الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية غليزان — **المستوى:** السنة الثالثة

السنة الدراسية: 2021_2022 — **الشعبة:** تسيير واقتصاد

ثانوية بلحاج جلول بغدادي –برمادية — **المدة:** 3 ساعات ونصف

إمتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح إختيار أحد الموضوعين و الإجابة عليه بخط واضح

الموضوع الأول

التمرين الأول:

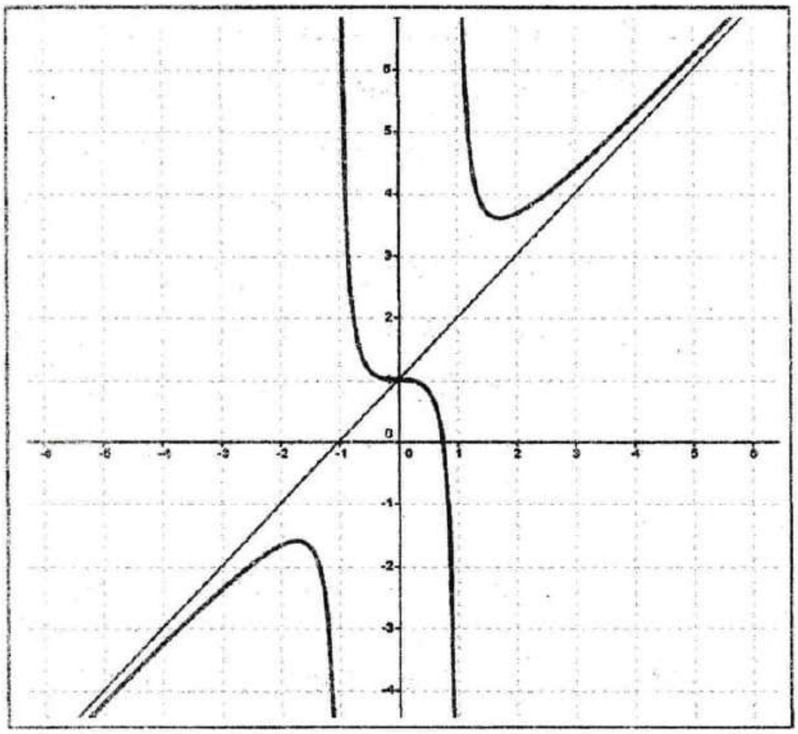
I) أذكر ان كانت الجمل التالية صحيحة أو خاطئة مع التبرير في كل حالة:

1) مجموعة حلول المعادلة: $2\ln(x)-\ln(5x-6)=0$ في $\mathbb{R}$ هي: $S=\{2;3\}$

2) مجموعة حلول المتراجحة: $\ln(2-x)+\ln(x+3)-\ln 4\geq 0$ هي: $s=[-2;1]$

3) القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{1}{2}x^3+3x$ على المجال $[0;2]$ تساوي: 0

4) العدد $A=\int_1^3\frac{2x}{x^3}dx$ يساوي: $\frac{4}{3}$



II) f الدالة المعرفة على $R-\{-1;1\}$ بـ:

$f(x)=\frac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ و (C) تمثيلها البياني

في الشكل المقابل

1) بقراءة بيانية أجب على ما يلي:

أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]0,5;1[$ •

ب- شكل جدول اشارة الدالة f.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f.

د- جد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (D)

ه- أكتب معادلة للمستقيم (D).

2) باستعمال عبارة الدالة f:

أ) بين أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

ب) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ: $g(x)=\frac{|x|^3+x^2-1}{x^2-1}$.

- بين أن الدالة g زوجية. ماذا تستنتج؟
- اشرح كيف يمكن انشاء المنحنى الممثل للدالة g انطلاقا من (C)، ثم انشئه.

التمرين الثاني:

I) g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-2x^2+2-\ln(x)$.

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أحسب $g(1)$، و استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{-1+\ln x}{x}-2x+4$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=-2x+4$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

3) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

5) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين بالضبط α و β حيث: $\alpha \in]0,4;0,6[$ و $\beta \in]1,8;2[$.

6) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة ذات الفاصلة (1) موازيا لمحور الفواصل، ثم أكتب معادلته.

7) أرسم (Δ) ، (C_f) و (T).

8) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=-\ln x+\dfrac{1}{2}(\ln x)^2-x^2+4x$

أ- بين أن الدالة F دالة أصلية لـ f على المجال $]0;+\infty[$.

ب- أحسب بـ cm^2 المساحة A : للحيز المستوي المحدد بـالمنحنى (C_f) و المستقيمين ذوالمعادلتين: $x=1$ و $x=\dfrac{3}{2}$

التمرين الثالث:

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^4-4x-3$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $4(x^3-1)=4(x-1)(x^2+x+1)$ ، ثم أدرس تغيرات الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين بالضبط α و β حيث: $-0,7 \prec \alpha \prec -0,69$ و $1,78 \prec \beta \prec 1,79$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3-1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

2) – أ) عين الأعداد الحقيقية: a , b , c حيث من أجل $x \neq 1$: $f(x)=ax+\dfrac{bx+c}{x^3-1}$.

– ب) أثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل.

– ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

– د) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

3) - أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f'(x)=\dfrac{x^2.g(x)}{(x^3-1)^2}$.

– ب) إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

5) أنشئ (T) و (C_f). (تعطى $f(\alpha)\approx -0,9$ و $f(\beta)\approx 3,3$).

6) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{x^4+1}{|x^3-1|}$

أ) بين أن: $h(x)=f(x)$ من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$.

و أن $h(x)=-f(x)$ من أجل كل x من المجال $]-\infty;1[$.

ب) إشرح كيف يتم رسم (C_h) المنحنى الممثل للدالة h إنطلاقا من المنحنى (C_f)، ثم انشئه في المعلم السابق.

التمرين الرابع :

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$

I. عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. في كل ما يلي: $\alpha = 3$

1) أحسب الحدود u_1 , u_2 , u_3 .

2) أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد $\boldsymbol{n}$ من$\mathbb{N}$ فإنّ: $\boldsymbol{u_n > 1}$

ب- جدّ اتجاه تغير المتتالية (u_n) .ماذا تستنتج؟

3) لتكن (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - 1$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 و أساسها q.

