

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) أ) اكتب على الشكل الأسّي العدد المركب a حيث : $a = -2 + 2i\sqrt{3}$.
(i هو العدد المركب الذي تربلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له)

- (ب) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.
(2) نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A ، B ، C ذات اللاحقات $z_A = -2$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = 1 + i\sqrt{3}$ على الترتيب .

- (أ) احسب طولية العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ و عمدة له . (ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

- (3) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{3}$.

- (أ) تحقق أن B تنتمي إلى (E) . (ب) عيّن المجموعة (E) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (u_n) المتتالية المعرفة بهذا الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$.
(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عدنان حقيقيان .

- (1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية ، يطلب حساب أساسها و حدّها الأول .

- (2) احسب كلا من u_n و v_n بدلالة n .

- (3) أ) احسب المجموعين S و P حيث : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $P = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$.

- (ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{1}{2} [3^{n+1} - (n+1)(n+2) - 1]$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (الوحدة $1cm$)

- نعتبر النقط $A(2; 1; 4)$ ، $B(4; -1; 0)$ ، $C(0; 3; 2)$ و $D(4; 3; -2)$.

- (1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CD) .

- (2) لتكن M نقطة من المستقيم (CD) .

- (أ) عيّن إحداثيات النقطة M بحيث تكون المسافة BM أصغر مما يمكن .

(ب) نرمز H إلى النقطة من المستقيم (CD) ذات الإحداثيات $(-1; 3; 3)$. تحقق أن المستقيمين (BH) و (CD) متعامدين.

(ج) بين أن مساحة المثلث BCD تساوي 12 cm^2 .

(3) أ) برهن أن الشعاع $\vec{n}(2, 1, 2)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (BCD) .

(ب) عيّن معادلة ديكرتية للمستوي (BCD) .

(ج) عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و العمودي على المستوي (BCD) .

(د) برهن أن النقطة I ، نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (BCD) ، إحداثياتها هي $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ حيث: $f(x) = \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

(يرمز e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

نسُمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) عيّن بمعادلاتها المستقيمت المقاربة للمنحني (C_f) .

(2) بين أنه من أجل كل حقيقي x من D ، $f'(x) = -\frac{8e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f

و شكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن النقطة $A(0, 1)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) . ارسم المستقيمت المقاربة و المنحني (C_f) .

(ب) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $(3 - m)e^{2x} + m + 1 = 0$.

(4) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسين ميل كل منهما (-6) عند نقطتين من (C_f) يطلب تعيين هاتين النقطتين.

(5) أ) عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل حقيقي x من D : $f(x) = \alpha + \frac{\beta e^{2x}}{e^{2x} - 1}$

(ب) احسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها

$x = \lambda$ ، $x = -\ln 2$ و $y = -1$.

أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

(I) نعتبر النقط A, B, C, D المتميزة ذات اللاحقات على الترتيب z_A, z_B, z_C, z_D بحيث :

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + iz_B = z_C + iz_D \end{cases}$$

برهن أن الرباعي $ABCD$ مربع.

(II) 1) اكتب على الشكل الأسّي و على الشكل المثلثي العددين المركبين z_1 و z_2 حيث: $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 1-i$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $S_n = (1+i)^n + (1-i)^n$.

عَيّن الشكل الدلثي لـ S_n .

3) أجب بصحيح أم خاطئ على ما يلي مع التبرير .

(أ) من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد المركب S_n هو عدد حقيقي .

(ب) توجد أعداد غير منتهية من الأعداد الطبيعية بحيث يكون $S_n = 0$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1) أحسب u_1 و u_2 ، ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

2) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 1)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدّها الأول v_0 .

(ب) اكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n ثم جد أكبر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث يكون $v_n < 955$.

3) احسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \quad \text{و} \quad S'_n = (u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \dots + (u_n - 1)$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على 5 كريات : 3 كريات تحمل الرقم 2 و كريتين تحملان الرقم 3 ؛ و يحتوي كيس U_2

على 5 كريات : ثلاث كريات بيضاء و كريتين حمراوين (لا يمكن التمييز بين الكريات باللمس)

نسحب عشوائيا كرية واحدة من الكيس U_1 و نسجل رقمها ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد n كرية من الكيس U_2

حيث n هو الرقم الذي تحمله الكرية المسحوبة من الكيس U_1 .

1) أنجز شجرة الاحتمالات التي تتمذج هذه الوضعية.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

(أ) عَيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X . احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \ln(1+e^x)$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول هي $2cm$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) بين أنه من أجل كل حقيقي x : $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) ارسم المنحني (C_f) .

5) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \ln(1+e^{-x})$.

نحقق أنه من أجل كل حقيقي x : $h'(x) = -\frac{1}{1+e^x}$.

باستخدام المكاملة بالتجزئة أوجد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

احسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدود بالمنحني (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها $x=0$ و $y=0$ و $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما .

احسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.