

على التلميذ أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط: $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ ، $C(4; -2; 5)$

(1) برهن النقط A ، B ، C تعين مستويا . ثم بين أن المستوي (ABC) معادلته من الشكل: $2x + y - 2z + 4 = 0$

(2) أ) ما طبيعة المثلث ABC ؟ . احسب مساحته

ب) احسب المسافة بين النقط O والمستوي (ABC) . ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$

(3) نعتبر G مرجح الجملة المنقلة $\{(O; 3); (A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$ و I مركز ثقل المثلث ABC .

* بين أن النقط G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

(4) لتكن (Γ) و (Y) مجموعتي النقط M من الفضاء حيث:

$$(\Gamma): \|3\vec{OM} + \vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM}\| = 6 \quad \text{و} \quad (Y): \|3\vec{OM} + \vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM}\| = 2$$

أ) عين الطبيعة و العناصر المميزة لـ (Γ) و ادرس وضعيتها مع المستوي (ABC) .

ب) عين طبيعة المجموعة (Y) ثم استنتج معادلة ديكارتية لها .

التمرين الثاني: (06 نقاط)

(1) أ) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب α حيث: $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_C = -z_A, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

أ) اكتب z_A على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للأعداد المركبة z_C و z_B

ب) استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب مركزها و نصف قطرها . ثم علم النقط A ، B و C .

ج) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث:

$$L = \left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954} \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962} \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2016}$$

(3) ليكن f تحويل نقطي حيث: $f(B) = A$ و $f(O) = O$

أ) عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f .

(ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث: $(Z - Z_A)(\overline{Z - Z_A}) = Z_C \cdot \overline{Z_C}$

(ج) عين ثم أنشئ المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل f.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ (لاحظ أن : $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2u_n}$)

(ب) بين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - 2u_n)}{2u_n}$ ، استنتج أن (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة. عين نهايتها

(2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. ثم عين نهاية (u_n) .

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. ثم اكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n

(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

I (نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$)

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1; \frac{3}{2}[$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II (نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$)

(Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقارب لـ (Cf) بجوار $+\infty$ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (Cf) و المستقيم (Δ) .

(4) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$. ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$. أنشئ (Δ) و (Cf) .

(5) أ) جد دالة أصلية للدالة : $\frac{1}{x} (1 - \ln x)$. $x \mapsto$

(ب) احسب المساحة $S(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (Cf) و المستقيمت $y = x$ و $x = 1$ و $x = \alpha$

(ج) تحقق أن : $S(\alpha) = \frac{\alpha^2(2 - \alpha^2)}{2}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط) : في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1; 1; -3)$, $B(2; 0; -2)$, $C(-1; 2; 0)$ و الشعاع $\vec{u}(2; 1; -1)$.

(1) أ) عين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من النقطة C و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

ب) ليكن المستقيم (D) المعرف بالجملة :
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z - 4 = 0 \end{cases}$$

- بين أن الجملة :
$$\begin{cases} x = m + 1 \\ y = -m + 1 \\ z = m - 3 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$
 تمثل وسيطي لـ (D) و أن (D) هو المستقيم (AB) .

ج) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) ليس من نفس المستوي .

(2) لتكن النقطتين $M(2t-1; t+2; -t)$ من (Δ) و $N(m+1; -m+1; m-3)$ من (D)

أ) عين إحداثيات M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (D) و (Δ) .

ب) استنتج المسافة بين (D) و (Δ) .

(3) لتكن M نقطة كيفية من (Δ) و f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(t) = AM^2$

أ) بين أن $f(t) = 6t^2 - 12t + 14$. ب) ادرس تغيرات الدالة f .

ج) عين قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغرية .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (وحدة القياس : $3Cm$)

نعتبر النقط A, B, C لواحقها على الترتيب $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $z_C = z_A + z_B$.

(1) أ) أكتب z_A , z_B على الشكل الأسّي ثم z_C على الشكل الجبري ، و بين أن $OACB$ مربع .

ب) أنشئ النقط A, B, C في المعلم السابق .

ج) أكتب العدد z_C على الشكل المثلثي ثم استنتج القيم المضبوطة لـ : $\cos(\frac{7\pi}{12})$, $\sin(\frac{7\pi}{12})$ ،

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون z_C^n عدد حقيقي موجب .

(2) ليكن f التحويل النقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M' ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة

z' حيث : $z' = (1+i)z$.

أ) بين أن $f(A) = C$ و عين طبيعة التحويل f و عناصره المميزة .

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq 0$ فإن : $\frac{z'-z}{z} = i$ ، استنتج طريقة لإنشاء النقطة M'

ج) اثبت أنه من أجل كل عدد مركب z فإن : $z' - z_C = (1+i)(z - z_A)$.

(د) استنتج انه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى دائرة (C) مركزها A و نصف قطرها 1 فإن النقطة M' صورتها بالتحويل f تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

(هـ) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z - z_A}{z}$ تخيلي صرف موجب .

التمرين الثالث: (03 نقط)

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء (لا نفرق بينها عند اللمس) .
نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الكيس .

(1) أحسب عدد الحالات الممكنة .

(2) أحسب احتمال الحادثتين A و B التاليتين :

A : " سحب كرة واحدة حمراء فقط " ، B : " الحصول على أربع كرات من نفس اللون "

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق عند السحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) أعط قانون الاحتمال لـ X . (ب) أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـ X .

التمرين الرابع: (07 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm}$

الجزء الأول :

(1) ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$.

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل (Δ) معادلته $y = x + 1$.

(4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب المائل (Δ) .

(5) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 = -\ln(e - 1)$.

(6) أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) .

(7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $m - \ln(1 + e^x) = 0$.

(8) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = f(|x|)$

(أ) أثبت أن g زوجية . (ب) اعتمادا على المنحنى (C_f) ، ارسم في نفس المعلم السابق منحنى الدالة g .

الجزء الثاني : (1) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \geq x$ يكافئ أن $x \leq -x_0$.

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$; $n \in \mathbb{N}$.

(أ) في المعلم السابق متل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 دون حسابها مبينا خطوط الرسم

(ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب (u_n) ثم أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq -x_0$.

(ج) بين أن (u_n) متزايدة ، استنتج أنها مقاربة و عين نهايتها . * بالتوفيق في بكالوريا 2016 *