ب)أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$.

ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n)؟

4) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

إنتهى الموضوع الأول

الحل المفصل تجدونه في
رياضيات ثانوي مواضيع.حلول.ملخصات FB:
نتمنى نجاحكم في إمتحان البكالوريا جوان 2022 أستاذ المادة بصديق أمحمد

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

يمثل الجدول التالي تطور إنتاج سنوي بالطن لأحد أنواع الأسماك في إحدى المجمعات المائية لتربية الأسماك:

السنة	2004	2005	2006	2007	2008	2009
x_i ترتيب السنوات	1	2	3	4	5	6
y_i الإنتاج	530	640	770	850	980	1115

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ المرفقة بالسلسلة الإحصائية في معلم متعامد (على محور الفواصل $2\ cm$ يمثل سنة واحدة، على محور التراتيب $1\ cm$ يمثل 100 طن من السمك).

2) عين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة.

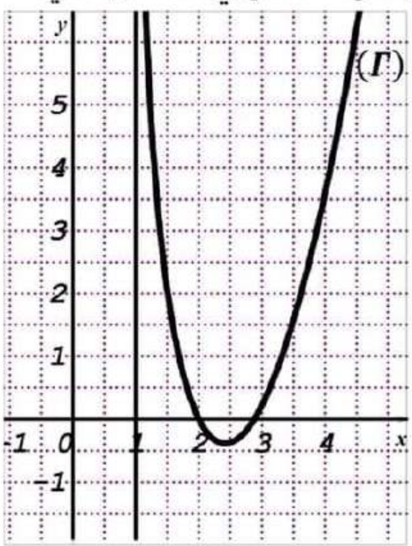
3) بيّن أن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y = 115x + 411,67$.

4) عين إنتاج هذا المجمع المائي في سنة 2022. (تعطى كل النتائج مدورة إلى 10^{-2})

التمرين الثاني:

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$

($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري). (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي:



1) بقراءة بيانية، عيّن عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

2) احسب $g(2)$.

3) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $2,87 < \alpha < 2,88$.

4) استنتج حسب قيم x، إشارة $g(x)$ في المجال $]1;+\infty[$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$f(x) = x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أوجد نهاية الدالة f عند $+\infty$. (لاحظ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$)

ب- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

جـ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

د- أوجد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f).

هـ- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا:

$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$، ($f'$ هي الدالة المشتقة للدالة f).

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha) \simeq 3,9$)

4) أ- عيّن مشتقة الدالة: $x \mapsto [\ln(x-1)]^2$، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب- احسب: $\int_2^5 f(x)dx$، فسر النتيجة هندسيا.

5) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

التمرين الثالث :

f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+100+\frac{57600}{x+1}$.

1) احسب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$.

2) أ. بيّن أنه من أجل كل من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ. جد الدالة الأصلية H للدالة $h: x\mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x=0$.

3) تنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تنمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5;200]$ بالدالة f أي أن: من أجل كل x من المجال $[5;200]$، $C_m(x)=f(x)$.

أ. ما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟

ب. نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونذكر أن $C'(x)=C_m(x)$.

جد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

التمرين الرابع :

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^x+2e^{-x}-3$.

اختر الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل.

		الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة جـ)
1	حلي المعادلة $f(x)=0$ هما	0 و $\ln 2$	0 و $-\ln 2$	0 و $\ln 3$
2	نهاية $f(x)$ عندما x يؤول إلى $+\infty$ هي	$-\infty$	$+\infty$	-3
3	على المجال $\left]\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$ الدالة f	متزايدة تماما	متناقصة تماما	ليست رتيبة
4	m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;2]$، مدور m إلى الوحدة هو:	1	2	-1

التمرين الخامس :

I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي:

$u_0=50$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=0,7u_n+6$ و $v_n=u_n-20$.

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0,7 يطلب تعيين حدها الأول v_0، وكتابة عبارة v_n بدلالة n.

2) أ. اكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n.

ب. عيّن اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة: ونرمز بـu_n لعدد المشتركين في سنة $2016+n$ أي $u_0=50$

1) ما هو عدد المشتركين في سنة 2022؟ ثم في سنة 2023؟

2) أ. برر العبارة $u_{n+1}=0,7u_n+6$.

ب. ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 3000 مشترك؟

إنتهى الموضوع الثاني

الحل المفصل تجدونه في

FB: رياضيات ثانوي مواضيع.حلول.ملخصات

نتمنى نجاحكم في إمتحان البكالوريا جوان 2022

أستاذ المادة بصديق أمحمد

تصحيح البكالوريا التجريبي شعبة 3 ت واقتصاد . # الموضوع (01) :

ثانوية إبن الحاج جلول بغدادي برمادية _ الاستاذ بصديق امحمد

التمرين (01) :

I)

1) # $2\ln(x) = \ln(5x-6)$, $\ln(x^2) = \ln(5x-6)$, $x^2 = 5x-6$; $x^2-5x+6=0$

معادلة من الدرجة الثانية $\Delta = 1$ ومنه الحلول $S=\{2;3\}$ (صحيحة)

2) # $\ln((2-x)\times(x+3)) - \ln(4) \geq 0$; $\ln((2-x)(x+3)) \geq \ln(4)$

معناه $(2-x)(x+3) \geq 4$ أي $-x^2-x+2 \geq 0$

أي $\Delta = 9$ والحلول $S=\{-2;1\}$ ومنه

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$F(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه الحلول $S=[-2;1]$ صحيحة .

3) # $I = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a}\,dx = \frac{1}{2-0}\left(F(2)-F(0)\right)$ avec $F(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{3x^2}{2} + C$

ومنه : $= \frac{1}{2}(8-0) = 4$ خاطئة .

ومنه القيمة المتوسطة هي : 4 .

4) # $A = \int_1^3 \frac{2x}{x^3}\,dx = 2\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = 2\left(F(3)-F(1)\right)$ avec $F(x) = -\frac{1}{x} + C$.

