

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية البويرة ثانوية خالص سليمان- بشلول

تصحیح البكالوريا التجريبية

في

مادة الرياضيات

ماي 2017

إعداد الأستاذ:

شداني عبد المالك

السنة الدراسية :

2016 – 2017

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوى المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C, D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 1, z_B = 3 + 4i, z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})$ و $z_D = -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$

1) أ) بين ان صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي النقطة D .

ب) استنتج أن النقطتين B و D تنتميان الى نفس الدائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) لتكن النقطة F صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة B ونسبته $\frac{3}{2}$

أ) بين ان لاحقة النقطة F هي $z_F = -2i$.

ب) بين ان F هي منتصف القطعة $[CD]$.

ج) بين ان $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ ثم اكتبه على الشكل الأسّي.

د) استنتج أن المستقيم (AF) هو محور القطعة المستقيمة $[CD]$.

هـ) أنشئ النقط A, B, C, F, D .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} كما يلي: $u_0 = -1, u_1 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

1) احسب u_2 ثم تحقق ان (u_n) ليست حسابية وليست هندسية.

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n, v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

- بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n .

3) نضع من اجل كل عدد طبيعي $n, w_n = \frac{u_n}{v_n}$

- بين ان المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول ثم استنتج عبارة w_n بدلالة n .

4) أ) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي $n, u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

ب) نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. برهن انه من اجل كل عدد طبيعي $n, S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

ج) احسب، $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;3)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(2;-2;0)$
- بين ان النقط A ، B و C تحدد مستويا.
 - بين ان: $x + y - z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 - لتكن $D(2;0;2)$ و $E(-4;6;2)$ نقطتين من الفضاء. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE) .
 - لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $x(x-2) - y(2-y) + z(z-8) + 14 = 0$
- ا) بين ان (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها R
- ب) بين ان المستقيم (DE) هو مماس لسطح الكرة (S) في نقطة H يطلب تعيين احداثياتها.
- ج) بين ان المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين نصف قطرها و مركزها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - 2\ln x$.

- ادرس تغيرات الدالة g .
 - احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.
- II. الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: إذا كان $f(x) = x - x^2 \ln x$ ، $x \in]0; +\infty[$ و $f(0) = 0$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm}$

- أ. بين أن الدالة f مستمرة عند 0 على اليمين.

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ، فسر النتيجة بيانيا.

ج. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = x.g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.7 < \alpha < 1.8$.
- ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.
- مثل المنحنى (C) والمستقيم (Δ) .

6. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب $I_\alpha = \int_1^\alpha [x - f(x)] dx$. فسر هندسيا العدد I_α .

ب. تحقق أن $I_\alpha = (-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1) \text{cm}^2$

III. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب: $U_0 = \frac{1}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$.

- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < U_n < 1$.
- بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما، استنتج أن (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

الموضوع الثاني:

التمرين الاول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستويين (P) ، (P') معادلة ديكارتية لكل منهما على الترتيب: $x + y + z = 0$ و $2x + 3y + z - 4 = 0$.

$$(1) \text{ بين أن المستويين } (P), (P') \text{ يتقاطعان وفق المستقيم } (D) \text{ تمثيل وسيطي له هو: } \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

(2) نعتبر العدد الحقيقي λ .

ليكن (P_λ) حزمة من المستويات المعرفة بـ: $(1-\lambda)(x+y+z) + \lambda(2x+3y+z-4) = 0$

أ) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1+\lambda; 1+2\lambda; 1)$ ، شعاع ناظمي للمستويات (P_λ) .

ب) عين قيمة العدد الحقيقي λ حتى يكون المستويان (P) ، (P_λ) منطبقين.

ج) هل توجد قيمة للعدد الحقيقي λ ، حتى يكون المستويان (P) ، (P_λ) متعامدين؟

3) بين أن كل المستويات (P_λ) ، لها مستقيم مشترك (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

4) أ) بين أن المستويين (P) ، (P_{-1}) متقاطعان وفق مستقيم (D') ، يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له.

ب) بين أن المستقيمين (D) ، (D') منطبقان.

5) $A(1;1;1)$ نقطة من الفضاء، احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$(1) (U_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي: } \begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1} \end{cases}$$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < U_n < 2$.

$$\text{ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 + 3U_n - 2}{\sqrt{U_n - 1} + U_n - 1}$$

- استنتج أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

ج) برر لماذا المتتالية (U_n) متقاربة؟

$$(2) (V_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي: } V_n = \ln(U_n - 1)$$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول.

ب) اكتب كلا من V_n ، U_n بدلالة n ، عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $W_n = U_n - 1$.

