الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية الوطنية لولاية عين تموشنت — ثانوية أبي در الغفاري حمام بوحجر

امتحان تجريبي لبكالوريا تعليم ثانوي — دورة : ماي **2019**

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : **4** ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الأتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول (4نقط)

I/ نعتبر في الفضاء المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط A ، B ، C ، D و H ذات الإحداثيات $(-2;2;2)$، $(1;2;-1)$، $(-2;0;1)$ ، $(1;-3;1)$ و $(a;0;b)$ على الترتيب.

1/ أ ـ أحسب قيمة تقريبية لجيب تمام الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ ثم إستنتج $\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

ب ـ استنتج أن A ، B و C ليست في استقامية ثم أحسب مساحة المثلث ABC .

2/ ليكن الشعاع $\vec{n}(2;-\alpha;2\beta)$.

أ ـ عين العددين الحقيقين α و β حتى يكون $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC) .

ب ـ أكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الدي يشمل النقط A ، B و C ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

3/ نعتبر المستوي (Q) من الفضاء معادلته: $2x+y+2z+2=0$.

بين أن (P) و (Q) متقاطعين وفق مستقيم (Δ) يطلب تمثيل وسيطي له .

4/ لتكن (S) سطح كرة مركزها النقطة D و تمس المستقيم (Δ).

أ ـ عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون النقطة H هي المسقط العمودي لـ D على (Δ).

ب ـ استنتج المسافة بين D على (Δ).

جـ ـ أكتب معادلة ديكارتية لـ (S).

التمرين الثاني (4نقط)

1/ عيّن باقي القسمة الأقليدية للعدد 2^n على 5 من أجل كل واحدة من القيم 1 ,2 ,3 و 4 للعدد الطبيعي n .

استنتج من ذلك بواقي القسمة الأقليدية على 5 للعدد 2^n.

2/ أ ـ حلل العدد 1440 إلى جداء عوامل أوّلية .

ب ـ ما هي الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم العدد 1440 .

3/ x و y عددان طبيعيان حيث $0<x\le y$ ، نضع $p\gcd(x,y)=d$ و $ppcm(x,y)=m$.

نريد تعيين x و y حيث $3m^3-108d^3=4320 .....(*)$

أ ـ برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة $(*)$ فإن d^3 يكون قاسما للعدد 1440 .

ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب ـ عين كل الثنائيات (x,y) التي تحقق المعادلة $(*)$.

4/ (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث u_0 و r عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $r > u_0$.

أ ـ أوجد u_0 و r حتى يكون $4038r^4 - 986u_4 = 2880u_1$.

ب ـ عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث : $(u_n^2 + 27u_n)$ يقبل القسمة على 5 حيث u_n عبارة الحد العام للمتتالية (u_n).

<u>التمرين الثالث(5نقط)</u>

المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، Ω النقطة ذات اللاحقة $z_\Omega = -1+2i$.

نسمي r الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ و h التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

نضع : $f = r \circ h$ ($\circ$ هي عملية التركيب).

1/ . ماهي طبيعة التحويل f ؟ حدد عناصره المميزة .

2/ بيّن أنّ الكتابة المركّبة لتحويل f هي : $z' = \frac{1-i}{2}z + \frac{-3+i}{2}$.

3/ نعتبر M و M' نقطتين من المستوي لاحقتيهما z و z' على الترتيب حيث $z \neq z_\Omega$ ، و $f(M) = M'$.

تحقق من العلاقة $z_\Omega - z' = i(z - z')$. استنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

4/ نعتبر النقطة A_0 ذات اللاحقة $z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرّف النقطة A_{n+1} بـ :

$A_{n+1} = f(A_n)$ (f هو التحويل المعرف سابقا)

أ ـ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n اللاحقة z_n للنقطة A_n هي : $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}} - 1 + 2i$.

ب . عين قيم الأعداد الطبيعية n التي من أجلها تكون النقط A_n ، A_0 و Ω في إستقامية .

جـ ـ عين أصغر عدد طبيعي n_0 حيث من أجل $n \geq n_0$ النقطة A_n تنتمي إلى داخل الدائرة التي مركزها النقطة Ω ونصف قطرها 0.01 .

