الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2022

شعبة: العلوم التجريبية — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضــــــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = \ln(2) \\ u_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-u_n}\right) \end{cases}$.

1. أ) تحقق أن: $u_2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ و $u_3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n > 0$.

2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)^2$ ثم استنتج أن: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3. برهن بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4. نعتبر الجداء P بحيث: $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times \dots\dots \times e^{u_{2021}}$.

✓ بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $P = 2022$

التمرين الثاني: 04 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = 1443 - 2022x$.

✓ الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = 2x\ln(x)$.

✓ الدالة الأصلية للدالة h والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = x^2\ln(x)$.

3. المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$ متقاربة.

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ: $g(x) = x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

✓ الدالة g زوجية.

التمرين الثالث: 05 نقاط

يحتوي كيس على سبع كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء.

I. نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

1. احسب احتمال كل من الحادثتين A و B بحيث A : عدد الكريات البيضاء المسحوبة أكبر من عدد الكريات الخضراء المسحوبة و B : الحصول على كريتين بالضبط من نفس اللون.
2. احسب $P\left(A\cap B\right)$ ثم استنتج كلا من $P_A\left(B\right)$ و $P\left(A\cup B\right)$.

II. نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية.

1. عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X.
2. احسب الأمل الرياضياتي $E\left(X\right)$ للمتغير العشوائي X، ثم استنتج $E\left(1743X-1962\right)$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g\left(x\right)=2e^{x-1}-x-1$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α بحيث $-0,6<\alpha<-0,5$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g\left(x\right)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=2x-2+\left(x+2\right)e^{1-x}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'\left(x\right)=e^{1-x}g\left(x\right)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f''\left(x\right)=xe^{1-x}$، ثم استنتج أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها.

2. بين أن $f\left(\alpha\right)=2\alpha+\dfrac{2}{\alpha+1}$، ثم اعط حصرا لـ $f\left(\alpha\right)$.
3. أ) بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذا المعادلة $y=2x-2$ مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

ب) بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا $\left(T\right)$ موازيا لـ $\left(\Delta\right)$ يطلب كتابة معادلة له.

4. أ) أنشئ كلا من $\left(\Delta\right)$، $\left(T\right)$ ثم مثل $\left(C_f\right)$. نقبل أن $f\left(\beta\right)=0$ بحيث $-1,63<\beta<-1,61$، يعطى $f\left(\alpha\right)\approx3,73$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f\left(x\right)=2\left(x-1\right)+m$ حلين مختلفين في الإشارة.

5. أ) بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H\left(x\right)=\left(-x-3\right)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\left(x+2\right)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ: $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$ بين العددين -2 و 1.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــــي

التمرين الأول: 5 نقاط

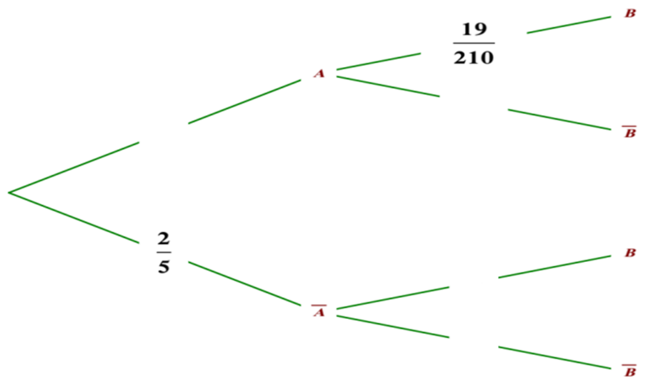
يحتوي وعاء U على 10 كريات منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2، -1، 0، 1، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1، 0، 1 و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1، 1 و يحتوي وعاء V على 9 كريات موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: $2,2,2,1,1$ و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $-3,2,3$ و كرية سوداء مرقمة بـ: -1، و يحتوي وعاء W على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء و كريتين صفراوين.

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كريات من أحد الوعاءين U أو V بالكيفية التالية:

نقوم بسحب كرية واحدة عشوائيا من الوعاء W، إذا تحصلنا على كرية بيضاء نسحب الكريات الأربعة من U و إذا تحصلنا على كرية صفراء نسحب الكريات الأربعة من V.

نسمي A الحدث: الحصول على كرية بيضاء، و نسمي B الحدث الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم.

1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب.
2. استنتج $P(B)$ ثم احسب $P_{\overline{B}}(A)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .
   - عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.



التمرين الثاني: 04 نقاط

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـحدها الأول: $u_0 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 1$.
2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

   ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln(u_n)$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.
2. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$
3. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $D = [0;\ln 2]$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$، $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$، و ليكن

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

نضع $I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx$ و $J=\int_0^{\ln 2} g(x)dx$.