احسب بدلالة n الجداء π_n حيث: $\pi_n = W_0 \times W_1 \times \dots \times W_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

$$(1) \text{ حل في مجموعة الاعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z: (z+1)^2 + [2+i(1+\sqrt{5})]^2 = 0$$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس، النقط A ، B و C لواحقتها على الترتيب:

$$z_C = \sqrt{5} - 2i \text{ و } z_B = i(2 - \sqrt{3}), z_A = -1 + 2i$$

ا) احسب $|z_C|$ و $|z_B - z_A|$ ثم أنشئ النقط A, B, C .

ب) بين ان C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

3) أ) عين $z_{C'}$ لاحقة C' نظيرة C بالنسبة الى A .

ب) علما ان الرباعي $BC'B'C$ متوازي اضلاع. بين ان $z_{B'} = -2 + (2 + \sqrt{3})i$.

ج) بين ان $\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}(1 - i\sqrt{3})$ ثم أكتبه على شكله الأسّي ثم استنتج أن:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB'}{CB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB'}; \overrightarrow{CB})$$

التعريف الرابع : (07 نقاط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = -4e^{2x} + 17e^x - 4$

- بين انه من اجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) = -4(e^x - 4)\left(e^x - \frac{1}{4}\right)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على \mathbb{R}

II) لتكن الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^* بـ : $f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$.

2) عين العددين الحقيقيان a, b بحيث من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = ax + b + \frac{1}{1-e^x}$.

3) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفها.

4) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $f'(x) = \frac{g(x)}{9(1-e^x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

5) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x) = -1 - f(x)$. ماذا تستنتج؟

6) أ) بين ان (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) معادلتهما على الترتيب : $y = -\frac{4}{9}x - 1$ و $y = -\frac{4}{9}x$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

7) أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) و (C_f) .

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $\frac{e^x}{1-e^x} = m$

9) أ) عين مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحددة بالمنحنى (C_f) و (Δ_2) و المستقيمين الذي معادلتهما $x = \lambda$ و $x = -\ln 4$

مع $\lambda < -\ln 4$

ب) احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

بالتوفيق بكالوريا جوان 2017

الموضوع 01

التصحيح المفصل للباكالوريا التجريبي

التقيط

(الاعداد المركبة)

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط)

التمرين الاول:

$$z_D = \text{و } z_C = 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}), z_B = 3 + 4i, z_A = 1$$

(1) تبين ان صورة B بالدوران r هي D :

لدينا ، دوران مركزه A وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ و عليه التأكد أن $r(B) = D$

$$z_D - z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z_B - z_A) \text{ اي}$$

$$z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}} (z_B - z_A) + z_A \text{ اي}$$

و عليه لدينا،

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} (z_B - z_A) + z_A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3 + 4i - 1) + 1$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2 + 4i) + 1$$

$$= -1 - 2i + \sqrt{3}i - 2\sqrt{3} + 1$$

$$= -2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3})$$

$$= z_D$$

(ب) استنتاج ان القطبتين D و B تنتميان الى نفس الدائرة (Γ) :

بما ان صورة القطعة B بواسطة الدوران r الذي مركزه A هي القطعة D فإن القطبتين B و

D تنتميان الى نفس الدائرة ذات المركز A ونصف القطر $\rho = AB = 2\sqrt{3}$

(2) أ، تعيين لاحقة القطعة F :

$$z_F - z_B = \frac{3}{2}(z_A - z_B) \text{ اي } h(A) = F \text{ لدينا،}$$

$$z_F = \frac{3}{2}(z_A - z_B) + z_B \text{ اي}$$

$$z_F = \frac{3}{2}(1 - 3 - 4i) + 3 + 4i \text{ اي}$$

$$z_F = -2i \text{ اي}$$

(ب) تبين ان F منتصف القطعة $[CD]$:

$$\frac{z_D + z_C}{2} = \frac{-2\sqrt{3} + i(-2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3})}{2} = \frac{-2i + \sqrt{3}i - 2i - \sqrt{3}i}{2} = \frac{-4i}{2} = -2i = z_F$$

منه F منتصف القطعة $[CD]$.

ج) تبين ان $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$ و كتابته على الشكل الاسي:

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \frac{2\sqrt{3} + i(-2 - \sqrt{3}) + 2i}{1 + 2i} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}i}{1 + 2i} = \frac{-\sqrt{3}i(2i + 1)}{1 + 2i} = -\sqrt{3}i$$

$$\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{منه:} \quad \begin{cases} |-\sqrt{3}i| = \sqrt{3} \\ \text{Arg}(-\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ لدينا،}$$

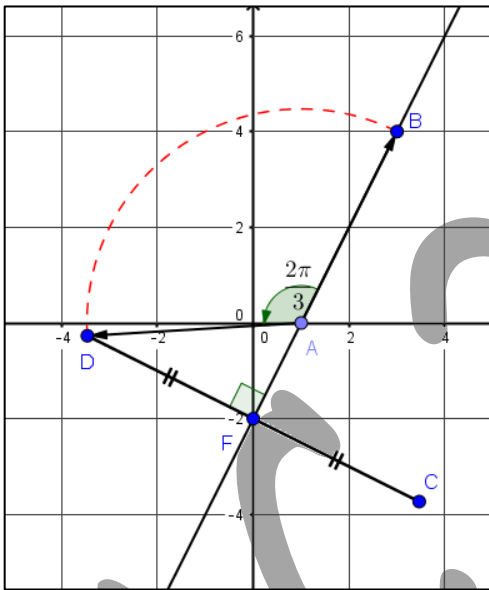
د) استنتاج ان المستقيم (AF) محور القطعة [CD]:

بما ان F منتصف القطعة (CD) يكفي التأكد ان (AF) عمودي (CD)

مما سبق لدينا، $\frac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ نجد ان $(\overrightarrow{FA}; \overrightarrow{FC}) = -\frac{\pi}{2}$ اي (AF) عمودي (CD)

منه، المستقيم (AF) محور القطعة [CD]

هـ) إنشاء النقط A، B، C، F، D:



التقيط

(المتاليات العددية)

تصحیح التمرين الثاني (04 نقاط)

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_0 = -1$$

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{حساب } u_2:$$

- التحقق أن (u_n) ليست حسابية وليست هندسية:

$$\text{منه } 2u_1 \neq u_0 + u_2, \quad \text{الوسط الحسابي غير محقق وعليه } (u_n) \text{ ليست حسابية} \quad \begin{cases} u_0 + u_2 = \frac{-1}{4} \\ 2u_1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{منه } u_1^2 \neq u_0 \times u_2, \quad \text{الوسط الهندسي غير محقق وعليه } (u_n) \text{ ليست هندسية} \quad \begin{cases} u_0 u_2 = \frac{-3}{4} \\ u_1^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2) تبين ان (v_n) متتالية هندسية:

من اجل كل عدد طبيعي n،

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}\left[u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right] = \frac{1}{2}v_n$$

منه (v_n) متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1$

- عبارة v_n بدلالة n : من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

3) تبيان أن المتتالية (w_n) حسابية:

من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$$

إذن (w_n) متتالية حسابية اساسها $r = 2$ و حدها الاول $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$

- من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$w_n = w_0 + nr = -1 + 2n$$

4) أ) برهان انه ، $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$

من اجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ منه $u_n = w_n v_n$ إذن $u_n = (-1 + 2n) \left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{2n-1}{2^n}$

ب) برهان أن ، $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

لدينا، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ اي $u_n = 4(u_{n+1} - u_{n+2})$

و عليه: $S_n = 4[(u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{n+1} - u_{n+2})]$

$$S_n = 4[u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + u_3 - u_4 + \dots + u_{n+1} - u_{n+2}]$$

$$S_n = 4[u_1 - u_{n+2}]$$

منه

$$S_n = 4\left[\frac{1}{2} - \frac{2(n+2)-1}{2^{n+2}}\right] = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

- حساب $\lim u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

التنقيط

(الهندسة الفضائية)

تصحيح التمرين الثالث (4 نقاط)

1) تبيان ان النقط A, B, C تحدد مستوي:

لدينا، $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ومنه $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ونلاحظ ان $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-4} \neq \frac{0}{-3}$ منه الشعاعين \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير

مرتبطين خطيا و عليه النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة و عليه فإنها تحدد مستوي

2) تبيان أن $x + y - z = 0$ معادلة ديكارتية لـ (ABC) :

$$x + y - z = 0 \quad \begin{cases} x_A + y_A - z_A = 1 + 2 - 3 = 0 \\ x_B + y_B - z_B = 2 + 1 - 3 = 0 \\ x_C + y_C - z_C = 2 - 2 - 0 = 0 \end{cases}$$

و عليه $x + y - z = 0$ معادلة ديكارتية لـ (ABC)

3) التمثيل الوسيطى للمستقيم (DE):

لتكن نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (DE) منه $\overline{DM} = t\overline{DE} \quad / t \in \mathbb{R}$ حيث $\overline{DE}(-6;6;0)$ شعاع توجيه المستقيم (DE)

$$\text{تمثيل وسيطى للمستقيم (DE).} \quad \begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 6t \\ z = 2 \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R} \quad \text{منه:}$$

4) أتبين ان (S) سطح الكرة:

$$(S) \text{ تكافئ } x(x-2) - y(2-y) + z(z-8) + 14 = 0$$

$$\text{تكافئ } x^2 - 2x - 2y + y^2 + z^2 - 8z + 14 = 0$$

$$\text{تكافئ } (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + (z-4)^2 - 16 + 14 = 0$$

$$\text{تكافئ } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 4$$

منه (S) هي سطح كرة مركزها $\Omega(1;1;4)$ ونصف قطرها $r=2$.
ب) تبين ان (DE) مماس سطح الكرة (S) في نقطة H يطلب تعيينها:

$$\begin{cases} x = 2 - 6t \\ y = 6t \\ z = 2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 4 \end{cases} \quad \text{لتكن } H(x;y;z) \text{ تحقق، } \begin{cases} H \in (DE) \\ H \in (S) \end{cases} \quad \text{منه:}$$