ومنه

$A(x) = 2\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{4}{3}$. صحيحة

II)

أ) $f(x)=0$ معناه البيان $(\mathcal{C}_f)$ يقطع محور الفواصل ومن البيان المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال $]0{,}5;1[$ ، f مستمرة و متناقصة تماما و $f(0{,}5)\times f(1)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة .

ب) جدول الإشارة

x	$-\infty$		-1		α		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

ج) جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-1{,}7$		-1		1		$1{,}7$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-1{,}5$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$3{,}5$	↗ $+\infty$

د- الوضع النسبي :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
الوضع النسبي		$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)	‖	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)	$(\Delta)\cap(\mathcal{C}_f)$ $(0;1)$	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)	‖	$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)	

⑤ - معادلة المستقيم من الشكل $y=ax+b$ أي $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-0}{0-(-1)}=1$ / $\begin{matrix}(1,0)\\(-1;0)\end{matrix}\in(\Delta)$

و b ترتيبة تقاطع (Δ) مع $(y'y)$ ومنه: $y=x+1$

⑥ تبيان أن $A(0,1)$ مركز تناظر لـ $(\mathcal{C})$ أي $f(-x)+f(x)=2$

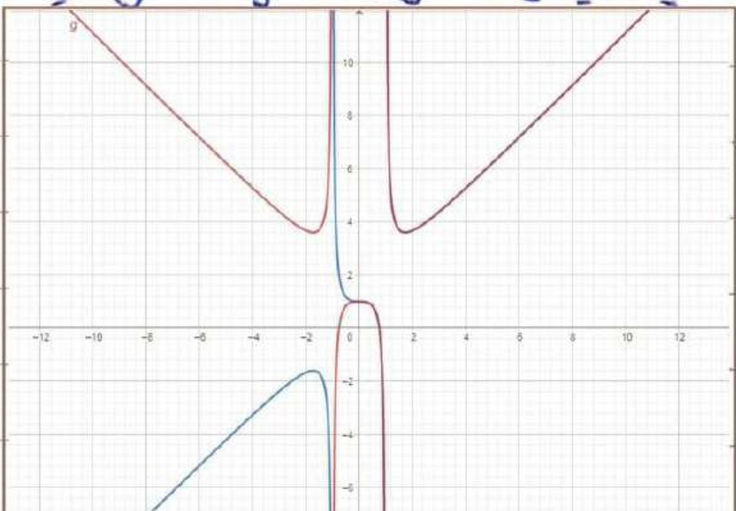
ومنه: $f(-x)+f(x)=\frac{-\cancel{x^3}+x^2-1}{x^2-1}+\frac{\cancel{x^3}+x^2-1}{x^2-1}=2$

ومنه $A(0,1)$ مركز تناظر لـ $(\mathcal{C})$

$$\begin{cases}\Omega(\alpha;\beta)\\ f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta\end{cases}$$

نلاحظ أن الدالة $g(x)=f(|x|)$ والقيمة المطلقة تحقق $|x|=|-x|$ و $(-x)^2=x^2$

ومجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة إلى الصفر ومنه g دالة زوجية، بيانيا



يحقق التناظر المحوري
بالنسبة لمحور التراتيب

التمرين الثاني:

I) 1/ تغيرات الدالة f.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} -2x+2=2.\\ \lim\limits_{x\to 0} -\ln x=+\infty\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2+2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln x=-\infty\end{cases}$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ $\quad f'(x)=-4x-\frac{1}{x}$

لدينا $-4x<0$ و $-\frac{1}{x}<0$ على المجال $]0;+\infty[$ ومنه f' سالبة و f متناقصة تماما.

x	0		1		$+\infty$
f'	‖				
f	‖	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	
f	‖	$+$	0	$-$	

نلاحظ أن:

$f(1)=0$

ومنه إشارة الدالة:

II)

$$\begin{cases}f(x)=\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x}-2x+4\\ D_f=]0;+\infty[\end{cases}$$

1) حساب النهايات.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $\left(\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}=0 \;/\; \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \;/\; \lim_{x\to+\infty} -2x+4=-\infty\right)$

$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$ $\left(\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{-1+\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+}=-\infty \;/\; \lim_{x \underset{>}{\to} 0} -2x+4=4\right)$

2) - المستقيم المقارب المائل.

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+\ln x}{x}\right] = 0$ (أنظر السؤال ①)

ومنه $y=-2x+4$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

3) : الوضع النسبي :

معناه دراسة إشارة $f(x)-y$ أي $f(x)-y=\frac{-1+\ln x}{x}$

لدينا $x>0$ ومنه الإشارة من إشارة $-1+\ln(x)$; $-1+\ln x=0$

$\ln x = 1 \to x=e$

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-y$	||	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	||	$(\Delta)\downarrow(C_f)$	$(\Delta)\cap(C_f)$ $(e;-2e+4)$	$(\Delta)\uparrow(C_f)$	

$f(e)=-2e+4$

4) - دراسة تغيرات f.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1(-1+\ln x)}{x^2}-2=\frac{2-\ln x}{x^2}-2=\frac{2-\ln x-2x^2}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة f' من إشارة g.

x	0		α		1		β		$+\infty$
f'	||	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(1)=1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$f(1)=-1-2+4=1$

5) تحليل حلين باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة (شروطها محققة).

x	0		α		β		$+\infty$
f	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

6) من جدول التغيرات (C_f) يقبل قيمة حدية كبرى عند $x=1$ | $f(1)=1$; $f'(1)=0$

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1$ ومنه $\boxed{y=1}$ موازي لـ ([illegible]).

