الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الاغواط | **ثـــانـويات من مدينة الأغواط**

امتحان بكالوريا تجريبي | **دورة مـــــــاي 2017**

الشعبة : الرياضيات | **يوم :15 مـــــــاي 2017**

اختبار في مادة الرياضيات | **المدة : 04 ساعات و نصف**

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التاليّين

الموضوع الأول

التمرين الأول(04.5 ن):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. نعتبر النقطتين $A(-\sqrt{2};1;0)$ و $B(0;0;-\sqrt{2})$

والمستوي (P) الذي معادلته الديكارتية : $x-y-z+\sqrt{3}=0$

1) أ/ بيّن أن المستقيم (AB) ليس عموديا على المستوي (P)

ب/ شكل معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار بالنقطتين A و B والعمودي على المستوي (P)

2) لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها O ومماسية للمستوي (P)

أ / أكتب معادلة ديكارتية لــ (S)

ب / تحقق أنّ المستوي (Q) يمس سطح الكرة (S)

ج/ نعتبر I و J نقطتي التماس لــ (S) مع المستويين (P) و (Q) . بيّن بطريقتين مختلفتين أنّ : $IJ=\sqrt{2}$

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق :

$x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$ حيث m وسيط حقيقي .

أ/ بيّن أن (S_m) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m

ب / عين مجموعة النقط I_m لمّا m يتغيّر في $\mathbb{R}$

ج/ بيّن أن جميع الكرات (S_m) تمرّ بدائرة ثابتة (C) موجودة في مستو يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r

التمرين الثاني(03.5 ن):

1) جد جميع الثنائيات المرتبة (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث : $x^3-y^3=631$.

2) أ/ ماهو باقي القسمة الاقليدية للعدد 111 على 7 .

ب/ عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 10^n علـــى 7 .

3) $\propto$ عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كمايلي : $\propto=\overline{999888777666555444333222111}$.

أ/ بيّن أنّ $\propto$ يكتب بدلالة العدد 111 .

ب/ ماهو باقي قسمة العدد $\propto$ على 7 .

التمرين الثالث: (05.5 نقاط)

1) نعتبر كثير الحدود $p(z)$ للمتغير المركب z حيث : $p(z) = z^3 + (2-\mathbf{i})z^2 + (4-2\mathbf{i})z - 4\mathbf{i}$

أ/ أحسب $p(i)$ ثمّ عيّن العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z :

$$p(z) = (z-i)(z^2 + az + b)$$

ب/ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$ ، ثمّ أكتب حلولها على الشكل المثلثي

2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}; \vec{u}; \vec{v})$. A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $Z_A = i$ و $Z_B = -1-\sqrt{3}i$. S التشابه المباشر في المستوي الذي مركزه O والذي يحوّل A إلى B .

أ/ أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عيّن نسبته وزاويته

ب/ لتكن النقطة A_n ذات اللا حقة Z_n و من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1} = S(A_n)$ ،

نسمي A_0 النقطة التي لاحقتها $Z_0 = i$

- ✓ عيّن لاحقتي النقطتين A_1 و A_2
- ✓ برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $Z_n = 2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$

ج/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = OA_n$ ، أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ثم تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ: $u_n = 2^n$

- ✓ نرمز بـ T_n إلى مجموع أطوال القطع المستقيمة $[A_0O], [A_1O] \dots\dots\dots\dots\dots\dots, [A_nO], [A_{n+1}O]$

أحسب المجموع T_n بدلالة n

3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $12x - 5y = 3$ .... (1)

أ/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) . لاحظ أنّ الثنائية $(4; 9)$ حل للمعادلة (1)

ب/ استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث تكون النقط A_n تنتمي إلى المحور الحقيقي الموجب

4) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}$ تخيلي صرف، ثم استنتج طبيعة المثلثات OA_nA_{n+3}

5) عيّن بدلالة n قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA_n}; \overrightarrow{OA_{2n}}\right)$ ، ثمّ استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث تكون النقط O، A_n و A_{2n} في استقامية

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- باستعمال قابلية اشتقاق الدالة $x \mapsto lnx$ عند1 ، بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1$ ثمّ استنتج أنّ : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

II – نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـــــ : $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أ/ بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال$[1;+\infty[$: $f(x) = lnx + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ب/ بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال$[1;+\infty[$: $x - 1 = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

ج/ بيّن أنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 . فسّر النتيجة بيانيا

2) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة f

ج) أرسم المنحنى $\left(C_f\right)$.