$$\text{منه نجد: } (1-6t)^2 + (6t-1)^2 + 4 = 4 \quad \text{اي } (1-6t)^2 + (6t-1)^2 = 0 \quad \text{اي } 6t-1=0 \quad \text{اي } t = \frac{1}{6}$$

$$H(1;1;4) \text{، منه } t = \frac{1}{6}$$

نلاحظ ان: $d[\Omega;(DE)] = \Omega H = 2$ منه ان (DE) مماس سطح الكرة (S) في النقطة H
ج) اثبات ان المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تحديدها:

$$\text{لدينا، } d[\Omega;(ABC)] = \frac{|x_\Omega + y_\Omega - z_\Omega|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{3}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

نلاحظ ان $d[\Omega;(ABC)] < 2$ منه المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة (c) مركزها ω ونصف قطرها r' .

$$\text{تعيين } r': \quad r' = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \text{، لدينا،}$$

تعيين ω : ω هي المسقط العمودي لـ Ω على (ABC)

التنقيط

(الدوال العددية)

تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء 1:

1) دراسة تغيرات الدالة g :

$$\text{النهايات: } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - 1 - 2 \ln x \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} - 1 - 2 \ln x \right] = -\infty$$

$$\text{اتجاه التغير: من اجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]0; +\infty[\text{،} \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = -\left[\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \right]$$

نلاحظ ان ، $g'(x) < 0$ على المجال $]0; +\infty[$. اذن g دالة متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

جدول تغيرات الدالة g :

(2) حساب $g(1)$: $g(1) = 0$

منه اشارة $g(x)$ نلخصها كما يلي :

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	●	-

الجزء الثاني :

(1) ا) تبيان ان f مستمرة عند 0 من اليمين:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x^2 \ln x) = 0 = f(0)$$

اذن f مستمرة عند 0 من اليمين.

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - x \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x \ln x = 1$$

الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق $f'_d(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - x \ln x) = -\infty \quad \text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(2) تبيان ان من اجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = x.g(x)$:

من اجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \left[2x \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 \right] = 1 - 2x \ln x - x = x \left(\frac{1}{x} - x - 2 \ln x \right) = xg(x)$$

اتجاه تغير الدالة f : اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

منه : f دالة متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$.

جدول التغيرات :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		●	

(3) تبيان ان $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$:

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على $]1,7; 1,8[$ ولدينا ،

بما ان $f(1,7) \times f(1,8) < 0$ و عليه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α حيث $1,7 < \alpha < 1,8$.

(4) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta) : y = x$:

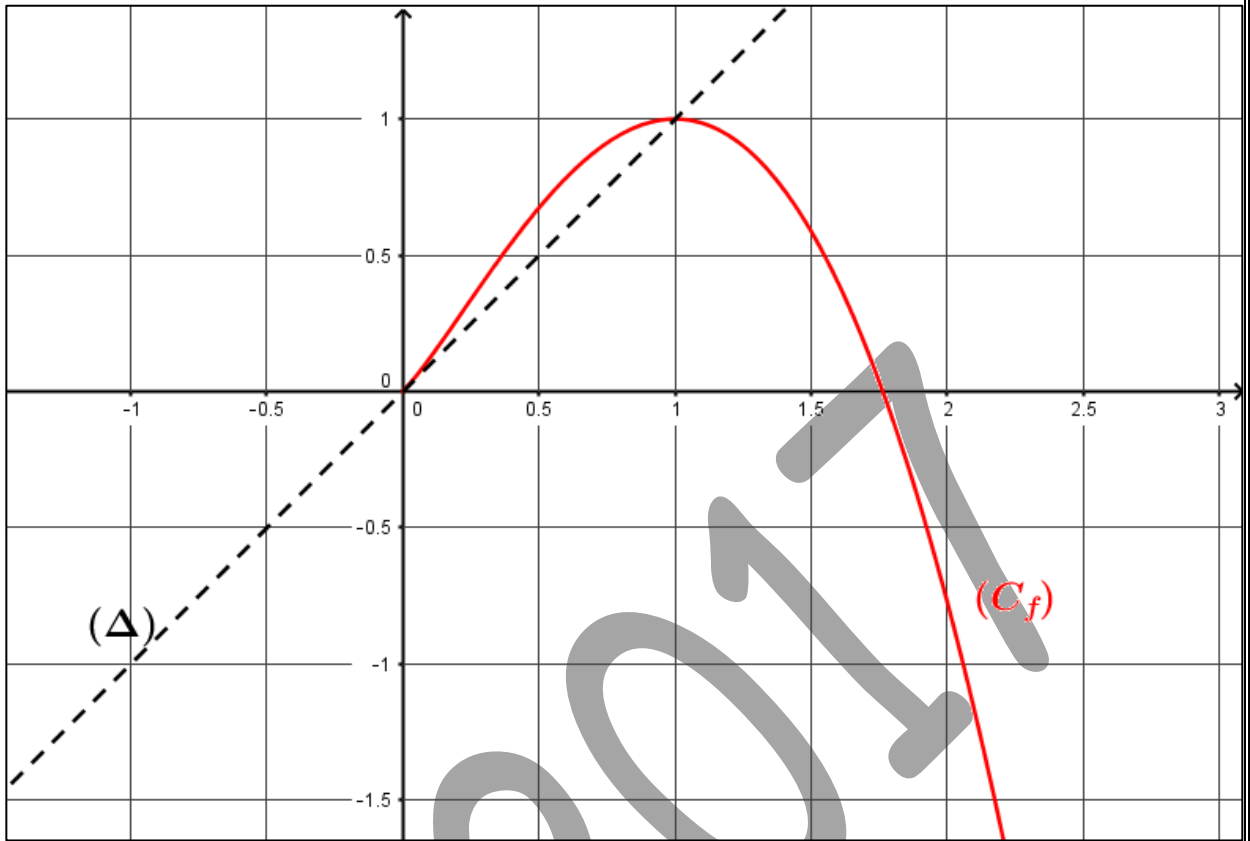
ندرس اشارة الفرق : $f(x) - x = -x^2 \ln x$ يكفي دراسة اشارة $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$		+	-