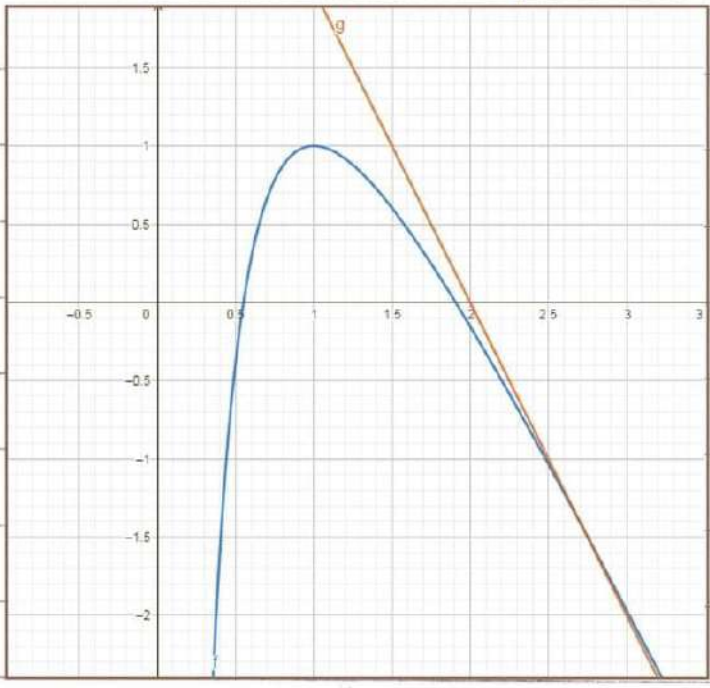
7) الرسم البياني.

8) تبيان أن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ أي $F'(x)=f(x)$.

$$F'(x)=-\frac{1}{x}+\left(2\times\frac{1}{x}\times\ln x\right)\times\frac{1}{2}-2x+4=-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}-2x+4=f(x)$$

محققة.

$$I=\int_{1}^{3/2} f(x)\,dx = F\left(\frac{3}{2}\right)-F(1) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2+\frac{3}{4}\quad (u.a).$$



التمرين (03):

I) 1) التبيان باستعمال النشر والتبسيط.

$$g'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$$
$$=\boxed{4}(x-1)\boxed{(x^2+x+1)}$$

إشارة g' من إشارة $x-1$ (لأن x^2+x+1 كثير حدود درجة ثانية $\Delta=-3$ ومنه إشارته من إشارة $a=1$ (موجبة))

$x-1=0$

$x=1$

$g(1)=-6$

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
g'			$-$		0		$+$		
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(1)=-6$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
g		$+$	0		$-$		0	$+$	

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

لأن أكبر درجة x^4 أسها عدد زوجي.

تقبل حلين حسب مبرهنة القيم المتوسطة (طريقة واضحة).

II) حساب النهايات

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

إشارة المقام x^3-1 من إشارة $x-1$

$x-1$	$-\infty$	$-$	1	$+$	$+\infty$
			0		

ومنه (C_f) تقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$.

ع) إيجاد قيم a و b و c .

$$\begin{array}{r|l} x^4+1 & x^3-1 \\ \hline -x^4+x & x \\ x+1 & \end{array}$$

أي $\frac{ax^4+x(b-a)+c}{x^3-1} = \frac{1x^4+0x+1}{x^3-1}$

بالمطابقة $a=1 \; ; \; c=1$

ومنه $b-a=0 \to b=a=1$

$f(x)= x + \frac{x+1}{x^3-1}$

إثبات أن $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-y] = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-y] = 0 \quad \left(\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{x+1}{x^3-1} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{1}{x^2} = 0 \right)$

ومنه الوضع النسبي

$f(x)-y = f(x) - x = \frac{x+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x-1)} \leftarrow$ من الجزء (01)

لدينا ($x^2+x-1 > 0$ ، أنظر جزء (01)) ومنه إشارة الفرق من إشارة $(x-1)$ و $(x+1)$.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	‖	$+$
$x-1$	$-$		$-$	‖	$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	$(\Delta)\uparrow(C_f)$	$(\Delta)\cap(C_f)$ $(-1,-1)$	$(\Delta)\downarrow(C_f)$	‖	$(\Delta)\uparrow(C_f)$

$x+1$: $-\infty \quad - \quad \underset{0}{-1} \quad + \quad +\infty$

$x-1$: $-\infty \quad - \quad \underset{0}{1} \quad + \quad +\infty$

3)

$f'(x) = \frac{4x^3(x^3-1)-3x^2(x^4+1)}{(x^3-1)^2} = \frac{4x^6-4x^3-3x^6-3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{x^6-4x^3-3x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{x^2 g(x)}{(x^3-1)^2}$

ومنه

إشارة f' من إشارة g ($x^2>0$ ، $(x^3-1)^2>0$).

x	$-\infty$		α		1		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

05/07 sujet 1 3Ges

معادلة المماس عند $x=-1$.

$y = f'(-1)(x+1) + f(1)$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

$f'(-1) = \frac{1}{2} \; ; \; f(-1) = -1$ ($(-1,-1)$ نقطة تماس) .

$h(x)$ دالة معرفة من الشكل $h(x)=|f(x)|$ معناه دراسة إشارة $f(x)$

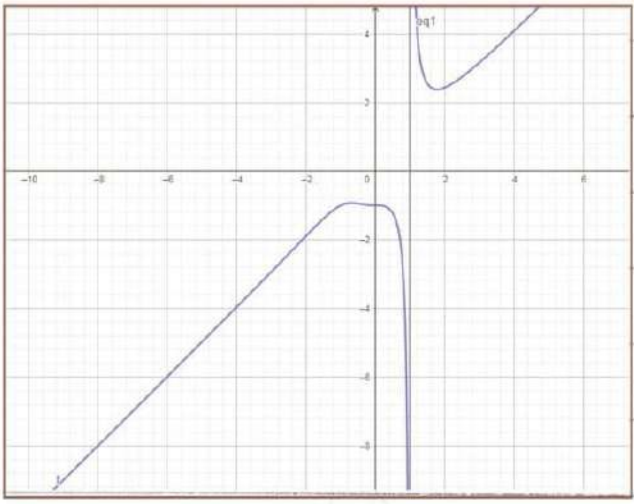
فماسبق $x^4+1>0$ و x^3-1 إشارتها من إشارة $x-1$.

