



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

- (u_n) متتالية حسابية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\mathbb{N}^*$ ب: $u_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$.
- (1) بين أن (u_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين حدّها الأول u_1 وأساسها r ، استنتج اتجاه تغييرها.
 - (2) احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 - (3) عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 1$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

- لتكن الأعداد الطبيعية a, b, c حيث $a = 2021, b = 1954, c = 1442$.
- (1) أ/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد a, b و c على 5.
ب/ بين أن $5 \mid -1$ ، ثم استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين b^{1962} و b^{2971} على 5.
ج/ هل العددين a و b^{1962} متوافقين بترديد 5؟ برّر إجابتك.
 - (2) أ/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $3^0, 3^1, 3^2, 3^3$ و 3^4 على 5.
ب/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $k: 3^{4k} \equiv 1[5]$ ، ثم استنتج أن $3^{4k+1} \equiv 3[5]$.
ج/ تحقّق أن $3^{2021} \equiv 3[5]$.
د/ عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $8^n - 1 \equiv 0[5]$.

التمرين الثالث: (08 نقاط)

- الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
- و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب نهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
 - (2) أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x: f'(x) = 3x(x - 2)$ ، ثم ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.
ب. استنتج اتجاه تغيير f ، ثم شكّل جدول تغييراتها.
 - (3) أكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A التي فاصلتها 1.
 - (4) أ/ تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x: f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$.
ب. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$ ثم استنتج نقط تقاطع (C_f) وحامل محور الفواصل.
 - (5) ارسم كلا من (T) و (C_f) .



الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

- (v_n) المتتالية الهندسية ذات الحدود الموجبة التي حدّها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$ وحدّها الخامس $v_4 = 8$.
- 1) عيّن أساس هذه المتتالية ثمّ اكتب v_n بدلالة n .
 - 2) اثبت أنّ العدد 2048 حد في المتتالية (v_n).
 - 3) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.
 - 4) احسب المجموع: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

- a و b عددان صحيحان حيث $a \equiv -1[9]$ و $b = 2021$.
- 1) أ/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 9.
ب/ بيّن أنّ $a + 2b$ يقبل القسمة على 9.
ج/ استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)^2 - 8$ على 9.
 - 2) أ/ ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 4^n على 9.
ب/ عيّن باقي القسمة الإقليدية لكل من 1962^{1442} و 1954^{2021} على 9.
ج/ تحقّق أنّ $[9] \equiv 0 \quad 1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2$.
د/ عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $[9] \equiv 0 \quad 4^{3n} + n - 1$.

التمرين الثالث: (08 نقاط)

- نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$.
- و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 1) أحسب نهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
 - 2) أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = (-x + 3)(x - 1)$ ، ثمّ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.
ب. استنتج اتجاه تغير f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.
 - 3) بيّن أنّ النقطة $A(2; \frac{-2}{3})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).
 - 4) أكتب معادلة لـ (D) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A .
 - 5) احسب $f(0)$ ثمّ ارسم كلا من (D) و (C_f).

التصحيح المفصل للبركالتوربا التلرلبفة/ ماة الرفاضاة/ االة آءاب وفلسفة؛ لفاة ألبفة 2021

حل الموضوع الأول

حل التمرن الأول: (05 نقاط)

لءفنا: (u_n) مائالفة الالفة معرففة على ماموءة الأءاء

الطبلفة رففر المءوءمة $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$.

(1) اأفان أن (u_n) مائالفة الالفة فطلب اأفان آءفا

الأول u_1 وأساسها r :