<u>التمرين الرابع:(7نقط)</u>

k عدد حقيقي معطى، نرمز بـ f_k الدالة المعرفة على $\Re$ كما يلي: $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$ نرمز بـ $\mathcal{C}_k$ إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة $2cm$)

1/ عين نهايات f_k عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2/ احسب f'_k من أجل كل عدد حقيقي x . ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_k .

3/ عيّن معادلة (T) لمماس المنحني (C_1) عند النقطة $A(-1;0)$ أرسم (T) و المنحني (C_1)

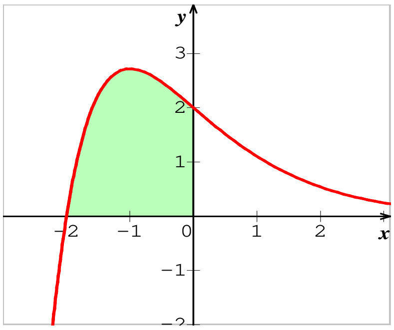
4/ عين من بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m من أجلها المعادلة : $f_1(x)=mx+m$ تقبل حلين متمايزين

5/ احسب القيمة المضبوطة لـ $I_0=\int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx$.

6/ نعتبر متتالية التكاملات (I_n) المعرفة ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $I_n=\int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\,dx$

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $I_{n+1}=(-2)^{n+1}e^2+(n+1)I_n$.

ب - استنتج القيم المضبوطة لـ I_1 و I_2 .



7/ التمثيل البياني الموالي $\mathcal{C}_k$ هو لدالة f_k

أ- باستعمال المعلومات المتوفرة في الشكل ،عين قيمة k المرفقة بالمنحني $\mathcal{C}_k$.

ب - لتكن S مساحة الجزء المضلل.

عبر عن S بدلالة I_0 و I_1 ثم استنتج القيمة المضبوطة للمساحة S

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5نقط)

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2-2z+2=0$ حيث z هو المجهول.

2/ إستنتج في C حلول المعادلة ذات المجهول z حيث $(z+2+3i)^2-2z-6i-2=0$.

3/ المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ لتكن A ، B ، C ، D ، H و M نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=1-i$ ، $z_B=1+i$ ، $z_C=-1-2i$ ، $z_D=-1-4i$ ، $z_H=-\frac{3}{4}$ و z على الترتيب

أ ـ بين أن : $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC) و $2(z_D+z_B)=2(z_A+z_C)$.

ب ـ إستنتج بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

4/ أ ـ أكتب العبارة المركبة لدوران R الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=-2-i$ و الذي يحول النقطة A إلى النقطة E ذات اللاحقة $z_E=-2+2i$.

ب ـ T تحويل نقطي في المستوي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z'=(1+i)\bar{z}+1$ علما أن $\bar{z}$ يرمزإلى مرا فق z

ما هي طبيعة التحويل $T\circ T$ حيث ($\circ$ هي عملية تركيب التحويلات).

جـ ـ إستنتج الطبيعة و العناصر المميزة لتحويل النقطي $R\circ T\circ T$.

5/ أ ـ بين أن النقطة H هي نقطة تلاقي محاور المثلث ABC .

ب ـ عين بدقة (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $4\bar{z}+3=\sqrt{65}\,e^{-i\theta}$ عندما θ يمسح $\Re$

($\bar{z}$ يرمز إلى مرافق z).

التمرين الثاني (4نقط)

1/ أ ـ تحقق من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n-1\geq P\geq 1)$ لدينا $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$.

ب ـ نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^{n-1}+C_n^n$.

برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن $w_n=2^n$.

2/ (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n=\frac{n^2}{w_n}$.

بين أن المتتالية (u_n) متقاربة تتقارب إلى العدد 0 .

3/ (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ ـ أدرس إتجاه تغير المتتالية (v_n) ، بين أن $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}$ برر لمادا $v_n>\frac{1}{2}$.

ب ـ أوجد أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $v_n<\frac{3}{4}$.

4/ نضع من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماما من 4 العدد S_n حيث $S_n=u_5+u_6+....+u_n$

أ ـ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماما من 4يكون : $S_n \le \left[1+\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^2+....+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right]u_5$.

ب ـ أستنتج من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماما من 4يكون $\lim_{n\to+\infty}\left(S_n\right) \le 4u_5$.

جـ ـ بين أن المتتالية (S_n) متزايدة ، هل هي متقاربة ؟

التمرين الثالث:(4نقط)

كيسان متماثلان U_1 و U_2 كل منها يحوي 6 كرات لانفرق بينها عند اللمس.

الكيس U_1 يحوي كرتين بيضاوين و 4 كرات حمراء ، الكيس U_2 يحوي 3 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء .

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرة واحدة ، إدا ظهر في الوجه العلوى لزهرة رقم أكبر تماما من 2 نسحب من الكيس U_1على التوالي و دون الأرجاع كرتين و إلاّ نسحب كرتين على التوالي ودون الأرجاع من الكيس U_2 .

1/ شكّل شجرة الاحتمالات المتوازنة التي تنمذج هذه الوضعية .

2/ أحسب احتمال سحب كرتين من نفس اللون .

3/ علما أن الكرتين من نفس اللون ، ماهواحتمال أن تكونا حمراويين .

4/ نسمي سحب واحدة كل عملية سحب لكرتين من أحد الصندوقين ونعرّف لعبة حظ كما يلي يدفع اللاعب 30 دينار جزائري مقابل كل سحب واحدة ويتحصل على 40 دينار إذا كانت الكرتان من نفس اللون و يتحصل على 30 دينارجزائري إدا كانت الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء و يتحصل على 20 دينارجزائري إدا كانت الكرة الأولى حمراء و الثانية بيضاء.

نسمي ربحا لهذا اللاعب الفارق بين مجموع ما يتحصل عليه من السحبتين و المبلغ الذي دفعه مسبقا .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبتين ربح هذا اللاعب .

أ ـ عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب ـ أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع:(7نقط)

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	‖	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

1)جدول التغيرات الموالي هو لدالة g المعرفة

على $[1;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x-2)}-\ln|x(x-2)|$

أـ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

على المجال $]2;+\infty[$ ، تحقق أن $3<\alpha<3,5$.

ب ـ حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $[1;2[\cup]2;+\infty[$.

2)نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\Re-\{0,2\}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln|x(x-2)|}{(x-1)^2} & x\neq 1 \\ f(1)=-1 \end{cases}$ و **نرمز بـ** (C_f) لتمثيلها البياني في المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1 / بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحني (C_f).

2/ أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 2} f(x)$.

3/ بين أن الدالة f مستمرة عند يمين $x_0=1$.

4/ أ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $\left]1\,,\,\frac{3}{2}\right[$ أن : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln\left[1-(x-1)^2\right]+(x-1)^2}{(x-1)^3}$.

ب ـ بين أن الدالة f تقبل الأشتقاق عند يمين $x_0=1$ (يمكنك الأستعانة بالنتيجة الأتية أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $\left]0\,,\,\frac{1}{4}\right[$ يكون : $-\frac{t^2}{2}-t^3\leq\ln(1-t)+t\leq-\frac{t^2}{2}$).

5/ أـ بين أنه من أجل $x_0\neq 1$ فإن : $f'(x)=\frac{2}{(x-1)^3}g(x)$.

ب ـ تحقق من أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ ثم أعطي حصرا للعدد $f(\alpha)$ تدور النتيجة إلى 10^{-2}.

جـ ـ أعطي جدول تغيرات الدالة f على $\Re-\{0,2\}$.

6/ أ ـ حدد نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل .

ب ـ أرسم المنحني (C_f) محددا عليه نصفي المماسين عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$ (تعطى $\alpha=3.14$ و $f(\alpha)=0.28$).

7/ أ ـ تحقق من أجل كل عدد حقيقي x من $\Re-\{0,2\}$ يكون $\frac{2}{x(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}$.

ب ـ بإستعمال المكاملة بالتجزئة أثبت أن : $\int_3^4 f(x)dx=\frac{3}{2}\ln 3-2\ln 2$.

إنتهى الموضوع الثاني