(C_f) يقع تحت (D) على $]1; +\infty[$

(C_f) يقع فوق (D) على $]0; 1[$

(C_f) يقطع (D) في النقطة $A(1;1)$.



5 أ) باستعمال التكامل بالتجزئة ، حساب $I_\alpha = \int_1^\alpha (x - f(x)) dx$

لدينا ، $I_\alpha = \int_1^\alpha (x - f(x)) dx = \int_1^\alpha (x^2 \ln x) dx$

بوضع :
$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 & v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$
 منه :

$$I_\alpha = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_1^\alpha - \frac{1}{3} \int_1^\alpha x^2 dx = \frac{1}{3} \alpha^3 \ln \alpha - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^\alpha = \frac{1}{3} \alpha^3 \ln \alpha - \frac{1}{9} (\alpha^3 - 1) u.a$$

التفسير الهندسي:

I_α هي مساحة الخيز المحددة بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين $y = x$ و $x = 1$ و

$x = \alpha$

ب) التحقق ان $I_\alpha = (-\alpha^3 + 3\alpha + 1) cm^2$

لدينا، $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 9cm^2$ و $f(\alpha) = 0$ اي $\alpha - \alpha^2 \ln \alpha = 0$ اي $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$ منه

$$I_\alpha = \frac{1}{3} \alpha^3 \ln \alpha - \frac{1}{9} (\alpha^3 - 1) u.a = \left[\frac{1}{3} \alpha^3 \left(\frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{9} (\alpha^3 - 1) \right] 9cm^2 = (-\alpha^3 + 3\alpha + 1) cm^2$$

الجزء الثالث: $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = \frac{1}{2}$

1 البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$:

نضع ، $P(n) : 0 < u_n < 1$

الموضوع 02

التصحيح المفصل للبيكالوريا التجريبي

التقيط

(الهندسة الفضائية)

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط)

1) تبيان أن المستويين (P) و (P') يتقطعان وفق المستقيم (D) :

$$\text{لدينا، } (D) \subset (P) \text{ ، منه } (-4 - 2t) + (4 + t) + t = -4 + 4 - 2t + 2t = 0$$

$$(D) \subset (P') \text{ منه } 2(-4 - 2t) + 3(4 + t) + t - 4 = -8 + 4t + 12 + 3t + t - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$$

اذن، المستويين (P) و (P') يتقطعان وفق المستقيم (D) تمثيله الوسيطى: $t \in \mathbb{R}$

2) أ) التأكد ان الشعاع $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ شعاع ناظمي للمستويات (P_λ) :

$$\text{لدينا، } (P_\lambda) \text{ تكافئ } (1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$$

$$\text{تكافئ } x + y + z - \lambda x - \lambda y - \lambda z + 2\lambda x + 3\lambda y + \lambda z - 4\lambda = 0$$

$$\text{تكافئ } (1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$$

و من خلال المعادلة الديكارتية الاخيرة نستنتج ان الشعاع $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ ناظمي لـ (P_λ) .

ب) تعيين قيمة λ حتى يكون المستويان (P) و (P_λ) منطبقين:

لدينا، $\vec{n}_{(P)}(1; 1; 1)$ و $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ اشعة ناظمية لـ (P) و (P_λ) على الترتيب .