3) ليكن S مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$ ، A و B **نقطتان من** $\left(C_f\right)$ **فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3 والنقطتان** $P\left(1;2ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ ، $Q(3;0)$ **من المستوي**

أ/ أحسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث ABQ

ب/ استنتج أنّ : $2ln\left(1+\sqrt{2}\right) \le S \le 4ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. (لاحـــــظ أنّ : $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$)

III - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـــــ : $g(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ ، $\left(C_g\right)$ تمثيلها البياني.

1) بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال$[0;+\infty[$: $g(x) \ge 1$

2) أ/ ليكن y من $\mathcal{R}_+$ ،حل في $\mathcal{R}_+$ و بدلالة y المعادلة $f(x) = y$ ذات المجهول الحقيقي x ثم استنتج أنّه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من $\left(C_f\right)$ فإنّ $M'(y;x)$ نقطة من $\left(C_g\right)$

ب/ بين كيف يمكنك رسم المنحني $\left(C_g\right)$ انطلاقا من $\left(C_f\right)$ ؛ ارسم $\left(C_g\right)$ في نفس المعلم السابق و بلون مخالف.

3) ليكن S' مساحة الحيّز D' المحدد بالمنحنى $\left(C_g\right)$ والمستقيمات التي معادلاتها :

$$x = 0 \text{ ، } x = 2ln\left(1+\sqrt{2}\right) \text{ و } y = 3$$

أ/ بيّن أنّ : $S' = 6ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \int_0^{2ln\left(1+\sqrt{2}\right)} g(x)dx$

ب/ أحسب $\int_0^{2ln\left(1+\sqrt{2}\right)} g(x)dx$ ، ثمّ استنتج قيمة S

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الاغواط

ثـانويات ولاية الأغواط

التصحيح المفصّل للبكالوريا التجريبي

شعبة : الرياضيات

2017/2016

الموضـــوع الأول

التمرين الأول

1) أ/ تبيين أن المستقيم (AB) ليس عموديا على المستوي (P)

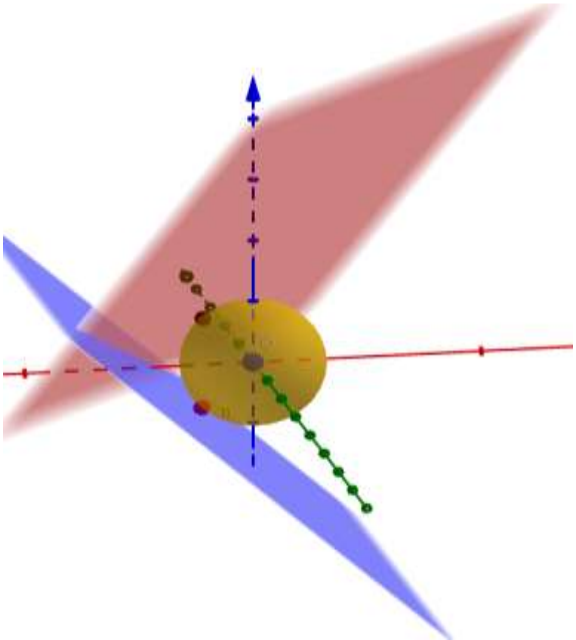
لدينا : $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2};-1;-\sqrt{2})$ و $\overrightarrow{n_p}(1;-1;-1)$ ، نلاحظ أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_p} = 2\sqrt{2}+1 \neq 0$ أي أن المستقيم (AB) ليس عموديا على المستوي (P)

ب/ ايجاد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المار بالنقطتين A و B والعمودي على المستوي (P)

ليكن $\overrightarrow{n_Q}(a;b;c)$ شعاع ناظم لـ (Q)

لدينا : $\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp (AB) \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_p} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \sqrt{2}a - b - \sqrt{2}c = 0 \\ a - b - c = 0 \end{cases}$ وبطرح المعادلة الاولى من الثانية نجد $a(\sqrt{2}-1) = c(\sqrt{2}-1)$