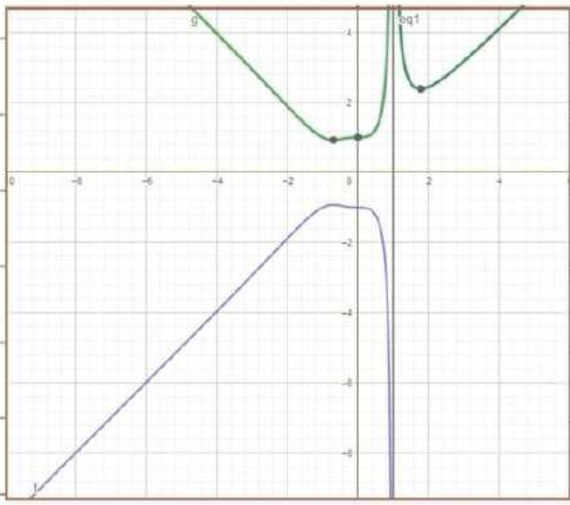
$$h(x)=|f(x)|=\begin{cases} f(x) \; ; x\in]1;+\infty[\\ -f(x) \; ; x\in]-\infty;1[\end{cases}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	

نلاحظ (C_f) و (C_h) متطابقان $]1;+\infty[$

(C_f) و (C_h) متناظران بالنسبة لـ (xx') . $]-\infty;-1[$





التمرين الرابع:

1) تعيين قيمة α حتى تكون u_n ثابتة معناه $u_{n+1}-u_n=0$ وكل حدودها متساوية وتساوي الحد الأول $u_0=u_1=\dots=u_n=u_{n+1}=\alpha$

ومنه $\alpha=\frac{1}{5}\alpha+\frac{4}{5}$

نحل المعادلة ذات مجهول α ونجد : $\alpha=1$.

2) نضع $\alpha=3$.

حساب الحدود: $u_1=\frac{1}{5}u_0+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\times 3+\frac{4}{5}=7/5$

$u_2=\frac{27}{25}$

$u_3=127/125$

البرهان بالتراجع:

من أجل الحد الأول $u_0>1$ لأن $3>1$ محققة .

نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة $u_n>1$ ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$.

لدينا $u_n>1 \xrightarrow{1/5\times} \frac{1}{5}u_n>\frac{1}{5} \xrightarrow{4/5+} \frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}>1$

ومنه $u_{n+1}>1$ محققة .

2) إيجاد اتجاه تغير معناه إشارة $U_{n+1} - U_n$

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - U_n = U_n\left(\frac{1}{5} - 1\right) + \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}U_n + \frac{4}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}\underbrace{(-U_n+1)}$

$\oplus$ $\ominus$

لأن $U_n > 1$ و $1 - U_n < 0$، الفرق سالب ومنه U_n متناقصة.

U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة.

V_n هندسية

$V_n = U_n - 1 \longrightarrow U_n = V_n + 1$

$V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}U_n - \frac{1}{5}$.

$V_{n+1} = qV_n$

نعوض

$V_{n+1} = \frac{1}{5}(V_n + 1) - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}V_n + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}V_n$

ومنه $q = \frac{1}{5}$ و $V_0 = U_0 - 1 = 3 - 1 = 2$

عبارة الحد العام $V_n = V_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

وعبارة U_n $U_n = V_n + 1 = 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

$\to 0$

ومنه $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1 = 1$

مجموع متتالية هندسية $S_n = V_0 + \dots + V_n$

عدد حدودها $n+1$، وأساسها $q = 1/5$ وحدها الأول $V_0 = 2$

$S_n = 2\left(\frac{(1/5)^{n+1} - 1}{1/5 - 1}\right)$.

$S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ $\to U_n = V_n + 1$.

مجموع متتالية عددية نحولها بدلالة المتتالية الهندسية V_n

$= V_0 + 1 + V_1 + 1 + \dots + V_n + 1$.

$= \underbrace{V_0 + V_1 + \dots + V_n}_{\text{مجموع متتالية هندسية } S_n} + \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{\text{مجموع حدود ثابتة}}$

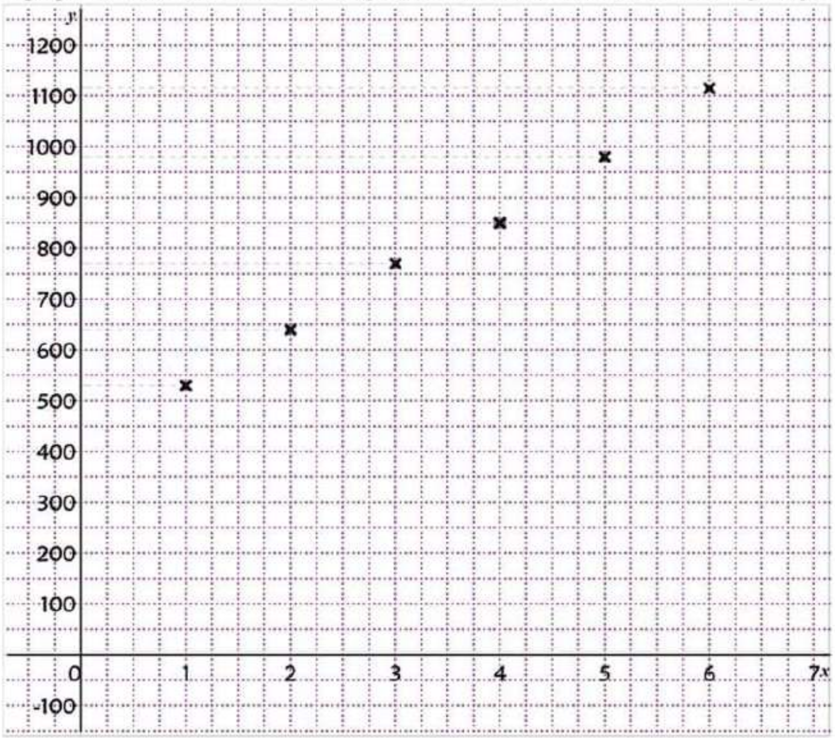
$= S_n + 1(n+1)$.

07

حل التمرين الأول:

1)تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ المرفقة بالسلسلة الإحصائية في معلم متعامد:

(على محور الفواصل $2\ cm$ يمثل سنة واحدة، على محور التراتيب $1\ cm$ يمثل 100 طن من السمك)



2)تعيين إحداثيي النقطة المتوسطة G لهذه السحابة:

لدينا: $G(\overline{x};\overline{y})$،

حيث:
$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3,5 \\ \overline{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} y_i}{6} = \dfrac{530+640+770+850+980+1115}{6} = \dfrac{4885}{6} = 814,17 \end{cases}$$

ومنه: $\boxed{G(3,5;\ 814,17)}$.