(P) و (P_λ) منطبقين ، اول الشروط الشعاعين $\vec{n}_{(P)}$ و \vec{n} مرتبطان خطيا

$$\text{اي } \frac{1 + \lambda}{1} = \frac{1 + 2\lambda}{1} = \frac{1}{1} \text{ منه نجد ان } \lambda = 2\lambda \text{ اي } \lambda = 0 \text{ وعليه، } (P_0) = (P).$$

ج) البحث عن قيمة لـ λ بحيث (P) و (P_λ) متعامدين:

$$(P) \text{ و } (P_\lambda) \text{ متعامدين معناه ، } \vec{n} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \text{ اي } (1 + \lambda) + (1 + 2\lambda) + 1 = 0 \text{ اي } \lambda = -1$$

3) تبيان ان جميع المستويات (P_λ) تشمل مستقيم مشترك (Δ) :

$$\text{لدينا ، } (P_\lambda) \text{ تكافئ } (1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$$

$$\text{ومنه حل الجملة هو تقاطع المستويين } (P) \text{ و } (P') \text{ يكافئ } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

و عليه حسب السؤال 1 نجد: $(\Delta) = (D)$.

اذن جميع المستويات (P_λ) تشمل مستقيم مشترك هو $(\Delta) = (D)$.

4) أ) تبيان أن (P) و (P_{-1}) متقاطعان وفق مستقيم (D') :

لدينا، $\vec{n}_0(1; 1; 1)$ و $\vec{n}_{-1}(0; -1; 1)$ اشعة ناظمية لـ (P) و (P_{-1})

نلاحظ $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$ منه الشعاعين \vec{n}_0 و \vec{n}_{-1} غير مرتبطان خطيا و عليه المستويان (P) و (P_{-1})

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \quad \dots(1) \\ -y + z + 4 = 0 \quad \dots(2) \end{cases} \text{ متقاطعان وفق المستقيم } (D') \text{ الذي يحقق:}$$

من (2) نجد، $z = y - 4$ ومن (1) نجد، $x + y + y - 4 = 0$ اي $x = -2y + 4$

$$\text{بوضع } y = \alpha \text{ نجد: } \alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 4 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -4 + \alpha \end{cases} \text{ تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع.}$$

ب) تبيان ان (D) و (D') منطبقان:

لدينا، المستقيمين (D) و (D') لهما نفس شعاع التوجيه، $\vec{u}(-2;1;1)$ و عليه فإنهما متوازيين .
لتكن النقطة $A(-4;4;1)$ من المستقيم (D) و نلاحظ ان أجل $\alpha = 0$ فإن $A \in (D')$
إذن المستقيمين (D) و (D') منطبقان.

ج) $A(1;1;1)$ ، حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (D):

لدينا المستويين (P) و (P_{-1}) متقاطعان وفق مستقيم (D) و متعامدين منه تستنتج ما يلي :

$$d[A;(D)]^2 = d[A;(P)]^2 + d[A;(P_{-1})]^2 = (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3 + \frac{16}{2} = 11$$

$$\text{منه: } d[A;(D)] = \sqrt{11}$$

التقيط

(المتاليات العددية)

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

1) أ) البرهان بالتراجع أن، $1 < u_n < 2$:

نضع، $P(n): 1 < u_n < 2$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ وبما ان $1 < \frac{3}{2} < 2$ فان $P(0)$ محققة

المرحلة 02: من أجل n عدد طبيعي كفي، نفرض صحة $P(n): 0 < u_n < 1$

ونبرهن صحة $P(n+1): 0 < u_{n+1} < 1$

لدينا من فرضية التراجع، $1 < u_n < 2$ منه $0 < u_n - 1 < 1$ منه $0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$

$$\text{منه } 1 < 1 + \sqrt{u_n - 1} < 2 \text{ اي } 1 < u_{n+1} < 2$$

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$.

ب) تبيان ان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \sqrt{u_n - 1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)$$

$$= \frac{[\sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1)][\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)]}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

$$= \frac{(u_n - 1) - (u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$$

-استنتاج ان (u_n) متزايدة تماما:

$$\text{لدينا، } -u_n^2 + 3u_n - 2 = (u_n - 2)(1 - u_n)$$

بما ان $1 < u_n < 2$ نجد، $-1 < u_n - 2 < 0$ و $-1 < 1 - u_n < 0$ منه نجد، $(u_n - 2)(1 - u_n) > 0$

من جهة اخرى ، $0 < u_n - 1 < 1$ اي $\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1) > 0$

اذن : $u_{n+1} - u_n > 0$ منه (u_n) متتالية متزايدة تماما .

(ج) التبرير ان المتتالية (u_n) متقاربة:

لدينا ، (u_n) متتالية متزايدة تماما و محدودة من الاعلى بالعدد 2 ، اذن فهي متقاربة .

(2) أ) تبين ان (v_n) هندسية:

من اجل كل عدد طبيعي n ،

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$$

منه (v_n) متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

(ب) كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{\ln 2}{2^n} \quad \text{من اجل كل عدد طبيعي } n$$

لدينا ، $v_n = \ln(u_n - 1)$ منه ، $u_n - 1 = e^{v_n}$ اي $u_n = e^{v_n} + 1$ منه : $u_n = e^{-\frac{\ln 2}{2^n}} + 1$

تعيين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\ln 2}{2^n}} + 1 = 1 + 1 = 2$ لان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln 2}{2^n} = 0$

(3) $w_n = u_n - 1$ ، حساب الجداء π_n :

$$\pi_n = w_0 \times w_1 \times \dots \times w_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \dots (u_n - 1) = e^{v_0} e^{v_1} \dots e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

حساب $v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\ln 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \ln 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

التنقيط

(الاعداد المركبة)

تصحيح التمرين الثالث (4 نقاط)

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة \mathbb{C} ، $0 = (z+1)^2 + [2+i(1+\sqrt{5})]^2$:

$$(z+1)^2 = -[2+i(1+\sqrt{5})]^2 \quad \text{تكافئ} \quad (z+1)^2 + [2+i(1+\sqrt{5})]^2 = 0$$

$$(z+1)^2 = [i(2+i(1+\sqrt{5}))]^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} z+1 = i(2+i(1+\sqrt{5})) \\ z+1 = -i(2+i(1+\sqrt{5})) \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$\begin{cases} z = -(2+\sqrt{5}) + 2i \\ z = \sqrt{5} - 2i \end{cases} \quad \text{يكافئ}$$

(2) أ) حساب $|z_C|$ و $|z_B - z_A|$ ثم انشاء النقط A ، B ، و C :

منه C تنتمي الى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 3
 منه B تنتمي الى الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 2

(ب) تبيان أن C هي صورة B بالتشابه المباشر $S\left(A; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$:-

$$z_C - z_A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} (z_B - z_A) \quad \text{معناه، } S(B) = C \text{ تكافئ}$$

$$z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} (z_B - z_A) + z_A \quad \text{يكافئ}$$

$$z_C = \frac{1+\sqrt{5}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} (z_B - z_A) + z_A = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1-i\sqrt{3}) - 1 + 2i$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4} (1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) - 1 + 2i$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4} (4) - 1 + 2i \quad \text{لدينا،}$$

$$= \sqrt{5} + 2i$$

$$= z_C$$

(3) أ) تعيين $z_{C'}$ لاحقة C' نظيرة C بالنسبة الى A :-

C' نظيرة C بالنسبة الى A معناه ، $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}$

$$z_{C'} - z_A = -(z_C - z_A) \quad \text{اي}$$

$$z_{C'} = -z_C + 2z_A \quad \text{منه}$$

$$z_{C'} = -\sqrt{5} - 2i - 2 + 4i \quad \text{منه}$$

$$z_{C'} = -(2 + \sqrt{5}) + 2i \quad \text{اذن،}$$

(ب) حساب $z_{B'}$:-

الرباعي $BC'B'C$ معناه $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$

$$z_{C'} - z_B = z_{B'} - z_C \quad \text{معناه}$$

$$z_{B'} = z_{C'} - z_B + z_C \quad \text{معناه}$$

$$z_{B'} = -2 - \sqrt{5} + 2i - 2i + \sqrt{3}i + \sqrt{5} + 2i \quad \text{معناه}$$

$$z_{B'} = -2 + i(2 + \sqrt{3}) \quad \text{منه،}$$

(ج) تبيان أن، $\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} (1-i\sqrt{3})$:-

$$\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-2 + 2i + \sqrt{3}i - \sqrt{5} - 2i}{2i - \sqrt{3}i - \sqrt{5} - 2i} = \frac{2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3}i)}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}i)} = \frac{[2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3}i)][\sqrt{5} - \sqrt{3}i]}{8}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} - 2\sqrt{3}i + 5 - 3 - 2\sqrt{15}i}{8} \quad \text{لدينا،}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{3}i)}{4}$$

كتابتة على الشكل الاسي:

$$\left| \frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} \right| = \left| \frac{1 + \sqrt{5}}{4} (1 - i\sqrt{3}) \right| = \left| \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right| |1 - i\sqrt{3}| = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \times 2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\arg \left(\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} \right) = \arg \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{4} (1 - i\sqrt{3}) \right] = \arg \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right) + \arg(1 - i\sqrt{3}) = 0 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) e^{i\frac{2\pi}{3}}, \text{ منه}$$

الاستنتاج:

$$\begin{cases} \frac{CB'}{CB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ (\overline{CB}; \overline{CB'}) = -\frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ منه } \begin{cases} \left| \frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} \right| = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \arg \left(\frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} \right) = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \text{ نستنتج } \frac{z_{B'} - z_C}{z_B - z_C} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

من جهة اخرى: C هي صورة B بالتشابه المباشر $S \left(A; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{\pi}{3} \right)$ معناه

$$\begin{cases} \frac{AC}{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ (\overline{B}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ منه } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ اي } z_C - z_A = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} (z_B - z_A)$$

$$(\overline{CB'}; \overline{CB}) = -(\overline{CB}; \overline{CB'}) \text{ احظ } (\overline{AB}; \overline{AC}) = (\overline{CB'}; \overline{CB}) \text{ و } \frac{AC}{AB} = \frac{CB'}{CB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ ومنه نجد:}$$