أي $a = c$ وعليه تكون $b = 0$ إذن $\overrightarrow{n_Q}(1;0;1)$ ومنه معادلة (Q) من الشكل $x+z+d=0$ وبماأن $B \in (Q)$ فإن $d = 2$ وعليه تكون $(Q) = x + z + \sqrt{2} = 0$



2) (S) سطح الكرة التي مركزها O ومماسية للمستوي (P) معناه :

$(S): x^2+y^2+z^2 = r^2$

و $r = d(O;(P)) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$ ومنه $(S): x^2+y^2+z^2 = 1$

ب / التحقق أنّ المستوي (Q) يمس سطح الكرة (S)

لدينا : $d(O;(Q)) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ ومنه المستوي (Q) يمس سطح الكرة (S)

ج/. تبيين أنّ : $IJ = \sqrt{2}$

ط1 : لدينا: $(P) \perp (Q)$ إذن $(OI) \perp (OJ)$ ومنه المثلث OIJ قائم في O

وحسب مبرهنة فيثاغورس : $IJ^2 = OI^2 + OJ^2 = 1 + 1 = 2$ ومنه $IJ = \sqrt{2}$

ط2: يمكن ايجاد احداثيات النقطتين I و J

لدينا : $\overrightarrow{OI} \parallel \overrightarrow{n_p}$ و $\overrightarrow{OJ} \parallel \overrightarrow{n_Q}$ وعليه تكون $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $I(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;-\frac{\sqrt{2}}{2})$ ومنه $IJ = \sqrt{2}$

3) أ/ تبيين أن (S_m) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m

لدينا : $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3} = 0$

أي: $[x-(m+1)^2]+[y+m^2]+[z+(m-1)^2]-(m+1)^2-m^2-(m-1)^2-2m\sqrt{3} = 0$

$$[x-(\mathrm{m}+1)]^2+[y+\mathrm{m}]^2+[z+(m-1)]^2 = 3m^2+2m\sqrt{3}+2$$

نلاحظ أنّه من أجل $m \in \mathcal{R}$, $3m^2+2m\sqrt{3}+2 > 0$ وعليه تكون (S_m) سطح كرة مركزها $I_m(m+1;-m;-m+1)$

ونصف قطرها $R_m = \sqrt{3m^2+2m\sqrt{3}+2}$

ب / تعيين مجموعة النقط I_m لمّا m يتغيّر في $\mathbb{R}$

لدينا $I_m(m+1;-m;-m+1)$ أي $\begin{cases} x = 1+m \\ y = -m \quad m \in \mathcal{R} \\ z = 1-m \end{cases}$ وعليه مجموعة النقط هي مستقيم يشمل النقطة $1;0;1$

و $\vec{v}(1;-1;-1)$ شعاع توجيه له

ج/ بيّن أن جميع الكرات (S_m) تمرّ بدائرة ثابتة (C) موجودة في مستو يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r

$M \in (S_m)$ $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+2my+2(m-1)z-2m\sqrt{3}=0$ أي

$x^2+y^2+z^2-2x-2z+m(-2x+2z+2y-2\sqrt{3})=0$ وهذا يعني أنّ:

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2z=0 \\ -2x+2z+2y-2\sqrt{3}=0 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=(\sqrt{2})^2 \\ -x+y+z-\sqrt{3}=0 \end{cases}$ وهي تقاطع سطح كرة مع المستوي (P)

لدينا : $d(w(1;0;1);(P))=1<\sqrt{2}=r'$ ومنه تقاطعهما هي دائرة مركزها $H(1-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};1+\frac{\sqrt{3}}{3})$ حيث

" H هي تقاطع المستقيم المار بالنقطة w والعمودي على (P) " ونصف قطرها r حيث $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$

التمرين الثاني:

1) ايجاد جميع الثنائيات المرتبة (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث : $x^3-y^3=631$.