أففن أن $u_{n+1} - u_n$ عءء اأاب:

$$u_n = -\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}$$

ومنه:

$$u_{n+1} = -\frac{2}{5}(n+1) + \frac{5}{4}$$

$$= -\frac{2}{5}n - \frac{2}{5} + \frac{5}{4}$$

$$= -\frac{2}{5}n + \frac{-8+25}{20}$$

$$= -\frac{2}{5}n + \frac{17}{20}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{2}{5}n + \frac{17}{20}\right) - \left(-\frac{2}{5}n + \frac{5}{4}\right)$$

$$= -\frac{2}{5}n + \frac{17}{20} + \frac{2}{5}n - \frac{5}{4}$$

$$= \frac{17-25}{20} = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$$

إذن: (u_n) مائالفة الالفة أساسها $r = -\frac{2}{5}$ و آءفا الأول

$$u_1 = -\frac{2}{5}(1) + \frac{5}{4} = -\frac{2}{5} + \frac{5}{4} = \frac{-8+25}{20} = \frac{17}{20}$$

اسائاا اأفاه أفر (u_n) :

بمأن: (u_n) مائالفة الالفة، وأساسها سالل اأاما

$(r = -\frac{2}{5} < 0)$ فأنها: مائالفة اأاما.

(2) الال ماموء $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= (n-1+1) \left(\frac{u_1+u_n}{2} \right)$$

$$= \frac{n}{2} \left(\frac{17}{20} - \frac{2}{5}n + \frac{5}{4} \right)$$

$$= \frac{n}{2} \left(-\frac{2}{5}n + \frac{17+25}{20} \right)$$

$$= \frac{n}{2} \left(-\frac{2}{5}n + \frac{42}{20} \right)$$

$$= -\frac{1}{5}n^2 + \frac{21}{20}n$$

(3) اأفان العء الطبلف n الال $S_n = 1$:

$$-\frac{1}{5}n^2 + \frac{21}{20}n = 1$$

$$-4n^2 + 21n - 20 = 0$$

مفلها:

$$\Delta = (21)^2 - 4(-4)(-20)$$

$$= 441 - 320 = 121 = (11)^2$$

للماءلة الال ماملفف هما:

$$n' = \frac{-21+11}{-8} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4} \notin \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-21-11}{-8} = \frac{-32}{-8} = 4 \in \mathbb{N}$$

$$(S_4 = 1)$$

حل التمرن اأا: (07 نقاط)

لءفنا: $a = 2021$ ، $b = 1954$ و $c = 1442$.

(1) أأفان باقى الالفة الإقلفءفة لكل من الأءاء a ، b و c على 5:

$$a \equiv 1[5] \text{ لءفنا: } a = 5(404) + 1$$

إذن: باقى الالفة a على 5 هو 1.

$$b \equiv 4[5] \text{ لءفنا: } b = 5(390) + 4$$

إذن: باقى الالفة b على 5 هو 4.

$$c \equiv 2[5] \text{ لءفنا: } c = 5(288) + 2$$

إذن: باقى الالفة c على 5 هو 2.

ب/ اأفان أن $b \equiv -1[5]$:

أففن أن الفرق $(-1) - b$ مضااعف لـ 5:

$$b - (-1) = b + 1 = 1955 = 5(391)$$

$$b \equiv -1[5] \text{ إذن:}$$

اسائاا باقى الالفة الإقلفءفة لكل من العءفن b^{2971} و b^{1962} على 5:

$$b \equiv -1[5] \text{ لءفنا:}$$

$$b^{2971} \equiv (-1)^{2971}[5]$$

وعلفه: $b^{2971} \equiv -1[5]$ (لأن: 2971 عءء فرءف)

$$b^{2971} \equiv 4[5] \text{ وفكون:}$$

إذن: باقى الالفة b^{2971} على 5 هو 4.

$$b \equiv -1[5] \text{ لءفنا:}$$

$$b^{1962} \equiv (-1)^{1962}[5]$$

وعلفه: $b^{1962} \equiv 1[5]$ (لأن: 1962 عءء زوجف)،

إذن: باقى الالفة b^{1962} على 5 هو 1.

