

الامتحان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة : جوان 2015

المدة: 04 ساعات ونصف

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليينالموضوع الأول : (20 نقطة)التمرين الأول: (5 نقاط)المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ؛ (الوحدة $2cm$).

- I. نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين i و 2 على الترتيب
 1. عين لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$
 2. عين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$

II. نضع $f = h \circ \mathcal{R}$

1. ما طبيعة التحويل f ؟ يطلب تعيين عناصره المميزة
 2. لتكن M نقطة كيفية من المستوى ذات اللاحقة z نرمز بـ M' إلى صورة النقطة M بالتحويل f ونرمز بـ Z' إلى لاحقة النقطة M'

- أ. بين أن الكتابة المركبة للتحويل f هي: $z' = (1 + i)z + 1$
 ب. من أجل كل عدد مركب z يختلف عن i : أحسب $\frac{Z' - Z}{i - Z}$ ثم أعط تفسيراً هندسياً لطاولة وعمدة العدد $\frac{Z' - Z}{i - Z}$
 ت. استنتج طريقة لإنشاء M' انطلاقاً من النقطة M من أجل M تختلف عن A
 3. لتكن () مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z و التي تحقق $Z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي
 أ. عين طبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (E)
 ب. استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى المجموعة (E) فإن صورتها M' بالتحويل f تنتمي إلى دائرة
 ت. عين على الرسم النقط A, B و B' ثم ارسم (E) و (E')

التمرين الثاني: (4 نقاط)الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر النقط $A(0; 4; 1)$, $B(1; 3; 0)$, $C(2; -1; -2)$ و $D(7; -1; 4)$.

1. بين أن A, B و C ليست على استقامة واحدة.
 2. ليكن المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و $\vec{u}(2; -1; 3)$ شعاع توجيه له
 أ. بين أن المستقيم (Δ) يعامد المستوي (ABC) .
 ب. اكتب معادلة ديكراتية للمستوي (ABC) .
 ت. أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) .
 ث. عين إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) .

3. ليكن (P_1) المستوي ذو المعادلته : $x + y + z = 0$ و (P_2) المستوي ذو المعادلته : $x + 4y + 2 = 0$.
أ. بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (d)

ب. تحقق أن الجملة $t \in \mathbb{R}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (d) .

$$\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

ت. هل المستقيم (d) والمستوي (ABC) متقاطعان او متوازيان ؟

التمرين الثالث: (4,5 نقطة)

I. أحسب PGCD للعددين $4^5 - 1$ و $4^6 - 1$

II. نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ و } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$$

1. احسب الحدود u_2, u_3 و u_4
 2. اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = 4u_n + 1$
 3. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n , u_n هو عدد طبيعي
 4. استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n , $PGCD(u_n, u_{n+1}) = 1$
- III. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$
1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول 0
 2. أكتب v_n ثم u_n بدلالة n .
 3. عين من اجل كل عدد طبيعي n , $PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$

التمرين الرابع : (5,6 نقطة)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = xe^{x-1} + 1$.
ليكن (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا .
 2. عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.
 3. ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول التغيرات .
- II. ليكن a عدد حقيقي موجب تماما الهدف هو البحث عن مماس للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة a يشمل المبدأ O .
1. نسمي (T_a) المماس للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة a أكتب معادلة للمماس (T_a)
 2. بين أن المماس (T_a) للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة a يشمل المبدأ إذا وفقط إذا كان $1 - a^2 e^{a-1} = 0$
 3. بين أن 1 هو الحل الوحيد للمعادلة $1 - x^2 e^{x-1} = 0$ على المجال $]0, +\infty[$
 4. استنتج من الأسئلة السابقة أنه يوجد مماس واحد (T) للمنحني (C) يشمل المبدأ O يطلب كتابة معادلة له
 5. نقبل أن المنحني (C) يقع فوق المماس (T) ارسم المماس (T) ثم المنحني (C) .
- III. نرمز بـ $\mathcal{D}$ الى مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) والمستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x$ و المستقيمين ذو المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$

1. نضع $I = \int_0^1 xe^{x-1} dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $I = \frac{1}{e}$

2. أستنتج القيمة المضبوطة لمساحة الحيز $\mathcal{D}$

الموضوع الثاني: (20 نقطة)

التمرين الأول: (5 نقاط)

المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ومباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ؛ (الوحدة $4cm$).
 نعتبر النقط A, B, C, D ذات اللواحق $Z_A = 2i, Z_B = i, Z_C = -1+i, Z_D = 1+i$ على الترتيب
 نرمز بـ f إلى التحويل النقطي الذي يرفق كل نقطة M من المستوي ذات اللاحق z وتختلف عن النقطة B
 بالنقطة M' ذات اللاحق z' حيث $z' = i \frac{z-2i}{z-i}$

1. أنشر $(z-1+i)(z-1-i)$
 2. عين لواحق النقط M التي تحقق $f(M) = (M)$
 3. من أجل كل عدد مركب z يختلف عن i بين أن $|z'| = \frac{AM}{BM}$
 4. من أجل عدد مركب z يختلف عن i و $2i$ بين أن $Arg(z') \equiv (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 5. عين المجموعة () مجموعة النقط M ذات اللاحق Z بحيث $|z'| = 1$
 6. عين المجموعة () مجموعة النقط M ذات اللاحق Z بحيث $Arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 7. من أجل كل عدد مركب z يختلف عن i بين أن $z'-i = \frac{1}{z-1}$ ثم أستنتج أن $|z'-i| \times |z-i| = 1$
 8. لتكن النقطة M ذات اللاحق z نقطة من الدائرة (Γ) التي مركزها B ونصف قطرها $\frac{1}{2}$
- ✓ بين أن النقطة M' ذات اللاحق z' تنتمي إلى دائرة مركزها B ونصف قطرها r يطلب تعيينه
- التمرين الثاني: (4,5 نقطة)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقط $A(1,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,3)$

1. عين النقط A, B, C في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
 2. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
 3. أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة O ويعامد المستوي (ABC)
 4. بين أن المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) يتقاطعان في النقطة H ذات الاحداثيات $(\frac{36}{49}; \frac{18}{49}; \frac{12}{49})$
 5. حساب المساحة والحجم
- أ. احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC)
- ب. احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC
- ت. تحقق أن مربع مساحة المثلث ABC يساوي مجموع مربعات مساحات الأوجه الأخرى لرباعي الوجوه
- التمرين الثالث: (4,5 نقطة)

الجزء الأول:

مبرهنة بيزو يكون عدنان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عدنان صحيحان u و v حيث :

$$au + bv = 1$$

مبرهنة غوص a, b, c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة. إذا كان a يقسم الجداء bc و كان a أوليا مع b ،

فإن a يقسم c

✓ برهن مبرهنة غوص باستعمال مبرهنة بيزو

الجزء الثاني:

الهدف هو تعيين المجموعة (S) مجموعة الاعداد الصحيحة النسبية n التي تحقق $\begin{cases} n \equiv 13 [19] \\ n \equiv 6 [12] \end{cases}$

1. البحث عن عنصر من المجموعة (S)
نرمز بـ $(u; v)$ إلى ثنائية الأعداد الصحيحة التي تحقق $19u + 12v = 1$

أ. برر وجود الثنائية $(u; v)$
ب. نضع $n_0 = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ بين أن n_0 ينتمي الى المجموعة (S)
ت. عين حل خاص للمعادلة $19u + 12v = 1$ ثم عين قيمة لـ n_0
2. البحث عن عناصر المجموعة (S)
ليكن n عدد صحيح نسبي ينتمي الى المجموعة (S)

أ. بين أن $\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$
ب. بين انه إذا كان $\begin{cases} n \equiv n_0 [19] \\ n \equiv n_0 [12] \end{cases}$ فإن $n \equiv n_0 [12 \times 19]$
ت. استنتج أن عدد صحيح n ينتمي إلى (S) إذا وفقط إذا أمكن كتابته من الشكل $n = 228k + 212$ مع k عدد صحيح نسبي
التمرين الرابع: (6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$

1. أ. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ ثم ادرس إشارة f'
ب. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$
ج. شكل جدول تغيرات الدالة f

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدھا العام $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$

أ. بين انه إذا كان $n \leq x \leq n+1$ فإن $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$
ب. بين دون حساب n انه من اجل كل عدد طبيعي n , $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$
ت. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة يطلب تعيين نهايتها

3. نضع من اجل كل عدد طبيعي n , $I_n = \int_0^n f(x)dx$

أ. احسب I_n

4. نضع من اجل كل عدد طبيعي n , $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$
أ. احسب S_n . هل المتتالية (S_n) متقاربة ؟