3)تبيان أن معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي، $y = 115x + 411,67$:

معادلة مستقيم الانحدار من الشكل: $y = ax + b$ حيث

$$a = \frac{\mathrm{cov}(x;y)}{V(x)} = \frac{\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i\right) - \overline{x}.\overline{y}}{\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$ و $b = \overline{y} - a\overline{x}$ (لأن G تنتمي إلى هذا المستقيم)

ولحساب a نستعين بالجدول التالي:

x_i	1	2	3	4	5	6	المجموع Σ
y_i	530	640	770	850	980	1115	
$x_i \cdot y_i$	530	1280	2310	3400	4900	6690	19110
$(x_i - \overline{x})^2$	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25	17,5

بالتعويض نجد: $\dfrac{3185-2849,595}{\frac{17,5}{6}} = a = \dfrac{\left(\frac{19110}{6}\right)-(3,5\times814,17)}{\frac{17,5}{6}}$ ومنه: $a \simeq 115$.

ولدينا: $b = \overline{y} - a\overline{x} = 814,17 - 115(3,5) = 411,67$ إذن: $\boxed{y = 115x + 411,67}$.

4)تعيين إنتاج هذا المجمع المائي في سنة 2015: (تعطى كل النتائج مدورة إلى 10^{-2})

لدينا: ترتيب السنة 2015 هو 19 و $x = 2022 - 2004 + 1 = 19$.

ومنه: من أجل $x = 12$ نجد $y = 115(19) + 411,67 = 2596,67$

أي: إنتاج هذا المجمع المائي في سنة 2022 هو 2596.67 طن.

حل التمرين الثاني

I) لدينا: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ و $D_g =]1; +\infty[$.

(Γ) التمثيل البياني لـ g في معلم متعامد ومتجانس.

1) تعيين بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$:

بما أن (Γ) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين؛ فإن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين متمايزين.

2) حساب $g(2)$:

بالتعويض نجد: $g(2) = (2)^2 - 2(2) - 4\ln(2-1) = 0$.

3) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $2,87 < \alpha < 2,88$:

لدينا: g **مستمرة ومتزايدة تماما** على المجال $[2,87; 2,88]$

(لأن من البيان نلاحظ أنها **متزايدة تماما** على المجال $[2,5; +\infty[$)

ولدينا: $\begin{cases} g(2,87) \simeq -0,0069 \\ g(2,88) \simeq 0,0093 \end{cases}$، أي: $g(2,87) \times g(2,88) < 0$

إذن: **حسب مبرهنة القيم المتوسطة** المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $2,87 < \alpha < 2,88$.

4) استنتاج حسب قيم x، إشارة $g(x)$ في المجال $]1; +\infty[$:

من البيان وحسب الأسئلة السابقة ينتج:

x	1		2		α		$+\infty$
$g(x)$	▮	+	0	-	0	+	

II) لدينا: $f(x) = x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$ و $D_f =]1; +\infty[$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ) إيجاد نهاية الدالة f عند $+\infty$: (علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

بوضع: $\boxed{X = x - 1}$ (لما $x \to +\infty$، فإن $X \to +\infty$)

نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \left(X - 2 + 4\frac{\ln X}{X} + \frac{5}{X}\right) = +\infty$

(لأن $\lim\limits_{X\to+\infty}(X-2) = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{5}{X} = 0$)

ب) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \left(x - 3 + \frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}\right) = -\infty$.

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \ln(x-1) = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}}(x-1) = 0^+$)

تفسير النتيجة هندسيا:

بما أن: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = -\infty}$، فإن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{x = -1}$ (الموازي لمحور التراتيب) مقارب للمنحنى (C_f).

جـ) تبيان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

نبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - y] = 0$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-3)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(4\frac{\ln X}{X} + \frac{5}{X}\right) = 0$

إذن: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د) إيجاد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f):

نحل المعادلة $f(x) = x - 3$ في المجال $]1; +\infty[$.

لدينا: $f(x) = x - 3$ معناه: $4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 0$

ومنه: $\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1} = 0$

وعليه: $4\ln(x-1) + 5 = 0$ و $x - 1 > 0$

وبالتالي: $\boxed{x = e^{-\frac{5}{4}} + 1}$؛ (وهي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f)).

هـدراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x-3)$.

لدينا: $f(x)-(x-3)=\frac{4\ln(x-1)+5}{x-1}$، ومنه:

إشارة الفرق $f(x)-(x-3)$ من إشارة البسط $4\ln(x-1)+5$ (لأن $x-1>0$ على المجال $]1;+\infty[$)

نضع: $4\ln(x-1)+5>0$ نجد: $x>e^{-\frac{5}{4}}+1$ **إذن:**

x	1		$e^{-\frac{5}{4}}+1$		$+\infty$
$4\ln(x-1)+5$		-	0	+	
$f(x)-(x-3)$		-	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

2) لتبيان أنه من أجل كل عدد x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا، $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x)=1+4\left(\frac{\frac{1}{x-1}\times(x-1)-1\times\ln(x-1)}{(x-1)^2}\right)-\frac{5(1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2+4-4\ln(x-1)-5}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-4\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

ومنه: $\boxed{f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}}$ (وهو المطلوب).

باستنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^2}$، ومنه: لـ$f'(x)$ و$g(x)$ **نفس إشارة** وعليه:

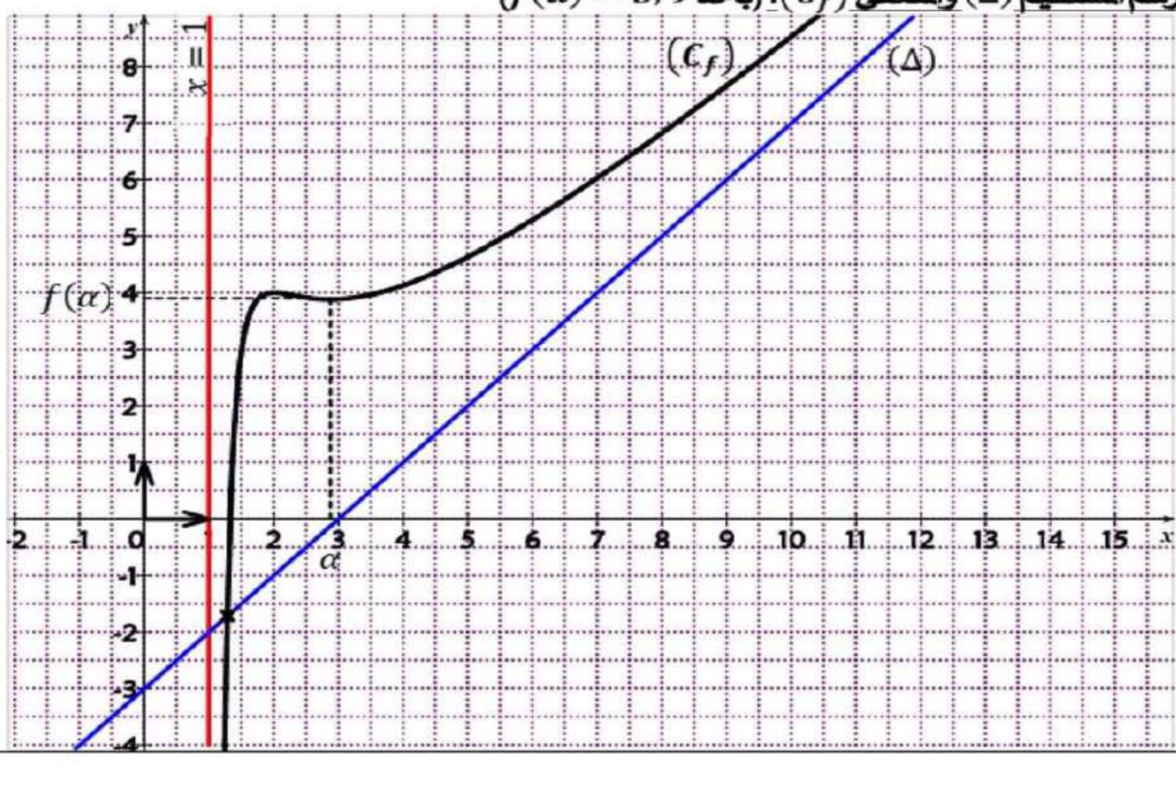
x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty;2]$ و$[\alpha;+\infty[$، و**متناقصة تماما** على المجال $[2;\alpha]$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	1		2		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f): (نأخذ $f(\alpha)\simeq 3,9$)



4) لتعيين مشتقة الدالة $x \mapsto [\ln(x-1)]^2$، ثم استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

نضع: $h(x) = [\ln(x-1)]^2$، h قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$، ولدينا:

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{x-1} \times [\ln(x-1)]^1 = 2\frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)$ أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

ب- حساب $\int_2^5 f(x)dx$:

لدينا: $\int_2^5 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)\right]_2^5$

ومنه: $\int_2^5 f(x)dx = \left[\frac{25}{2} - 15 + 2[\ln(4)]^2 + 5\ln(4)\right] - [-4] = 8[\ln 2]^2 + 10\ln 2 + \frac{3}{2}$

تفسير النتيجة هندسيا:

التكامل $\int_2^5 f(x)dx$ هو **مساحة** الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = 2$ و $x = 5$.

5) قيم الوسيط الحقيقي m وهي عدد فواصل تقاطع المستقيم ذو المعادلة $y = m$ ومنحنى الدالة (c_f)

$m \in]-\infty; f(\alpha)[$ لها حل وحيد

$m = f(\alpha)$ لها حلين احدهما مضاعف α

$m \in]f(\alpha); 4[$ لها ثلاثة حلول متمايزة

$m = 4$ لها حلين احدهما مضاعف 2

$m \in]4; +\infty[$ لها حل وحيد

التمرين الثالث

لدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$ و $D_f =]-1;+\infty[$.

1) حساب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1) = 0^+$.

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{57600}{x+1} = 0$.

2) لتبيان أنه من أجل كل من المجال $]-1;+\infty[$، $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$، ولدينا:

$$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x(x+1))^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x^2+x)^2 - (240)^2}{(x+1)^2}$$

وبالتالي: $\boxed{f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}}$.

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $x^2 + x + 240 > 0$ (لأن مميزه **سالب تماما** $\Delta = (1)^2 - 4(1)(240) = -959 < 0$)،

وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2 + x - 240)$

نضع: $x^2 + x - 240 = 0 \quad (*)$

نحل المعادلة $(*)$: نحسب المميز Δ: $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-240) = 1 + 960 = 961 > 0$

ومنه: $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{-1+31}{2} = \frac{30}{2} = 15 \in]-1;+\infty[$

و $x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{-1-31}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \notin]-1;+\infty[$

x	-1		15		$+\infty$
$x^2+x-240$	‖	-	0	+	
$f'(x)$	‖	-	0	+	

إذن: f **متناقصة تماما** على المجال $]-1; 15]$، **ومتزايدة تماما** على المجال $[15;+\infty[$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	-1		15		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$ 4825	$\nearrow$	$+\infty$

جـ/ إيجاد الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = 0$:

مجموعة الدوال الأصلية للدالة h على المجال $]-1; +\infty[$ هي الدوال: $H(x) = \ln(x+1) + c$، حيث c ثابت حقيقي،

ونعلم أن $H(0) = 0$ ومنه: $c = 0$ إذن: $\boxed{H(x) = \ln(x+1)}$.

3/ تنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و200 آلة على الأكثر.

تنمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f أي أن: من أجل كل x من المجال $[5; 200]$، $C_m(x) = f(x)$.

أ/ إيجاد عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن:

لدينا: $C_m(x) = f(x)$

من جدول تغيرات الدالة f، ***4825*** هي **قيمة حدية صغرى** لـ f على المجال $[5; 200]$، من أجل $x = 15$.

إذن: عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن هو ***15***.

ب/ نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونذكر أن $C'(x) = C_m(x)$.