آ/ ءراسة اأافق العءفن a و b^{1962} بآرفف 5، مع اأفر

الإابة:

$$a \equiv 1[5] \text{ لءفنا: } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv 1[5] \\ b^{1962} \equiv 1[5] \end{array} \right. \text{ إذن:}$$

$$a \equiv b^{1962}[5]$$

(2) أأفان باقى الالفة الإقلفءفة لكل من الأءاء 3^0 ، 3^1 ، 3^2 ، 3^3 و 3^4 على 5:

$$3^0 \equiv 1[5] \text{ لءفنا: } 3^0 \equiv 1[5] \text{ ومنه: باقى الالفة } 3^0 \text{ على 5 هو 1}$$

$$3^1 \equiv 3[5] \text{ ومنه: باقى الالفة } 3^1 \text{ على 5 هو 3}$$

$$3^2 \equiv 4[5] \text{ ومنه: باقى الالفة } 3^2 \text{ على 5 هو 4}$$

$$3^3 \equiv 2[5] \text{ ومنه: باقى الالفة } 3^3 \text{ على 5 هو 2}$$

$$3^4 \equiv 1[5] \text{ ومنه: باقى الالفة } 3^4 \text{ على 5 هو 1}$$

ب/ اأفان أنه من أجل كل عءء طبلف k ، $3^{4k} \equiv 1[5]$:

$$3^{4k} \equiv 1[5] \text{ لءفنا: } 3^4 \equiv 1[5] \text{ ومنه: } (3^4)^k \equiv (1)^k[5]$$

$$3^{4k} \equiv 1[5] \text{ وعلفه:}$$

$$3^{4k+1} \equiv 3[5] \text{ اسائاا أن:}$$

$$3^{4k} \equiv 1[5] \text{ لءفنا: } \left\{ \begin{array}{l} 3^{4k} \equiv 1[5] \\ 3^1 \equiv 3[5] \end{array} \right. \text{ ومنه: } 3^{4k} \times 3^1 \equiv (1 \times 3)[5]$$

$$\begin{cases} f'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3 \\ f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 4 = 2 \end{cases} \text{ولدينا:}$$

وبالتعويض نجد: $y = -3(x - 1) + 2$
ومنه: $y = -3x + 3 + 2$
إذن: $(T): y = -3x + 5$

4. أ. التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ,

$$f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$$

$$\begin{aligned} (x - 2)^2(x + 1) &= (x^2 - 4x + 4)(x + 1) \\ &= x^3 + x^2 - 4x^2 - 4x + 4x + 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 4 = f(x) \end{aligned}$$

ب. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$

$$(x - 2)^2(x + 1) = 0 \text{، تكافئ: } f(x) = 0$$

$$\text{ومنه: } (x - 2)^2 = 0 \text{ أو } x + 1 = 0$$

$$\text{وعليه: } x - 2 = 0 \text{ أو } x = -1$$

$$\text{وبالتالي: } x = 2 \text{ أو } x = -1$$

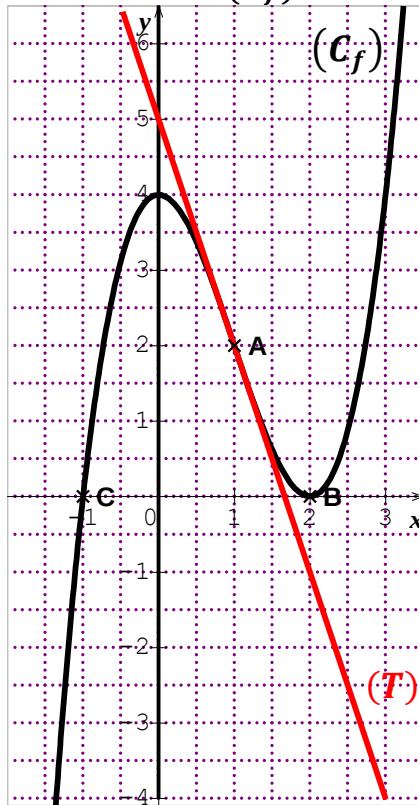
$$\text{إذن: } S = \{2; -1\}$$

استنتاج نقط تقاطع (C_f) وحامل محاور الفواصل:

(C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطتين $B(2; 0)$ و

$$C(-1; 0).$$

5. رسم كلا من (C_f) و (T) :