1. بين أنه من أجل $x\in D$: $\frac{1}{3}\le g(x)\le \frac{1}{2}$، ثم أعط حصرا للتكامل J.
2. أثبت أن $I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\ln 2$ و $x=0$.
3. أ) تحقق أنه من أجل $x\in D$: $f(x)=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$، ثم احسب التكامل I.

ب) استنتج قيمة التكامل J، ثم فسر النتيجة هندسيا.

<u>**التمرين الرابع: 07 نقاط**</u>

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$..

II. الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x+\frac{2+\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها.

2. ليكن (P) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$.

أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب. ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (P).

3. أ) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث $0{,}17<\alpha<0{,}19$، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

ب) ارسم (P) ثم ارسم (C_f).

4. ادرس تغيرات الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=[f(x)]^2$ دون تعيين عبارتها.

انتهـــــــى الموضـــــوع الثاني

التصحيح النموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية

الإجابة	العلامة

الموضوع الأول

حل التمرين الأول:

لدينا $\begin{cases} U_1 = \ln 2 \\ U_{n+1} = \ln(2 - e^{-U_n}) \end{cases}$

1) أ) التحقق أن $U_2 = \ln\frac{3}{2}$ و $U_3 = \ln\frac{4}{3}$

لدينا: $U_2 = \ln(2 - e^{-U_1}) = \ln(2 - e^{-\ln 2}) = \ln\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2}$

$U_3 = \ln(2 - e^{-U_2}) = \ln\left(2 - e^{-\ln\frac{3}{2}}\right) = \ln\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \ln\frac{4}{3}$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > 0$؛

لدينا $U_1 = \ln\frac{3}{2}$ و $\ln\frac{3}{2} > 0$ ومنه $U_1 > 0$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 1$: $U_n > 0$ ونبرهن أن $U_{n+1} > 0$

لدينا $U_n > 0$ أي $-U_n < 0$ ومنه $e^{-U_n} < 1$ ومنه $-e^{-U_n} > -1$

ومنه $2 - e^{-U_n} > 1$ وعليه $\ln(2 - e^{-U_n}) > 0$

وبالتالي $U_{n+1} > 0$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: $U_n > 0$ لكل من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.

2) أ) تبيان أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n}(e^{U_n} - 1)^2$

لدينا $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n}\left(-\frac{2}{e^{-U_n}} + 1 + \frac{e^{U_n}}{e^{-U_n}}\right)$

ومنه: $= -e^{-U_n}\left(e^{2U_n} - 2e^{U_n} + 1\right)$

وبالتالي: $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n}(e^{U_n} - 1)^2$

استنتاج أن: $2 - e^{-U_n} < e^{U_n}$

بما أن $-e^{-U_n}(e^{U_n} - 1)^2 < 0$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن: $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} < 0$

وبالتالي: $2 - e^{-U_n} < e^{U_n}$

ب) تبيان أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما:

لدينا $2-e^{-U_n} < e^{U_n}$ ومنه $\ln(2-e^{-U_n}) < U_n$

ومنه $U_{n+1} < U_n$ وبالتالي (U_n) متناقصة تماما.

استنتاج أن (U_n) متقاربة:

لما أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة

3) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leftarrow P(n)$

لدينا: $\ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \ln 2$ و $U_1 = \ln 2$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$

نفرض أنه من أجل $n \geq 1$: $U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ولنبرهن أن $U_{n+1} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

لدينا $U_{n+1} = \ln\left(2-e^{-U_n}\right) = \ln\left(2-e^{-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right)$

ومنه: $U_{n+1} = \ln\left(2-\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right) = \ln\left(2-\frac{n}{n+1}\right)$

ومنه $U_{n+1} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع

$U_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ من أجل $n \in \mathbb{N}^*$.

حساب: $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$

4) نعتبر الجداء P حيث $P = e^{U_1} \times e^{U_2} \times \dots \times e^{U_{2021}}$

تبيان أن: $P = 2022$

لدينا: $P = e^{\ln 2} \times e^{\ln\frac{3}{2}} \times e^{\ln\frac{4}{3}} \times \dots \times e^{\ln\frac{2022}{2021}}$

ومنه: $P = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{2022}{2021} = 2022$

وبالتالي: $P = 2022$

حل التمرين الثاني:

الإجابة بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ صحيح لأن:
الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ عبارة عن مركب دالتين مختلفتين في اتجاه التغير (u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ و $x \mapsto e^{x}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$)

2) خطأ لأن:

$$H(x)=\int_1^x h(t)\,dt=\int_1^x (2t\ln t)\,dt$$

نضع $u(t)=\ln t$ و $v'(t)=2t$ ومنه $u'(t)=\frac{1}{t}$ و $v(t)=t^2$

ومنه:
$$H(x)=\left[t^2\ln t\right]_1^x-\int_1^x t\,dt$$

ومنه:
$$H(x)=\left[t^2\ln t\right]_1^x-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x=$$

وبالتالي:
$$H(x)=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

3) صحيح لأن:
$$\lim_{n\to+\infty} w_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{e^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{\ln(n)}{n}}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{e^n}{n}}_{\to+\infty}}=0$$

4) خطأ لأن: من أجل $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ فإن $-x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

و
$$g(-x)=-x-\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)=-x-\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

ومنه:
$$g(-x)=-x+\ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right)=-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$=-\left(x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

ومنه $g(-x)=-g(x)$ وعليه الدالة g فردية وليست زوجية.

حل التمرين الثالث:

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس:

1) حساب $P(A)$ و $P(B)$.

$$P(A)=\frac{C_4^2\times C_3^1+C_4^3}{C_7^3}=\frac{18+4}{35}=\frac{22}{35}$$

$$P(B)=\frac{C_4^2\times C_3^1+C_4^1\times C_3^2}{C_7^3}=\frac{18+12}{35}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$$

2) حساب $P(A\cap B)$:

$$P(A\cap B)=\frac{C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}=\frac{18}{35}$$

استنتاج كلا من $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{22}{35}+\frac{30}{35}-\frac{18}{35}=\frac{34}{35}$$

II)

1) التعرف قانون الاحتمال المتغير العشوائي X:

لدينا: $X\in\{1;2;3;4\}$ ومنه:

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$P(X=1)=\frac{A_4^3}{A_7^3}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}\ ,\ P(X=2)=\frac{3A_4^2\times A_3^1}{210}=\frac{108}{210}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{3A_4^1\times A_3^2}{210}=\frac{72}{210}=\frac{12}{35}\ ,\ P(X=4)=\frac{A_3^3}{210}=\frac{6}{210}=\frac{1}{35}$$

حساب $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}p_i x_i=\frac{4+36+36+4}{35}=\frac{80}{35}=\frac{16}{7}$$

استنتاج $E(1743X-1962)$:

$$E(1743X-1962)=1743\times E(X)-1962=1743\times\frac{16}{7}-1962$$

ومنه:

$$E(1743X-1962)=2022$$

حل التمرين الرابع:

I) لدينا $g(x)=2e^{x-1}-x-1$

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2\overset{0}{e^{x-1}}-x-1=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} \overset{+\infty}{e^{x}}\left(2e^{-1}-\overset{0}{\frac{x}{e^{x}}}-\overset{0}{\frac{1}{e^{x}}}\right)=+\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=2e^{x-1}-1$

ومنه $g'(x)=0$ يكافئ $2e^{x-1}-1=0$ أي $x=1-\ln 2$

وعليه إشارة $g'(x)$ تكون كالتالي:

x	$-\infty$		$1-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty, 1-\ln 2]$ ومتزايدة على المجال $[1-\ln 2; +\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		α		$1-\ln 2$		1		$+\infty$
$g'(x)$				$-$	0	$+$			
$g(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$\ln(2)-1$	$-$	0	$+$	$+\infty$

$$g(1-\ln 2)=2e^{-\ln 2}-1+\ln 2-1=1-1+\ln 2-1$$
$$=\ln(2)-1$$

2) أ) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

لدينا $g(1)=0$ .... (1)

ولدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty, 1-\ln 2]$ وبالأخص على المجال $]-0,6;-0,5[$ و $g(-0,6)\times g(-0,5)<0$

لأن: $g(-0,6) \approx 0,004$ ، $g(-0,5) \approx -0,05$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$-0,6 < \alpha < -0,5$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II) لدينا $f(x)=2x-2+(x+2)e^{1-x}$ ، $D_f=\mathbb{R}$

1) أ. تبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \underbrace{2x-2}_{+\infty}+e\underbrace{\frac{x}{e^x}}_{0}+2\underbrace{e^{1-x}}_{0}=+\infty$$

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} \underbrace{2x-2}_{-\infty}+\underbrace{(x+2)}_{-\infty}\underbrace{e^{1-x}}_{+\infty}=-\infty$$

ب) تبيان أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=e^{1-x}g(x)$

لدينا من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=2+e^{1-x}-(x+2)e^{1-x}$

ومنه $f'(x)=e^{1-x}\left(2e^{x-1}-x-2+1\right)$

ومنه $f'(x)=e^{1-x}\left(2e^{x-1}-x-1\right)=e^{1-x}g(x)$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	3	↗	$+\infty$

$f(1)=2-2+3e^{0}=3$

ج) تبيان أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = x e^{1-x}$

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = -e^{1-x} g(x) + g'(x) e^{1-x}$

$$= e^{1-x}\left(g'(x) - g(x)\right) = e^{1-x}\left(\cancel{2e^{x-1}} \cancel{-1} - \cancel{2e^{x-1}} + x \cancel{+1}\right)$$

وبالتالي : $f''(x) = x e^{1-x}$

استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها

لدينا $f''(x) = 0$ تكافئ $x = 0$ وعليه اشارة $f''(x)$ تكون كالتالي :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0 $+$

بما أن $f''(x)$ انعدمت من أجل $x = 0$ وغيرت اشارتها فإن النقطة $\Omega(0, f(0))$ أي $\Omega(0, 2e-2)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

د) تبيان أن $f(\alpha) = 2\alpha + \dfrac{2}{\alpha+1}$

لدينا $f(\alpha) = 2\alpha - 2 + (\alpha+2) e^{1-\alpha}$ وحسب الجزء الأول $g(\alpha) = 0$

أي $e^{\alpha-1} = \frac{1}{2}(\alpha+1)$ ومنه : $\dfrac{1}{e^{1-\alpha}} = \dfrac{\alpha+1}{2}$

وعليه $e^{1-\alpha} = \dfrac{2}{\alpha+1}$

ومنه $f(\alpha) = 2\alpha - 2 + \dfrac{2\alpha + 4}{\alpha+1}$

ومنه $f(\alpha) = 2\alpha - 2 + \dfrac{2(\alpha+1)}{\alpha+1} + \dfrac{2}{\alpha+1}$.

وبالتالي : $f(\alpha) = 2\alpha + \dfrac{2}{\alpha+1}$

اعطاء حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا $-0{,}6 < \alpha < -0{,}5$ ومنه $-1{,}2 < 2\alpha < -1$ ①

ومنه $0{,}4 < \alpha+1 < 0{,}5$ ومنه $2 < \dfrac{1}{\alpha+1} < 2{,}5$

ومنه $4 < \dfrac{2}{\alpha+1} < 5$ ②

بجمع ① و ② طرف لطرف نجد : $2{,}8 < f(\alpha) < 4$

3) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=2x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-2)]=\lim_{x\to+\infty}(x+2)e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty} e\times\frac{x}{e^{x}}+2e^{1-x}=0$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) :

لدينا $f(x)-(2x-2)=0$ تكافئ $x=-2$ ومنه الوضع النسبي يكون كالتالي :

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$f(x)-y$	$-$ 0 $+$
الوضع النسبي	(C_f) أسفل (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) أعلى (Δ)

ب) تبيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له

لدينا $f'(x)=2$ تكافئ $e^{1-x}g(x)=2$ أي $g(x)=2e^{x-1}$

ومنه $2e^{x-1}-x-1=2e^{x-1}$ وعليه $-x-1=0$ أي $x=-1$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$ حيث $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ أي $y=2x+2+e^{2}-4$

أي $y=2x+e^{2}-2$ معادلة له

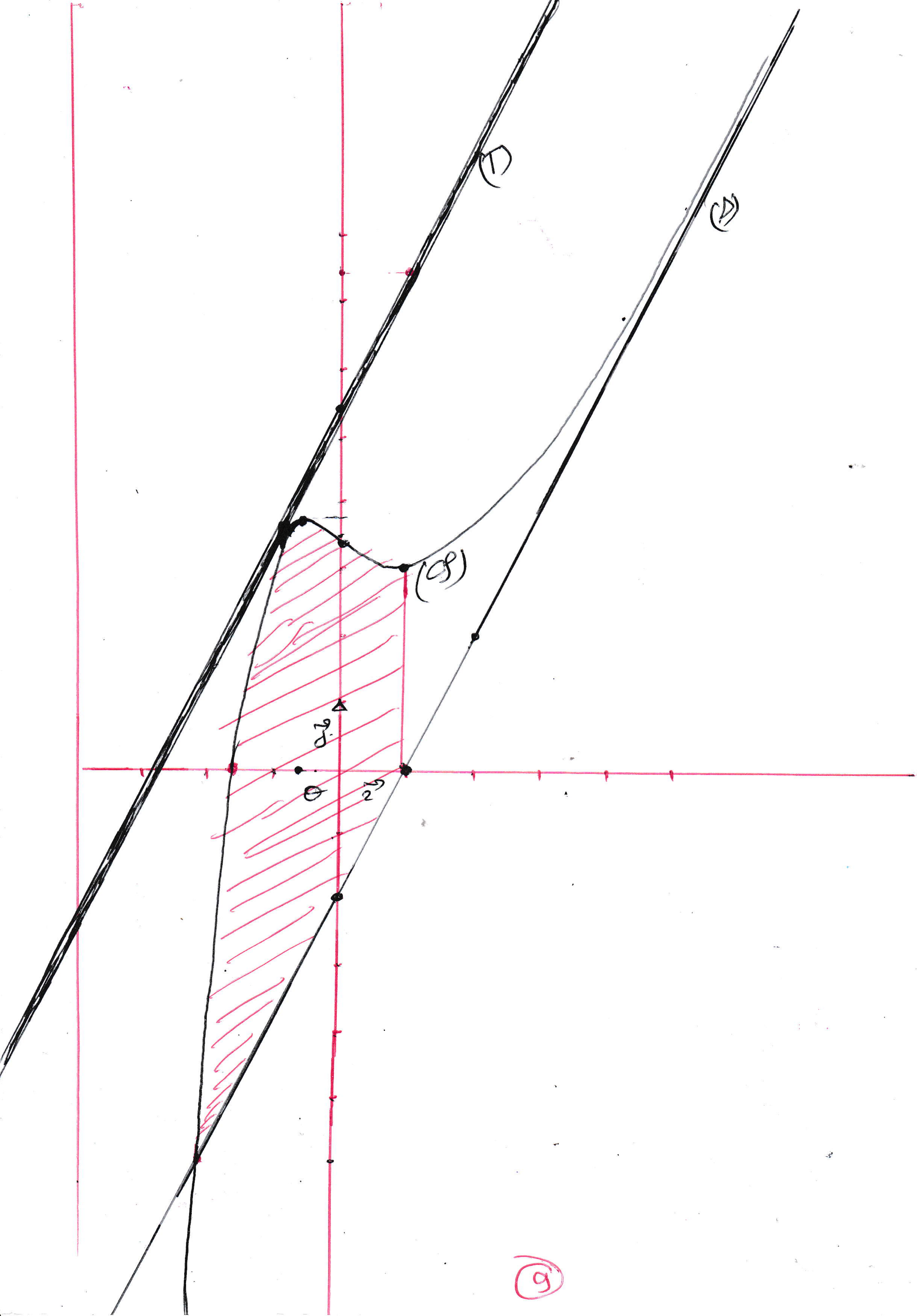
4) أ) انشاء كلا من (Δ) و (T) ثم تمثيل (C_f) .

$(\Delta): y=2x-2$

x	0	1
y	-2	0

$(T) y=2x+e^{2}-2$

x	0	1
y	$e^{2}-2$	e^{2}


(T)
(Δ)
(Cf)
O

ب) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها المعادلة تقبل

$f(x)=2(x-1)+m$ حلين مختلفين في الإشارة:

لدينا $f(x)=2(x-1)+m$ تكافئ $f(x)=2x+m-2$

ومنه من أجل $m-2\in]-2,2e-2[$ أي $m\in]0,2e[$

فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة.

4) أ) تبيان أن الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x+2)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.

لدينا $H(x)=(-x-3)e^{1-x}$

ومنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $H'(x)=-e^{1-x}-e^{1-x}(-x-3)$

ومنه $H'(x)=(x+2)e^{1-x}$ وعليه H أصلية للدالة

$x\mapsto(x+2)e^{1-x}$

ب) استنتاج المساحة A:

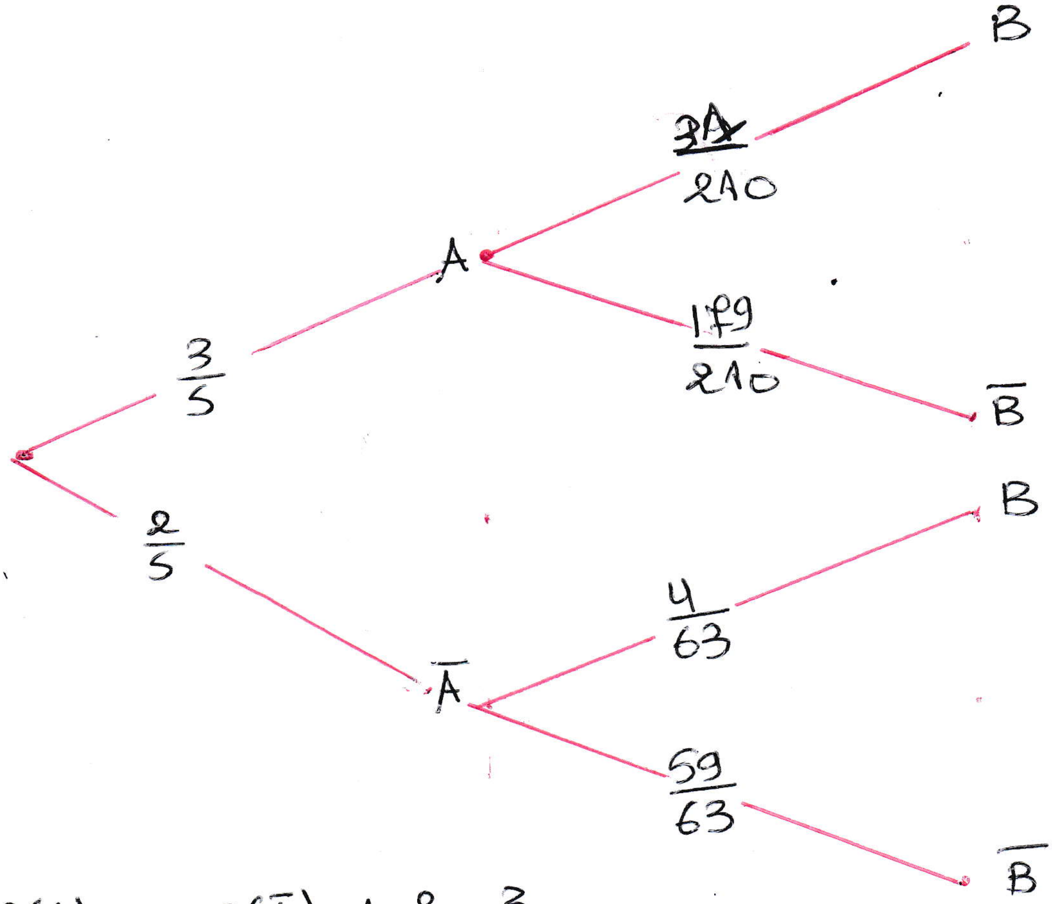
$$A=\int_{-2}^{1}(x+2)e^{1-x}dx=\left[H(x)\right]_{-2}^{1}=H(1)-H(-2)$$

ومنه: $A=-4+e^3=e^3-4$

الموضوع الثاني

حل التمرين الأول

1) نقل وإكمال شجرة الاحتمالات مع توضيح مراحل الحساب



$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{31}{210} = \frac{179}{210}$$

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_9^4} = \frac{2+6}{126} = \frac{8}{126} = \frac{4}{63}$$

$$P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - P_{\bar{A}}(B) = 1 - \frac{4}{63} = \frac{59}{63}$$

2) استنتاج $P(B)$:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{31}{210} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{63} = \frac{31}{5 \times 70} + \frac{8}{5 \times 63}$$

$$= \frac{1953 + 560}{5 \times 70 \times 63} = \frac{2513}{22050} = \frac{359}{3150}$$

حل التمرين الثاني:

لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_{n+1}=u_n\sqrt{u_n} \\ u_0=e^{-1} \end{cases}$$

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $0<u_n<1$ $\quad P(n)$

لدينا $P(0)$ محققة لأن $0<u_0<1$

نفرض أنه من أجل $n\geq 0$: $0<u_n<1$ ونبرهن أن $0<u_{n+1}<1$

لدينا $0<u_n<1$ ومنه $0<\sqrt{u_n}<1$ ومنه

$0<u_n\sqrt{u_n}<1$ وعليه $P(n+1)$ صحيحة

وبالتالي حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $0<u_n<1$ من أجل $n\in\mathbb{N}$.

2) أ) إثبات أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$:

لدينا $\sqrt{u_n}=\dfrac{\cancel{u_n}\sqrt{u_n}}{\cancel{u_n}}=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ولما أن $0<u_n<1$ فإن $0<\sqrt{u_n}<1$

وعليه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لما أن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ فإن $u_{n+1}<u_n$ لأن $u_n>0$ ومنه

المتتالية (u_n) ~~متزايدة~~ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ب) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة:

لما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

لما أن (u_n) متقاربة فهي تقبل نهاية منتهية ℓ تحقق $f(\ell)=\ell$ حيث f الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ ومن أجل $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$ و $u_0\in[0;1]$

لدينا $f(\ell)=\ell$ تكافئ $\ell\sqrt{\ell}=\ell$ تكافئ $\ell^3=\ell^2$ وتكافئ

$\ell^3-\ell^2=0$ أي $\ell^2(\ell-1)=0$ ومنه $\ell=0$ أو $\ell=1$

ولما أن (u_n) متناقصة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

II) لدينا $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n \ln u_n$

1) تبيان أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول:

لدينا: $v_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\ln u_{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{1}{3}\times\ln u_n\sqrt{u_n}$

ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\ln u_n^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\ln u_n$

ومنه $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ وبالتالي (v_n) متتالية هندسية

أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0=\left(\frac{1}{3}\right)^0\ln e^{-1}=-1$

2) كتابة v_n بدلالة n:

لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$: $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

استنتاج أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

لدينا $v_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\ln u_n$ ومنه $\ln u_n=\frac{v_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ومنه $u_n=e^{\frac{v_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$

ومنه $u_n=e^{\frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$ ومنه $u_n=e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=\ln u_0+\ln u_1+\dots+\ln u_n$

لدينا نضع من أجل $n\in\mathbb{N}$: $w_n=\ln u_n$

لدينا (w_n) متتالية هندسية أساسها $q'=\frac{3}{2}$ وحدها الأول $w_0=-1$

وعليه: $S_n=w_0\left(\frac{1-(q')^{n+1}}{1-q'}\right)=-\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}\right)$

ومنه $S_n=-\left(\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}}\right)=2\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$

حل التمرين الثالث:

لدينا $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ حيث $D_f=D_g=D=[0;\ln 2]$

1) تبيان أنه من أجل $x\in D$: $\frac{1}{3}\le g(x)\le\frac{1}{2}$

لدينا $x\in D$ معناه $0\le x\le \ln 2$ ومنه $1\le e^x\le 2$ ومنه $2\le e^x+1\le 3$ ومنه $\frac{1}{3}\le\frac{1}{e^x+1}\le\frac{1}{2}$ وبالتالي من أجل $x\in D$ فإن: $\frac{1}{3}\le g(x)\le\frac{1}{2}$

إعطاء حصر للتكامل J:

لدينا $\frac{1}{3}\le g(x)\le\frac{1}{2}$ من أجل $x\in D$ ومنه $\int_0^{\ln 2}\frac{1}{3}dx\le J\le\int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}dx$

وعليه $\left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\ln 2}\le J\le\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{\ln 2}$ ومنه

$\frac{1}{3}\ln 2\le J\le\frac{1}{2}\ln 2$ وبالتالي $\ln\sqrt[3]{2}\le J\le\ln\sqrt{2}$

2) إثبات أن: $\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx=I-J$:

لدينا: $I-J=\int_0^{\ln 2}f(x)dx-\int_0^{\ln 2}g(x)dx=\int_0^{\ln 2}(f(x)-g(x))dx$

ومنه $I-J=\int_0^{\ln 2}\left[\frac{e^{2x}}{e^x+1}-\frac{1}{e^x+1}\right]dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

ومنه $I-J=\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x-1)\cancel{(e^x+1)}}{\cancel{(e^x+1)}}dx=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$

استنتاج A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين: $x=0$ ، $x=\ln 2$

لدينا من أجل $x\in D$ $f(x)-g(x)\ge 0$ ومنه

$A=I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx=\left[e^x-x\right]_0^{\ln 2}$

ومنه $A=2-\ln 2-1=(1-\ln 2)u.a$

3) أ) التحقق أنه من أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{e^x+1}$

لدينا $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^x+1} = \dfrac{e^{2x}+e^x-e^x}{e^x+1} = \dfrac{e^x(e^x+1)}{e^x+1} - \dfrac{e^x}{e^x+1}$

ومنه من أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \dfrac{e^x}{e^x+1}$

حساب التكامل I :

لدينا $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = \Big[e^x - \ln(e^x+1)\Big]_0^{\ln 2}$

ومنه $I = 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2 = 1 + \ln 2 - \ln 3$

وبالتالي I [redacted] $= 1 + \ln\dfrac{2}{3}$

ب) استنتاج قيمة التكامل J :

لدينا $I - J = 1$ [redacted] $\ln 2$/[redacted] ومنه $J = I - 1 + \ln 2$/[redacted]

ومنه $J = 1 + \ln\dfrac{2}{3} - 1 + \ln 2$

وبالتالي : $J = \ln\dfrac{2}{3} + \ln 2 = \ln\dfrac{4}{3}$

تفسير النتيجة هندسية :

لما أنه من أجل $x \in D$: $g(x) > 0$ مع $J = \ln\dfrac{4}{3}$

فإن مساحة الحيز المحدد بـ (C_g) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \ln 2$ هي $\ln\dfrac{4}{3}$ u.a

حل التمرين الرابع :

I) لدينا $g(x) = x - 1 - \ln x$ حيث $D_g =]0,+\infty[$

1) حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x - 1 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \cancel{\frac{1}{x}}^{0} - \cancel{\frac{\ln x}{x}}^{0}\right) = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من أجل $x > 0$: $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

ومنه $g'(x) = 0$ تكافئ $x = 1$ مع $x > 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة على المجال $]0,1]$ ومتزايدة على المجال $[1,+\infty[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) حساب $g(1)$: $g(1) = 0$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

II) لدينا $f(x) = \ln x + \frac{2+\ln x}{x}$ حيث $D_f =]0,+\infty[$

1) أ) حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln x^{+\infty} + \frac{2}{x}^{0} + \frac{\ln x}{x}^{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x^{-\infty} + \frac{2+\ln x}{x}^{-\infty} = -\infty$$

ب) تبيان أنه من أجل $x>0$ و $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

لدينا من أجل $x>0$: $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1-2-\ln x}{x^2}=\frac{x-1-\ln x}{x^2}$

وبالتالي: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

جـ) استنتاج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها:

بما أن $f'(x)$ انعدمت من أجل $x=1$ ولم تغير اشارتها فإن النقطة ذات الاحداثيات $(1,2)$ نقطة انعطاف لـ (C_f).

د) 1) حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}=0$$

تفسير النتيجة هندسيا:

نقول أن (C_f) و (P) متقاربان بجوار $+\infty$.

هـ) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (P):

لدينا $f(x)-\ln x=\frac{2+\ln x}{x}$ ومنه $f(x)-\ln x=0$ معناه $x=e^{-2}$ مع $x>0$

وعليه الوضع النسبي نلخصه في الجدول التالي:

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f(x)-\ln x$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) أسفل (P)	(C_f) يقطع (P)	(C_f) أعلى (P)	

3) 4/ تبيان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,17 < \alpha < 0,19$

لدينا الدالة f مستمرة و رتيبة على المجال $]0,17;0,19[$ و $g(0,17)\times g(0,19)<0$

لأن $g(0,17)=$ و $g(0,19)=$ ومنه حسب مبرهنة

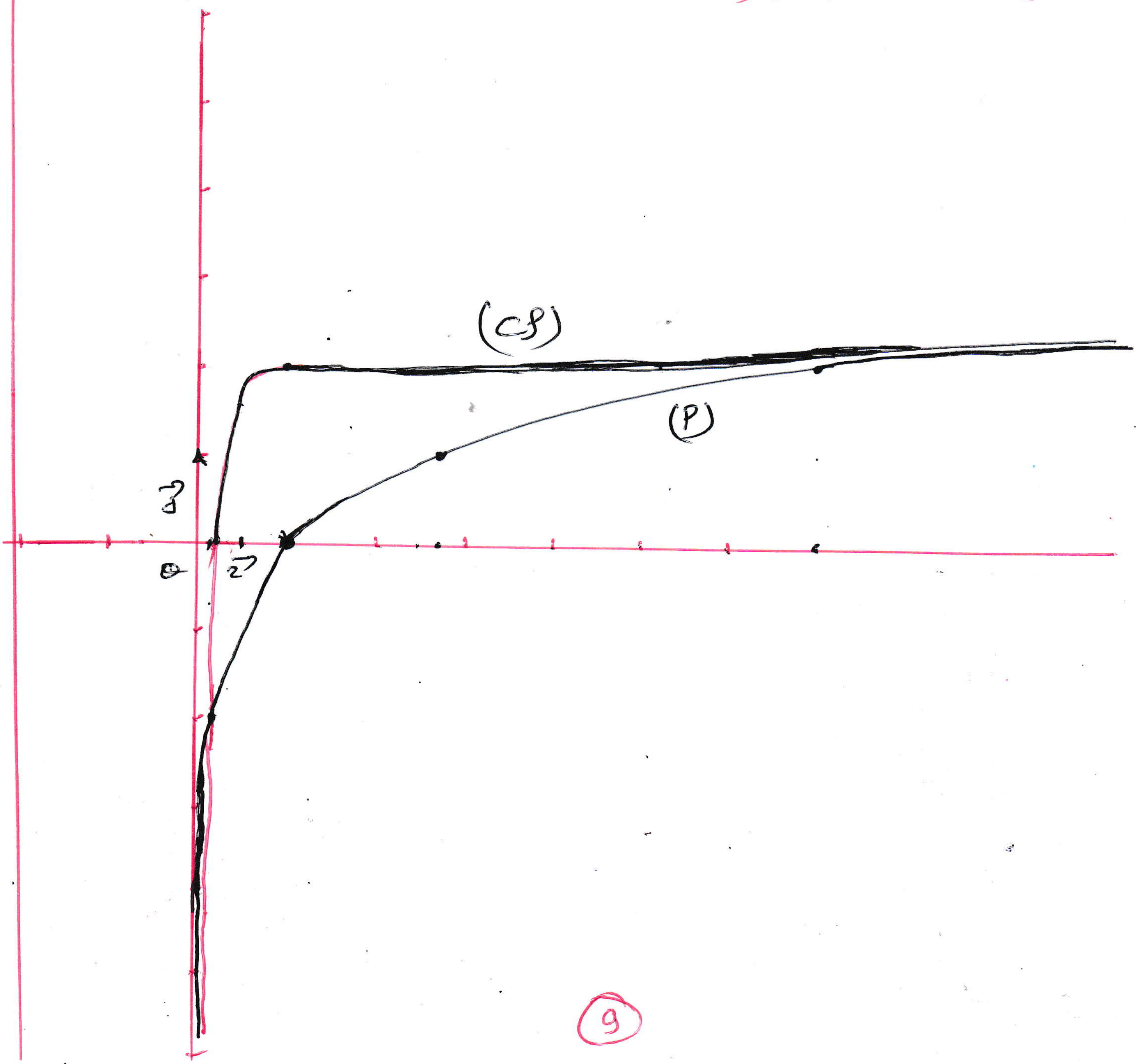
القيم المتوسطة فإن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها α حيث $0,17<\alpha<0,19$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $f(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ب) رسم (P) ثم رسم (C_f):



4) دراسة اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$h(x)=[f(x)]^2$

$h'(x)=2f'(x)f(x)$

لدينا من أجل $x>0$:

ومنه إشارة $h'(x)$ تكون كالتالي:

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0,\alpha]$

ومتزايدة على المجال $[\alpha,+\infty[$.