

الامتحان الأول في مادة الرياضيات

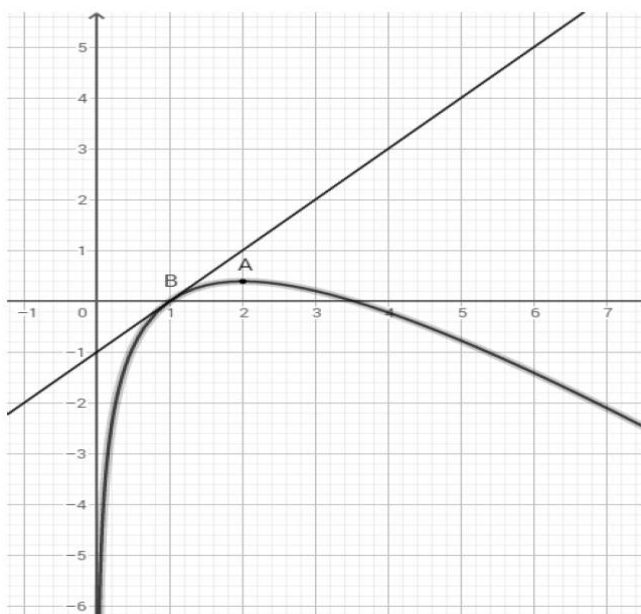
المدة : 3 ساعات

المستوى : 3 تقنية رياضيات

التمرين الأول : 07 نقاط
الجزء الأول :

لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = ax + b + c \ln x$ حيث $a; b; c$ أعداد حقيقية
الشكل المقابل هو (C_g) التمثيل البياني للدالة g و (Δ) المماس عند النقطة B . المماس عند A يوازي محور الفواصل

بقراءة بيانية :

(1) عين نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها(2) عين $g'(2)$ و بين أن $g'(1) = 1$ (3) شكل جدول تغيرات الدالة g (4) عين معادلة للمماس (Δ) (5) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث : $3 < \alpha < 4$. يطلب تعيين الحل الآخر(6) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x (7) باستعمال المعطيات السابقة بين أن : $g(x) = -x + 1 + 2 \ln x$ (8) أدرس تغيرات الدالة g على المجال : $]0; +\infty[$ (ثم تأكد من جواب السؤال 3)• نعتبر الدالة h المعرفة على المجال : $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = [g(x)]^2$ (1) أحسب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة h

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2x \ln x \\ f(0) = 0 \end{cases}$ و ليكن (C_f) هو تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- (1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. ثم فسر النتيجة بيانيا.
- (2) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج بالنسبة لقابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ؟ فسر بيانيا
- (3) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = -g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
- (4) تحقق أن: $f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha$
- (5) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها
- (6) أنشئ المنحني (C_f) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (نأخذ $\alpha = 3,5$)
- (7) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $x^2 + 2x = 4x \ln x + 2 \ln m$

التمرين الثاني: 05 نقاط

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ و ليكن (C_f) هو تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب نهايتي الدالة f ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2)

أ) أثبت أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 و فسر النتيجة بيانيا

(3)

أ) برهن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$

ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{e^x \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$ حيث g دالة يطلب تعيينها

ج) بين أن الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

(4)

أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)

(5) أرسم كلا من المستقيم (Δ) و المنحني (C_f)

التمرين الثالث: 05 نقاط

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

(1) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول: u_1

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(3) أحسب المجموع $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ بدلالة n

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$. أحسب v_2 و v_3

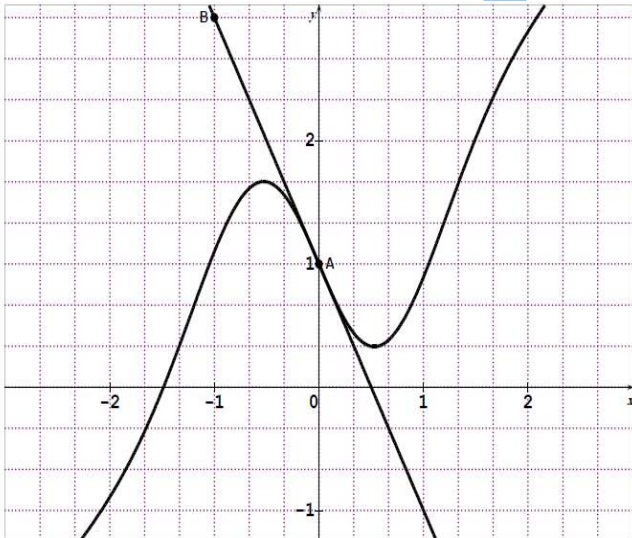
(2) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

(1) بين أن متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(2) أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n

التمرين الرابع: 03 نقاط

في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقطتين $A(0,1)$ و $B(-1,3)$. المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة f القابلة للاشتقاق و المعرفة على $\mathbb{R}$:-



$a \in \mathbb{R}$ حيث: $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$

(1)

أ) بين أن المنحني (C) يشمل النقطة A

ب) عين معامل توجيه المستقيم (AB)

ج) أحسب $f'(x)$

د) عين العدد الحقيقي a بحيث يكون المستقيم (AB)

مماسا لـ (C) في A

(2) نضع: $a = -3$

أ) بين أنه من أجل كل $x \in]-1; 0]$: $f(x) > 0$ و أنه من أجل كل $x \in]-\infty; -1]$: $f'(x) > 0$

ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $c \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ حيث: $f(c) = 0$ و تحقق أن: $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$