حل الموضوع الثاني

حل التمرين الأول: (05 نقاط)

لدينا: (v_n) المتتالية الهندسية ذات الحدود الموجبة التي

$$\text{حدّها الأول } v_0 = \frac{1}{2} \text{ وحدّها الخامس } v_4 = 8.$$

1. تعيين أساس هذه المتتالية:

$$\text{نعلم أنّ: } v_n = v_0 \times q^n \text{، ومنه: } v_4 = v_0 \times q^4$$

$$3^{4k+1} \equiv 3[5] \text{ أي:}$$

$$\text{جـ/ التحقّق أنّ } 3^{2021} \equiv 3[5]:$$

$$\text{لدينا: } 2021 = 4(505) + 1 \text{ من الشكل } 4k + 1$$

$$\text{إذن: } 3^{2021} \equiv 3[5]$$

د/ تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $8^n - 1 \equiv 0[5]$

$$\text{لدينا: } 8^n - 1 \equiv 0[5] \text{ تُكافئ: } 3^n - 1 \equiv 0[5]$$

$$\text{ومنه: } 3^n \equiv 1[5]$$

وحسب نتيجة السؤال 2) ب/، فإنّ: $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$).

حل التمرين الثالث: (08 نقاط)

$$\text{لدينا: } D_f = \mathbb{R} \text{، } f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$:

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

2. أ. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ,

$$f'(x) = 3x(x - 2)$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } 3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$$

$$\text{إذن: } f'(x) = 3x(x - 2)$$

دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

الطريقة 01:

$$(f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) \text{ في حالة})$$

$$\text{نضع: } f'(x) = 0 \text{، نجد: } 3x^2 - 6x = 0$$

$$\text{أي: } 3x(x - 2) = 0$$

$$\text{ومنه: } x = 0 \text{ أو } x - 2 = 0$$

$$\text{وعليه: } x = 0 \text{ أو } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+

ب. استنتاج اتجاه تغير f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و

$[2; +\infty[$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[0; 2]$ ؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$f(x)$		4		0	$+\infty$

$$\text{حيث: } f(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$$

$$\text{و } f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$$

3. كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة

A التي فاصلتها 1:

$$\text{معادلة } (T) \text{ من الشكل } y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

2/أ/ دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة 4^n

على 9:

$$4^0 \equiv 1[9] \text{ لدينا:}$$

$$4^1 \equiv 4[9]$$

$$4^2 \equiv 7[9]$$

$$4^3 \equiv 1[9]$$

ومنه: بواقي قسمة 4^n على 9 تُشكل متتالية دورية، دورها 3 وبالتالي:

$n =$	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$	$k \in \mathbb{N}$
$4^n \equiv$	1	4	7	[9]

ب/ تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من 1962^{1442}

و 1954^{2021} على 9:

$$1962 \equiv 0[9] \text{ لدينا:}$$

$$1962^{1442} \equiv 0^{1442}[9] \text{ ومنه:}$$

$$\text{أي: } 1962^{1442} \equiv 0[9] \text{، إذن: باقي قسمة}$$

$$1962^{1442} \text{ على 9 هو } 0.$$

$$1954 \equiv 1[9] \text{ لدينا:}$$

$$1954^{2021} \equiv 1^{2021}[9] \text{ ومنه:}$$

$$\text{أي: } 1954^{2021} \equiv 1[9] \text{، إذن: باقي قسمة}$$

$$1954^{2021} \text{ على 9 هو } 1.$$

ج/ التحقق أن

$$1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv 0[9]$$

لدينا:

$$1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv (0 + 1 + (-1)^{2n} - 2)[9]$$

ومنه:

$$1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv (1 + 1 - 2)[9]$$

$$(لأن: $2n$ عدد زوجي)$$

$$\text{أي: } 1962^{1442} + 1954^{2021} + a^{2n} - 2 \equiv 0[9]$$

د/ تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $4^{3n} + n - 1 \equiv 0[9]$

$$4^{3n} + n - 1 \equiv 0[9] \text{ تكافئ: } 1 + n - 1 \equiv 0[9]$$

$$\text{ومنه: } n \equiv 0[9]$$

$$\text{إذن: } n = 9k \text{ (حيث } k \in \mathbb{N})$$

حل التمرين الثالث: (08 نقاط)

$$\text{لدينا: } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \text{ و } D_f = \mathbb{R}$$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1/ حساب نهاية الدالة f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$:

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}x^3\right) = -\infty$$

2. أ. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x

$$f'(x) = (-x + 3)(x - 1)$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

ولدينا من جهة أخرى:

$$(-x + 3)(x - 1) = -x^2 + x + 3x - 3$$

$$\text{بالتعويض نجد: } 8 = \frac{1}{2} \times q^4$$

$$\text{ويكون: } q^4 = 16 = 2^4 \text{، إذن: } q = 4.$$

كتابة v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{، ومنه: } v_n = \frac{1}{2} \times 2^n$$

2/ اثبات أن العدد 2048 حد في المتتالية (v_n) :

$$\text{نضع: } v_n = 2048 \text{، نجد: } \frac{1}{2} \times 2^n = 2048$$

$$\text{ومنه: } 2^n = 4096$$

$$\text{وعليه: } 2^n = 2^{12}$$

$$\text{وبالتالي: } n = 12 \text{ (} v_{12} = 2048 \text{)}$$

إذن: 2048 حد من حدود المتتالية (v_n) .

3/ حساب بدلالة n المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= v_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 2^1 \right) \left(\frac{1 - 2^n}{1 - 2} \right) = 2^n - 1$$

4/ حساب المجموع $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048$:

$$\text{لدينا: } S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048$$

$$= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \dots + v_{12}$$

$$= 2^{12} - 1$$

$$= 4096 - 1 = 4095$$

حل التمرين الثاني: (07 نقاط)

لدينا: a و b عدنان صحيحان حيث $a \equiv -1[9]$

$$\text{و } b = 2021.$$

1/ تعيين باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 9:

$$\text{لدينا: } a \equiv -1[9] \text{، ومنه: } a \equiv (-1 + 9)[9]$$

$$\text{أي: } a \equiv 8[9]$$

$$\text{إذن: باقي قسمة } a \text{ على 9 هو } 8.$$

$$\text{لدينا: } b = 9(224) + 5 \text{، أي: } b \equiv 5[9]$$

$$\text{إذن: باقي قسمة } b \text{ على 9 هو } 5.$$

ب/ تبين أن $a + 2b$ يقبل القسمة على 9:

$$\text{لدينا: } a + 2b \equiv (-1 + 2(5))[9]$$

$$\text{ومنه: } a + 2b \equiv 9[9]$$

$$\text{وعليه: } a + 2b \equiv 0[9] \text{، إذن: } a + 2b \text{ يقبل القسمة}$$

$$\text{على 9.}$$

ج/ استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $(a + 2b)^2 - 8$ على 9:

$$\text{لدينا: } (a + 2b)^2 - 8 \equiv ((0)^2 - 8)[9]$$

$$\text{ومنه: } (a + 2b)^2 - 8 \equiv -8[9]$$

$$\text{وعليه: } (a + 2b)^2 - 8 \equiv (-8 + 9)[9]$$

$$\text{أي: } (a + 2b)^2 - 8 \equiv 1[9]$$

$$\text{إذن: باقي القسمة الإقليدية للعدد } (a + 2b)^2 - 8 \text{ على 9 هو } 1.$$

نلاحظ أنَّ $f''(x)$ تنعدم عند 2، وَتَغْيَرُ إشارتها إذن: النقطة

$A(2; -\frac{2}{3})$ أي: $A(2; f(2))$ نقطة انعطاف لـ (C_f) .