بالقسمة الاقليدية للعدد x^3-y^3 على $x-y$ نجد : $x^3-y^3=(x-y)(x^2+y^2+xy)$

أي المعادلة السابقة تصبح $(x-y)(x^2+y^2+xy)=631$

بما أنّ 631 عدد أولي أي $631=631\times 1$ فإن : $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2+xy=631 \end{cases}$

لأنّ $x^2+y^2+xy>x-y$ و x ، y طبيعيان

إذن $y=x-1$ بالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة نجد : $x^2-x-210=0$ ولدينا $\Delta=841$ أي

$x_1=-14$ (حل مرفوض) و $x_1=15$ بالتعويض نجد $y=14$ ومنه توجد ثنائية وحيدة هي حل للمعادلة أي: $s=\{(15;14)\}$

2) أ/ ايجاد باقي القسمة الاقليدية للعدد 111 على 7 . لدينا : $111=15\times 7+6$ ومنه $111\equiv 6[7]$

ب/ تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 10^n على 7 .

$10^0\equiv 1[7]$ ،$10^1\equiv 3[7]$ ،$10^2\equiv 2[7]$ ،$10^3\equiv 6[7]$ ،$10^4\equiv 4[7]$ ،$10^5\equiv 5[7]$ ،$10^6\equiv 1[7]$،

ومنه جدول البواقي كمايلي:

قيم n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
البواقي	1	3	2	6	4	5

3) أ/ كتابة $\propto$ بدلالة العدد 111.

بقسمة العدد $\propto$ على 111 نجد : $\propto=111(9008007006005004003002001)$

ب/ باقي قسمة العدد $\propto$ على 7 . لدينا :

$111(9008007006005004003002001)=111(1.10^0+2.10^3+3.10^6+4.10^9+5.10^{12}+6.10^{15}+7.10^{18}+8.10^{21}+9.10^{24}$

و باستعمال السؤال 2) أ/ و 2) ب/ لدينا : $\propto\equiv 6(1+2\times 6+3\times 1+4\times 6+5\times 1+6\times 6+7\times 1+8\times 6+9\times 1)[7]$

أي : $\propto\equiv 870[7]$ ومنه $\propto\equiv 2[7]$ " لأنّ : $870\equiv 2[7]$ "

التمرين الثالث:

1) أ/ $p(i)=0$ ، تعيين a و b :

ومنه :

	1	$2-i$	$4-2i$	$-4i$
i	0	i	$2i$	$4i$
	1	2	4	0

$$p(z)=(z-i)(z^2+2z+4)$$

ب/ حل المعادلة $p(z)=0$ أي $z-i=0$ أو $z^2+2z+4=0$

ومنه حلول المعادلة هي: $Z_0=i$ ، $Z_1=-1-\sqrt{3}i$ ، $Z_2=-1+\sqrt{3}i$

- كتابة الحلول على الشكل المثلثي : $Z_0=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$ ، $Z_1=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

$$Z_2=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$$

أ/ كتابة العبارة المركبة للتشابه S ثم تعيين نسبته وزاويته : لدينا التشابه مركزه O أي العبارة المركبة $z'=az$

وبما أنّ : $B=S(A)$ فإنّ : $a=\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{i}=-\sqrt{3}+i$ ومنه $z'=(-\sqrt{3}+i)z$

حيث نسبته هي $|a|$ أي 2 و زاويته هي $arg(a)$ أي $\frac{5\pi}{6}$

ب/ تعيين لاحقي النقطتين A_1 و A_2 : لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $Z_{n+1}=(-\sqrt{3}+i)Z_n$

$$Z_1=(-\sqrt{3}+i)Z_0=-1-\sqrt{3}i \text{ ، } Z_2=(-\sqrt{3}+i)Z_1=2\sqrt{3}+2i$$

* برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $Z_n=2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$ .... (p_n)

نستعمل البرهان بالتراجع : – التحقق: من أجل $n=0$ $Z_0=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ .... محققة

نفرض أنّ : صحيحة (p_n) أي $Z_n=2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$ ونبرهن صحة (p_{n+1}) أي

$$Z_{n+1}=2^{n+1}e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6})}$$

لدينا : $Z_{n+1}=(-\sqrt{3}+i)Z_n$ أي $Z_{n+1}=\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$ اي $Z_{n+1}=2^{n+1}e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6})}$

أي (p_{n+1}) صحيحة ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $Z_n=2^n e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$

ملاحظـــــة : " بالامكان الاجابة على هذا السؤال باستعمال تركيب التحويلات "