إيجاد الكلفة الإجمالية $C(x)$، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA:

- لدينا: $C'(x) = C_m(x) = f(x)$ أي: C هي **الدالة الأصلية** للدالة f حيث $C_m = f$ حيث $C(5) = 4 \times 10^4$
- ولدينا: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$

يكون: $C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln(x+1) + c$ (حيث $c \in \mathbb{R}$)

من جهة أخرى: $C(5) = 4 \times 10^4$ نجد: $\frac{1}{12}5^4 + 100(5) + 57600\ln(5+1) + c = 4 \times 10^4$

ومنه: $c = -\frac{6625}{12} - 57600\ln 6 + 4 \times 10^4$

وبالتالي: $\boxed{c = \frac{473375}{12} - 57600\ln 6}$

بالتعويض نجد: $C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln(x+1) + \frac{473375}{12} - 57600\ln 6$

إذن: $\boxed{C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600\ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12}}$.

استنتاج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:

لدينا: $C(15) = \frac{1}{12}(15)^4 + 100(15) + 57600\ln\left(\frac{15+1}{6}\right) + \frac{473375}{12} = \mathbf{101662,43DA}$.

التمرين الرابع

لدينا: $f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3$ و $D_f = \mathbb{R}$.

اختيار الجواب الصحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة مع التعليل:

1/ الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ،

لأن لدينا: $f(x) = 0$ تكافئ $e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$

أي: $e^x + \frac{2}{e^x} - 3$

ومنه: $\frac{e^{2x} + 2 - 3e^x}{e^x} = 0$

وعليه: $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

بوضع: $\boxed{X = e^x}$ نجد: $X^2 - 3X + 2 = 0$ $(*)$ نحسب المميز Δ: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$

ومنه: $X' = \frac{3+1}{2} = 2$ و $X'' = \frac{3-1}{2} = 1$ وبالعودة إلى الوضع نجد: $e^x = 2$ و $e^x = 1$ الاستاذ بصديق امحمد 05/07

إذن: $\boxed{S = \{0; \ln 2\}}$.

2/الإجابة الصحيحة هي الإجابة ب)،

التعليل: بمأن $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ فإن $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

3/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)،

التعليل: f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = e^{x} - 2e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 2)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^{2x} - 2)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

إذن: على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2} ; +\infty\right[$ الدالة f **متزايدة تماما**.

4/الإجابة الصحيحة هي الإجابة أ)، التعليل:

لدينا: $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (e^{x} + 2e^{-x} - 3)dx = \frac{1}{2}\left[e^{x} - 2e^{-x} - 3x\right]_0^2$

إذن: $\boxed{m \simeq 1}$.

التمرين الرابع

I)لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرّفتان كما يلي $\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 0{,}7u_n + 6 \end{cases}$ و $v_n = u_n - 20$.

1)البرهان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $0,7$ يطلب تعيين حدها الأول v_0:

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n.

لدينا: $v_n = u_n - 20$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+1} - 20 = (0{,}7u_n + 6) - 20 = 0{,}7u_n - 14 = 0{,}7\left(u_n - \frac{14}{0{,}7}\right)$

وعليه: $v_{n+1} = 0{,}7(u_n - 20) = 0{,}7v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = 0{,}7v_n}$،

إذن: (v_n) متتالية **هندسية** أساسها $\boxed{q = 0{,}7}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = u_0 - 20 = (50) - 20 = 30}$.

كتابة عبارة v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^{n}$ ومنه: $\boxed{v_n = 30(0{,}7)^{n}}$.

2)أ. كتابة بدلالة n عبارة الحد العام u_n:

لدينا: $v_n = u_n - 20$ ومنه: $\boxed{u_n = 30(0{,}7)^{n} + 20}$.

ب. تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n):

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = (30(0{,}7)^{n+1} + 20) - (30(0{,}7)^{n} + 20)$

ومنه: $u_{n+1} - u_n = 30(0{,}7)^{n} \times 0{,}7 - 30(0{,}7)^{n} = 30(0{,}7)^{n}(0{,}7 - 1) = -9(0{,}7)^{n} < 0$

أي: $\boxed{u_{n+1} - u_n < 0}$، إذن: (U_n) **متناقصة تماما.**

حساب $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

لدينا: $\lim_{n\to+\infty} (0{,}7)^{n} = 0$ (لأن $-1 < 0{,}7 < 1$)، إذن: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 20}$.

II)تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016. بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد.

نعتبر المئة هي الوحدة: ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$

1) u_1 عدد المشتركين في سنة 2017 حيث،

$$u_1 = u_0 - \frac{30}{100}u_0 + 6 = (1-0{,}3)u_0 + 6 = 0{,}7u_0 + 6 = 0{,}7(50) + 6 = 41$$

إذن: عدد المشتركين في سنة 2017 هو 4100 مشترك.

- u_2 عدد المشتركين في سنة 2018 حيث،

$$u_2 = u_1 - \frac{30}{100}u_1 + 6 = (1-0{,}3)u_1 + 6 = 0{,}7u_1 + 6 = 0{,}7(41) + 6 = 34{,}7$$

إذن: عدد المشتركين في سنة 2017 هو 3470 مشترك.

2)أ. تبرير العبارة $u_{n+1} = 0,7u_n + 6$:

لدينا: u_{n+1} هو عدد المشتركين في سنة $2016 + (n+1)$

و u_n هو عدد المشتركين في سنة $2016 + n$

ومنه: $u_{n+1} = u_n - \frac{30}{100}u_n + 6 = (1-0{,}3)u_n + 6 = 0{,}7u_n + 6$

ب. عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك معناه: $u_n < 24$

ومنه: $30(0{,}7)^n + 20 < 24$

وعليه: $(0{,}7)^n < \frac{2}{15}$

ويكون: $n\ln(0{,}7) < \ln\left(\frac{2}{15}\right)$

وعليه: $n > \frac{\ln\left(\frac{2}{15}\right)}{\ln(0{,}7)}$ (لأن $\ln(0{,}7) < 0$)

وبالتالي: $\boxed{n = 6}$

إذن: ابتداء من سنة $2016 + 6$ أي: سنة 2022 يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك.