع $y=t$ نجد $\begin{cases}x=t-2\\y=t\\z=-2t+1\end{cases}$ إذن (E) هي مستقيم له شعاع توجيه $\vec{u}(1;1;-2)$	0.25 0.25 0.25 0.25	01
	إثبات أن (F) هي إتحاد مستويين (P_1) و (P_2) يطلب إعطاء معادلتيهما ثم $M(x,y;z)\in(F)\Rightarrow(x+y+z+1)^2-(x-y+2)^2=0$ $\Rightarrow(x+y+z+1)^2=(x-y+2)^2$ $\Rightarrow\begin{cases}(x+y+z+1)=x-y+2\\x+y+z+1=-(x-y+2)\end{cases}$ أو $\Rightarrow\begin{cases}(2y+z-1)=0.....(P_1)\\(2x+z+3)=0.......(P_2)\end{cases}$ أو إذن : $(F)=(P_1)\cup(P_2)$ نرفق بكل عدد حقيقي m المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة الديكارتية :	0.25 0.5 0.25	01

01	01	$(P_m):(1+m)x+(m-3)y+(m-1)z+m-3=0$ **التحقق أن (P_m) يحوي (E)** أي إثبات أن كل نقطة $M(x;y;z)$ من (E) تنتمي الى (P_m) $M(x;y;z)\in(E)\Rightarrow x=t-2 / y=t / z=-2t+1$ نقوم بتعويضها في (P_m) $(P_m):(1+m)(t-2)+(m-3)t+(m-1)(-2t+1)+m-3=0$ ومنه $M(x;y;z)$ تنتمي الى (P_m) أي (P_m) يحوي (E)	
01	0.25 0.75	**هل كل مستو يحوي (E) هو المستوي (P_m) ؟ برر** 1)لا ليس كل مستو يحوي (E) هو المستوي (P_m) 2) التبرير : لدينا المستوي $x+y+z+1=0$ يحوي (E) و ليس (P_m)	
0.75	0.25 0.5	نعتبرفي المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$ حيث : $4x-9y=5$ **أ) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $x\equiv 8[9]$ ، ثم إستنتج حلول المعادلة (E)** $4x-9y=5\Rightarrow 4x=9y+5$ لدينا $9\equiv 0[9]\Rightarrow 9y\equiv 0[9]\Rightarrow 9y+5\equiv 5[9]$ $4x\equiv 5[9]\Rightarrow 4x\equiv 5[9]\times 8\Rightarrow x\equiv 8[9]$ إستنتاج الحلول : لدينا $x\equiv 8[9]$ اي $x=9k+8;k\in\mathbb{Z}$ ومنه بتعويض قيمة x نجد : $y=4k+3$ اي : $(x;y)=(9k+8;4k+3)/k\in\mathbb{Z}$	ت03
0.75	0.25 0.25 0.25	**ب)** α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي اساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي أساسه y حيث : $x\leq 35$ و $y\leq 15$ لدينا : $\alpha=\overline{43}^x=\overline{98}^y\Rightarrow\alpha=\overline{43}^x=\overline{98}^y\Rightarrow 4x+3=9y+8\Rightarrow 4x-9y=5$ ومنه إيجاد قيمة α يكافئ ايجاد $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ حلي المعادلة (E) بحيث $x\leq 35$ و $y\leq 15$ لدينا حلول المعادلة (E) هي $\begin{cases}(x;y)=(9k+8;4k+3)\\ 9k+8\leq 35/4k+3\leq 15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x;y)=(9k+8;4k+3)\\ x\leq 35/y\leq 15\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}(x;y)=(9k+8;4k+3)\\ 0\leq k\leq 3\end{cases}$ ومنه قيم $(x;y)\in\{(8;3),(17;7),(26;11),(35;15)\}$ **كتابة α في نظام العشري : $\alpha\in\{35;71;107;143\}$**	

01	01	2)أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 4^n على 9

$4^0\equiv1[9]$ ، $4^1\equiv4[9]$ ، $4^2\equiv7[9]$ ، $4^3\equiv1[9]$

إذن n دورية و دورها 3 و منه :

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$4^n\equiv$	1	**4**	**7**

ت) تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (E) حيث :

$$2011^x+4^y+7=2011^{9k+8}+4^{4k+3}+7\equiv0[9]$$

لتعيين قيم $(x;y)$ نعين قيم k من $\mathbb{N}$:

0.25 — 0.25

$$2011\equiv4[9]\Rightarrow2011^{9k+8}\equiv4^{9k+8}[9]\equiv4^{3(3k)}\times4^{3(2)+2}[9]\equiv7[9]$$

و $4^{4k+3}=4^{3k+3}\times4^k\equiv4^k[9]$ و منه

0.75 — 0.25

$$2011^x+4^y+7=2011^{9k+8}+4^{4k+3}+7\equiv0[9]\Rightarrow7+4^k+7\equiv0[9]$$

$$\Rightarrow4^k+5\equiv0[9]\Rightarrow4^k\equiv4[9]$$

ومنه حسب الجدول السابق لكي يكون باقي قسمة العدد 4^k على 9 هو 4 فإن قيم $k=3k'+1;k'\in\mathbb{N}$ ومنه تعويضها و ايجاد $(x;y)$

---

6) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a=9n+8$ و $b=4n+3$ و ليكن d قاسمهما المشترك الأكبر

0.25

أ) ما هي القيم الممكنة لـ d

لدينا :

0.5 — 0.25

$$\begin{cases}d/9n+8\\d/4n+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d/4(9n+8)\\d/9(4n+3)\end{cases}\Rightarrow d/4(9n+8)-9(4n+3)=5$$

اذن d يقسم 5 ومنه $d\in\{1;5\}$

ب) تعيين مجموعة القيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$

لدينا $d=5$

$$\begin{cases}d=5/9n+8\\d=5/4n+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9n+8\equiv0[5]\\4n+3\equiv0[5]\end{cases}$$

$$\Rightarrow13n+11\equiv0[5]\Rightarrow3n+1\equiv0[5]\Rightarrow3n\equiv4[5]$$

0.25

بواقي قسمة العدد n على 5 هي

0.5

$n=$	1	2	3	4	5	$[5]$
$3n\equiv$	3	1	4	2	0	$[5]$

0.25

ومنه $n\equiv3[5]$ اي $n=5k+3/k\in\mathbb{N}$

---

7) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A=9n^2+17n+8$ و

0.5 | 0.5

$B=4n^2+7n+3$

أ)إثبات أن العدد $(n+1)$ يقسم كلا من A و B

لدينا : $A=(n+1)(9n+8)$ و $B=(n+1)(4n+3)$ إذن $(n+1)$ قاسم مشترك للعددين A و B

ب)إستنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

0.75 | 0.25 | 0.25 | 0.25

بوضع

$$PGCD(A,B)=PGCD((n+1)(9n+8);(n+1)(4n+3))$$
$$=(n+1)PGCD(9n+8;4n+3)$$

ومنه بقي إيجاد $PGCD(9n+8;4n+3)$ لدينا ممسبق القيم الممكنة لـ $PGCD(9n+8;4n+3)$ هي 1 و 5

منه إذا كان : $n\neq 5k+3/k\in\mathbb{N}$ فإن $PGCD(9n+8;4n+3)=1$ منه $PGCD(A;B)=n+1$

و اذا كان : $n=5k+3/k\in\mathbb{N}$ فإن $PGCD(9n+8;4n+3)=5$ منه $PGCD(A;B)=5(n+1)$

ت04

جزء I) ليكن k عدد حقيقي موجب تماما

الدالة g_k معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g_k(x)=1+(1+k(x+1))e^{kx+k}$

0.75 | 0.25 | 0.25 | 0.25

أ) حساب الدالة المشتقة g_k' ثم إستنتاج إشارة $g_k'(x)$ من أجل x من $\mathbb{R}$

الدالة g_k' معرفة و قابلة لإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه :

$$g_k'(x)=(k)e^{kx+k}+\left(k(x+1)+1\right)ke^{kx+k}=e^{kx+k}(k^2(x+1)+k+k)$$
$$=e^{kx+k}(k^2(x+1)+2k)$$

ومنه إشارة $g_k'(x)$ من إشارة $\left(k^2(x+1)+2k\right)$ إذن نحل المعادلة :

$\left(k^2(x+1)+2k\right)=0\Rightarrow x+1=-\frac{2}{k}\Rightarrow x=-\frac{2}{k}-1$ ومنه الإشارة :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{k}-1$	$+\infty$
$g_k'(x)$	$-$		$+$

1 | 0.5 | 0.5

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم إستنتج أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $g_k(x)>0$

النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x)=1$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x)=+\infty$

x	$-\infty$	$-1-\frac{2}{k}$	$+\infty$
$g_k'(x)$	$-$		$+$
$g_k(x)$	1 ↘	$1-e^{-2}$	↗ $+\infty$

0.25 | 0.25

إشارة $g_k(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

من جدول التغيرات لدينا :

لدينا : $1-ke^{-k-1}=1-\dfrac{k}{e^{k+1}}=\dfrac{e^{k+1}-k}{e^{k+1}}>\dfrac{k+1-k}{e^{k+1}}>0$ إذن $g_k(x)$

موجبة من أجل كل x من $\mathbb{R}$

0.5 | 0.25 , 0.25

الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x)=x+(x+1)e^{kx+k}$

إثبات أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها

نفرض ان المنحنيين (C_{k_1}) و (C_{k_2}) بحيث $k_1 \neq k_2$ يمران بنقطة ثابتة

اي : $I(x_0,y_0)$

$$f_{k_1}(x_0)=f_{k_2}(x_0) \Rightarrow x_0+(x_0+1)e^{k_1(x_0+1)}=x_0+(x_0+1)e^{k_1(x_0+1)}$$

$$\Rightarrow e^{k_1(x_0+1)}=e^{k_2(x_0+1)} \Rightarrow e^{k_1(x_0+1)-k_2(x_0+1)}=1=e^0$$

$$\Rightarrow (k_1-k_2)(x_0+1)=0 \Rightarrow x_0=-1$$

لأن $k_1 \neq k_2$ ثم نقوم بتعويض الفاصلة $x=-1$ نجد -1 إذن :

$I(x_0,y_0)=(-1;-1)$

0.5 | 0.5

إثبات أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f_k'(x)=g_k(x)$

الجزء II) بوضع: $k=1$:

0.5 | 0.5

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=-\infty$

0.25 | 0.25

ب) إثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_1) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{(x+1)}=\lim_{t\to-\infty} te^t=0 \,/\, t=(x+1)$$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_1) بجوار $-\infty$

0.75 | 0.25 , 0.5

ث) دراسة إتجاه تغير الدالة f_1 على $\mathbb{R}$ و إستنتاج جدول تغيراتها

لدينا : f_1 دالة معرفة و قابلة لإشتقاق على $\mathbb{R}$ و :

$f_1'(x)=1+(x+2)e^{x+1}$ و بما أنه $f_k'(x)=g_k(x) \Rightarrow f_1'(x)=g_1(x)$

إذن إشارة $f_1'(x)$ من إشارة $g_1(x)$

ومنه $f_1'(x)$ موجبة تماما من أجل كل عدد حقيقي إذن :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	
$f_1(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ز) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_1) عند النقطة التي فاصلتها -1 $(\Delta): y = f_1'(-1)(x+1) + f_1(-1) = 2x+1$		
4) إثبات أن المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 \le \alpha \le 0$ لدينا الدالة f_1 معرفة و مستمرة على المجال $[-1;0]$	0.25	0.25
و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على $[-1;0]$ و لدينا : $f_1(-1) \times f_1(0) = -1 \times e < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة و من الشروط السابقة لدينا المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-1;0]$	0.75	0.75
إثبات أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f_1(x-1) + f_{-1}(-x-1) = -2$. $f_1(x-1) + f_{-1}(-x-1) = (x-1+xe^x) + (-x-1-xe^x) = -2$ نستنتج بالنسبة لـ (C_1) و (C_{-1})	0.25	0.25
ب) أرسم المنحنى (C_1) . و إستنتج على نفس المعلم المنحنى (C_{-1})		0.5
	0.5	
الجزء III) : λ عدد حقيقي أقل تماما من 1 . نعتبر التكامل التالي : $$I_k = \int_{\lambda-1}^{-1} -(x+1)e^{kx+k}\,dx$$ 1) هل العدد I_k يمثل مساحة ؟ برر العدد I_k يمثل مساحة لأن $x+1$ سالبة من أجل $x \in [\lambda-1,-1]$ و e^{kx+x} موجبة تماما من اجل $x \in [\lambda-1,-1]$ و منه $-(x+1)e^{kx+k} \ge 0$ من أجل $x \in [\lambda-1,-1]$ و منه بما أن $-(x+1)e^{kx+k} \ge 0$ فإن $I_k \ge 0$ 2) بإستعمال التكامل بالتجزئة ، حساب I_1 ثم إستنتاج $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_1$. تفسير هذه النتيجة	0.25	0.25
$$I_1 = \int_{\lambda-1}^{-1} -(x+1)e^{x+1}dx = \left[-(x+1)e^{x+1}\right]_{\lambda-1}^{-1} + \int_{\lambda-1}^{-1} e^{x+1}dx$$ $$= +\lambda e^{\lambda} + e^{x+1}\Big]_{\lambda-1}^{-1}$$ $$= \lambda e^{\lambda} + 1 - e^{\lambda} = (\lambda-1)e^{\lambda} + 1$$ $$\lim_{\lambda \to -\infty} I_1 = \lim_{\lambda \to -\infty} (\lambda-1)e^{\lambda} + 1 = 1$$ تفسير هذه النتيجة : لما λ يقترب من ناقص مالانهاية فإن المساحة تقترب من 1	0.25 0.25	0.5