(لأنَّ: $f(2) = -\frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) = -\frac{2}{3}$)

(4) كتابة معادلة لـ (D) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة

أ:

معادلة (D) من الشكل $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$\begin{cases} f'(2) = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \\ f(2) = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{ولدينا: (ترتيب A)}$$

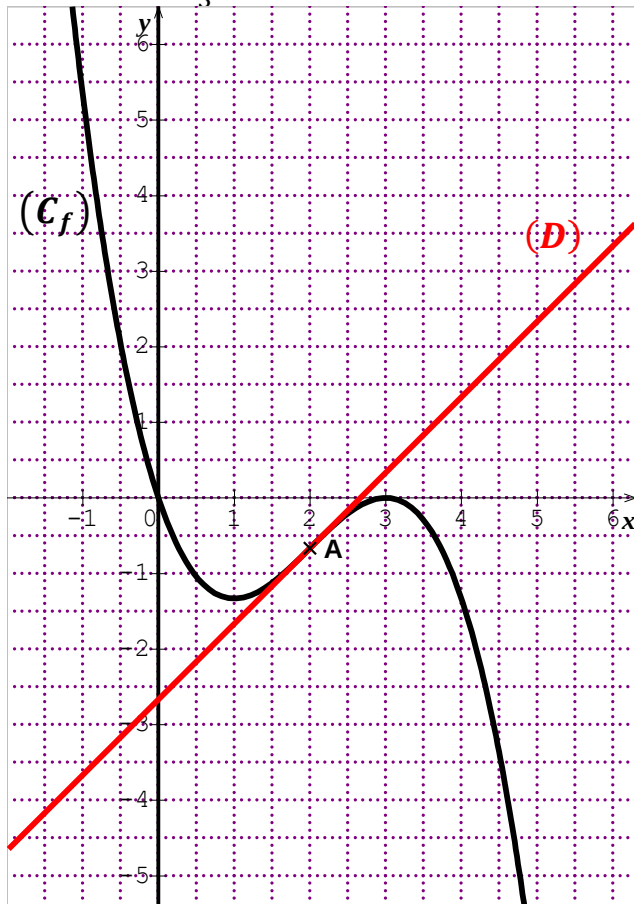
وبالتعويض نجد: $y = 1(x - 2) - \frac{2}{3}$

ومنه: $y = x - \frac{8}{3}$

إذن: $(D): y = x - \frac{8}{3}$

(5) حساب $f(0)$ ثم رسم كلا من (D) و (C_f) :

لدينا: $f(0) = -\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)^2 - 3(0) = 0$



$$= -x^2 + 4x - 3$$

إذن: $f'(x) = (-x + 3)(x - 1)$

دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

الطريقة 01: (في حالة $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$)

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $-x^2 + 4x - 3 = 0$

مميزها: $\Delta = (4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4 = (2)^2$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$x' = \frac{-4+2}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \text{ و } x'' = \frac{-4-2}{2(-1)} = \frac{-6}{-2} = 1$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	○	-

الطريقة 02: (في حالة $f'(x) = (-x + 3)(x - 1)$)

نضع: $f'(x) = 0$ نجد: $(-x + 3)(x - 1) = 0$

ومنه: $-x + 3 = 0$ أو $x - 1 = 0$

وعليه: $x = 1$ أو $x = 3$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	○	-

ب. استنتاج اتجاه تغير f ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 1]$

و $[3; +\infty[$ ، ومتزايدة تماما على المجال $[1; 3]$ ؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	○	-
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\infty$

حيث: $f(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 - 3(1)$

$$= -\frac{1}{3} + 2 - 3 = \frac{-1+6-9}{3} = \frac{-4}{3}$$

و $f(3) = -\frac{1}{3}(3)^3 + 2(3)^2 - 3(3)$

$$= -\frac{1}{3}(27) + 2(9) - 9$$

$$= -9 + 18 - 9 = 0$$

(3) تبيان أن النقطة $A(2; -\frac{2}{3})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى

(C_f) :

لدينا: $f''(x) = -2x + 4$

إشارة $f''(x)$:

نضع: $f''(x) = 0$ نجد: $-2x + 4 = 0$

$$\text{ومنه: } x = \frac{-4}{-2} = 2$$

وبالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	○	-

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$+\infty$  $-\infty$				

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	$\bigcirc$	-