ج/ اثبات أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{OA_{n+1}}{OA_n}=\frac{|(-\sqrt{3}+i)Z_n|}{|Z_n|}=\frac{|-\sqrt{3}+i|.|Z_n|}{|Z_n|}=2$ ومنه (u_n) هندسية أساسها $q=2$ وحدها الأول

$u_0=OA_n=|Z_0|=1$ ، التحقق $u_n=u_0\times q^n=2^n$

✓ حساب المجموع T_n بدلالة n :

$$T_n=u_0+u_1+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+u_{n+1}=1\left(\frac{1-2^{n+2}}{1-2}\right)=2^{n+2}-1$$

3) أ/ حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $12x-5y=3$

نلاحظ أنّ : $12(4)-5(9)=3$ إذن الثنائية $(4;9)$ حل للمعادلة

$\begin{cases} 12x-5y=3 \\ 12(4)-5(9)=3 \end{cases}$ بالطرح طرفا لطرف نجد $12(x-4)-5(y-9)=0$ أي $12(x-4)=5(y-9)$

باستعمال مبرهنة غوص نجد $\begin{cases} x=5k+4 \\ y=12k+9 \end{cases}$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ب/ استنتاج مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث تكون النقط A_n تنتمي إلى المحور الحقيقي الموجب

معناه $\arg(Z_n)=2k\pi$ أي $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)=2k\pi$ ومنه $5n+3=12k$ فينتج لنا $12k-5n=3$

وحسب السؤال 3) أ/ نجد : $\begin{cases} k=x=5\propto+4 \\ n=y=12\propto+9 \end{cases}$ ومنه $n=12\propto+9$ مع $\propto\in\mathbb{N}$

4) تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}$ تخيلي صرف

لدينا : $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}=\frac{2^{n+3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+3)\pi}{6}\right)}}{2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}}=\frac{2^n\times2^3e^{i\left(\frac{5n\pi}{6}+\frac{15\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}{2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}}=8.e^{i\frac{5\pi}{2}}=8.e^{i\frac{\pi}{2}}=8i$

✓ استنتاج طبيعة المثلثات OA_nA_{n+3}:

لدينا $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}=8i$ معناه $arg\left(\frac{Z_{n+3}}{Z_n}\right)=\frac{\pi}{2}$ أي $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{n+3}}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلثات OA_nA_{n+3} قائمة في O

5) تعيين بدلالة n قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)$

لدينا : $\frac{Z_{2n}}{Z_n}=\frac{2^{2n}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(2n)\pi}{6}\right)}}{2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}}=2^n.e^{i\frac{5n\pi}{6}}$ ومنه $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)=\arg\left(\frac{Z_{2n}}{Z_n}\right)=\frac{5n\pi}{6}$

✓ استنتاج قيم n حتى تكون النقط O، A_n و A_{2n} في استقامية

معناه : $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)=k\pi$ أي $\frac{5n\pi}{6}=k\pi$ أي $5n=6k$ أي $\frac{n}{6}=\frac{k}{5}=\propto$ ومنه $n=6\propto$ مع $\propto\in\mathbb{N}$

التمرين الرابع:

I- * الدالة $x\mapsto lnx$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ حيث : $(lnx)'=\frac{1}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x-ln1}{x-1}=\frac{1}{x}=1$ أي: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

* بوضع $X=x-1$ تصبح $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{X\to0}\frac{\ln(X+1)}{X}=1$

II- 1) أ/ بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $f(x)=lnx+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

لدينا : $\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\right)=ln\left(x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\right)=lnx+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ومنه : $f(x)=lnx+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$ " ملاحظة : $\sqrt{x^2}=|x|$ ، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ مع $a>0$ و $b>0$ "

ب/ تبيين انّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $x-1=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{x}{x}\sqrt{(1-x^2)\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$ وهو المطلوب

ج/ تبيين أنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1

لدينا $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{ln(x)}{x-1}+\lim_{x\to1}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\frac{1}{x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=+\infty$ ومنه الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1

التفسير: المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور التراتيب عند النقطة التي فاصلتها 1

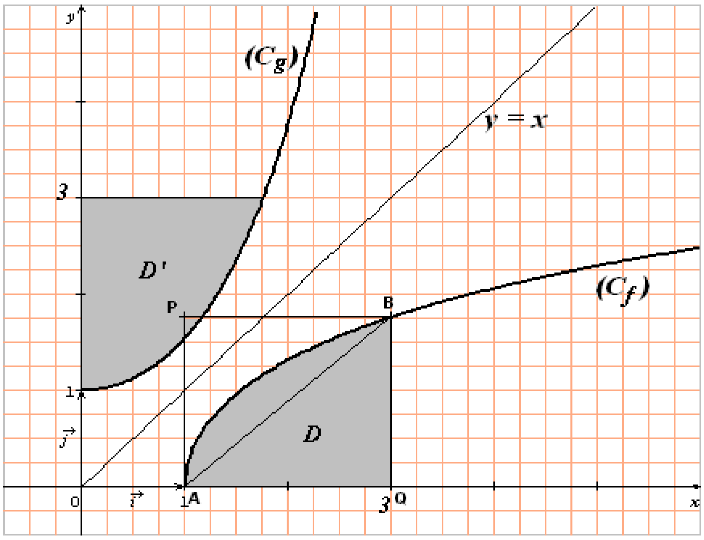
2) أ/ $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=+\infty$$

ب/ f دالة قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و $f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

ج) رسم المنحنى (C_f)



3) أ/ حساب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث ABQ

النقطة A من (C_f) فاصلتها 1 أي $A(1;0)$، كذلك B من (C_f) فاصلتها 3 أي $B(3;f(3))$ حيث

$$f(3)=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)=2ln(1+\sqrt{2})$$

✓ مساحة المثلث ABQ تساوي : $f(3)\ ua$

✓ مساحة المستطيل $APBQ$ تساوي : $2f(3)\ ua$

ب/ نلاحظ أنّ المساحة S محصورة بين مساحة المثلث ABQ و مساحة المستطيل $APBQ$

إذن : $2ln\left(1+\sqrt{2}\right)\le S\le 4ln(1+\sqrt{2})$

1) تبيين انّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $g(x) \geq 1$

لدينا : $g(x)-1=\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{2e^{x}}=\frac{(e^{2x}-1)^2}{2e^{x}} \geq 0$ ومنه $g(x) \geq 1$

2) أ/ ليكن y من $\mathcal{R}_+$، حل في $\mathcal{R}_+$ و بدلالة y المعادلة $\mathrm{f}(x)=y$

$f(x)=y$ أي $\ln(x+\sqrt{x^2-1})=y$ أي $\sqrt{x^2-1}=e^{y}-x$

بتربيع الطرفين $x^2-1=e^{2y}-2xe^{y}+x^2$ ومنه حل المعادلة هو $x=\frac{e^{2y}+1}{2e^{y}}$

✓ $M(x;y)$ نقطة من (C_f) معناه $f(x)=y$ و بما أنّ $g[f(x)]=x$ فإن : $M'(y;x)$ نقطة من (C_g)

ب/ تبيين كيف يمكنك رسم المنحني (C_g) انطلاقا من (C_f)

بما أنّ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ فإنّ المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ " المنصف الأول"

3) أ/ بيّن أنّ : $S'=6ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

S' مساحة الحيّز D' المحدد بالمنحني (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها : $x=0$ ، $x=2ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$

$$S'=\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}[3-g(x)]dx=[3x]_0^{2ln(1+\sqrt{2})}-\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$$

$$=6ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$$

ب/ حساب $\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

$$\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx=\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})dx=\left[\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\right]_0^{2ln(1+\sqrt{2})}=$$

$$\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2\right]$$

ومنه : $\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx=2\sqrt{2}$

✓ استنتاج قيمة S : بما أنّ المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ فإنّ $D=D'$ ومنه إذن $S=S'$:

$$S=S'=6ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=6ln(1+\sqrt{2})-2\sqrt{2}\ ua$$

انتهى بحمد الله وبفضله تصحيح الموضوع الأول من البكالوريا التجريبي 2017 مادة الرياضيات للأقسام النهائية شعبة الرياضيات

لاتنسونا من صالح دعائكم

بالتوفيق والنجاح

الأستاذ : تونســـــــــي ن