الانشاء:

التنقيط

(الدوال العددية)

تصحیح التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الاول:

0,25

من اجل كل عدد حقيقي x،

$$-4(e^x - 4) \left(e^x - \frac{1}{4} \right) = (e^x - 4)(-4e^x + 1) = -4e^{2x} + e^x + 16e^x - 4 = -4e^{2x} + 17e^x - 4 = g(x)$$

0,25

إشارة g(x) نلخصها في الجدول التالي:

x	0	$-\ln 4$	$\ln 4$	$+\infty$
$e^x - 4$	-	-	●	+
$e^x - \frac{1}{4}$	-	●	+	+
$g(x)$	-	●	+	●

$$e^x - 4 \geq 0 \text{ يكافئ } e^x \geq 4 \text{ يكافئ } e^x \geq \ln 4$$

$$e^x - \frac{1}{4} \geq 0 \text{ يكافئ } e^x \geq \frac{1}{4} \text{ يكافئ } e^x \geq -\ln 4$$

0,5

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)}$

0,25

(1) تبين ان: $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$

من اجل كل عدد حقيقي x ,

0,25

$$-\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x} = \frac{-4x(1-e^x) + 9e^x}{9(1-e^x)} = \frac{-4x + 4xe^x + 9e^x}{9(1-e^x)} = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)} = f(x)$$

(2) تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$$ax + b + \frac{1}{1-e^x} = ax + \frac{b(1-e^x) + 1}{1-e^x} = ax + \frac{-be^x + b + 1}{1-e^x} : \mathbb{R}^*$$

من اجل كل عدد حقيقي x من \mathbb{R}^* ، لدينا: $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$. بالمطابقة نجد: $a = -\frac{4}{9}$ و $b = -1$

0,25

منه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(x) = -\frac{9}{4}x - 1 + \frac{1}{1-e^x}$

0,25

(3) حساب نهايات الدالة f :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{9}{4}x - 1 + \frac{1}{1-e^x} \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{9}{4}x - 1 + \frac{1}{1-e^x} \right] = -\infty$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^x$	$+$	0	$-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

0,25

(4) حساب $f'(x)$:

من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم،

$$f'(x) = -\frac{4}{9} + \frac{e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{-4(1-e^x)^2 + 9e^x}{9(1-e^x)^2} = \frac{-4(1-2e^x+e^{2x}) + 9e^x}{9(1-e^x)^2} = \frac{-4e^{2x} + 17e^x - 4}{9(1-e^x)^2} = \frac{g(x)}{9(1-e^x)^2}$$

0,25

(ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

نلاحظ ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ و عليه:

f دالة متزايدة تماما على المجالين $[-\ln 4; 0[$ و $]0; \ln 4]$

f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 4]$ و $[\ln 4; +\infty[$

0,25

x	$-\infty$	$-\ln 4$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\ln 4)$	$+\infty$	$f(\ln 4)$	$-\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

0,25

(5) تبين انه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $f(-x) = -1 - f(x)$

$$f(-x) = -\frac{4}{9}(-x) - 1 + \frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{4}{9}x - 1 + \frac{e^x}{e^x(1-e^{-x})} = -1 + \frac{4}{9}x + \frac{e^x}{e^x - 1} \quad \text{لدينا،}$$

0,25

$$-1 - f(x) = -1 - \left[-\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x} \right] = -1 + \frac{4}{9}x + \frac{e^x}{e^x - 1}$$

0,5

منه، $f(-x) = -1 - f(x)$

الاستنتاج: لدينا، $f(-x) = -1 - f(x)$ اي $f(-x) + f(x) = -1$ منه النقطة $\Omega\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) .

6، أ) تبيان ان (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان لـ (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{4}{9}x - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1 - e^x} \right] = 0$$

بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{4}{9}x \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x}{1 - e^x} \right] = 0$$

بجوار $-\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ_1) و (Δ_2) :

$$\begin{cases} f(x) - \left(-\frac{4}{9}x - 1 \right) = \frac{1}{1 - e^x} \\ f(x) - \left(-\frac{4}{9}x \right) = \frac{e^x}{1 - e^x} \end{cases}$$

ندرس اشارة الفرق:

$1 - e^x \geq 0$ تكافئ $-e^x \geq -1$ تكافئ $e^x \leq 1$ اي $x \leq 0$ منه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - \left(-\frac{4}{9}x - 1 \right)$	+	-	-
$f(x) - \left(-\frac{4}{9}x \right)$	+	-	-

(C_f) يقع فوق (Δ_1) و (Δ_2) على المجال $]-\infty; 0[$

(C_f) يقع تحت (Δ_1) و (Δ_2) على المجال $]0; +\infty[$

7، الرسم:

