

الامتحان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة: جوان 2024

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.
(1) المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_C = -1 \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = \sqrt{3} - 1 + i$$

- العدد المركب α حيث: $\alpha = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ (يساوي: أ) $\alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (ب) $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (ج) $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

(2) طبيعة المثلث ABC هو: أ) ABC قائم في C (ب) ABC قائم في B ومتساوي الساقين (ج) ABC متقايس الأضلاع

(3) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \sqrt{e^{-x} + 3}$

V حجم الجسم الناتج عن دوران (C_f) دورة كاملة حول محور الفواصل لما $x \in [0; 1]$ هو:

أ) 11 (ب) 12 (ج) 15 تعطى النتائج مدور الى الوحدة.

(4) كيس يحتوي على 3 كريات بيضاء و 4 حمراء وواحدة خضراء. نسحب n كرية عشوائيا على التوالي وبالارجاع.

- احتمال الحصول على الأقل رية بيضاء هو: أ) $1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n$ (ب) $1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n$ (ج) $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I / (u_n) متتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{7u_n - 9}{u_n + 1}$ حيث α عدد حقيقي.

(1) حدد قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II / نضع $\alpha = 4$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 5$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة واحسب نهايتها.

(3) (v_n) المتتالية المعرفة على n ب: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

أ- يرهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- نضع P_n بدلالة n ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \left(\frac{4-u_1}{u_1-3}\right) \times \left(\frac{4-u_2}{u_2-3}\right) \times \dots \times \left(\frac{4-u_n}{u_n-3}\right)$ بين أن: $P_n = \frac{n!}{4^n}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها ثلاث كريات حمراء مرقمة ب: 2، 2، 4 وأربع كريات بيضاء مرقمة ب: 0، 0، 4، 2، 0، 0، 2، 2، 4. ن سحب عشوائيا وفي آن واحد 4 كريات من هذا الصندوق.

(1) احسب احتمال الحوادث A ، B ، C و D حيث: A : "جاء الأرقام في الكريات المسحوبة معدوم".

B : "الحصول على أرقام تشكل السنة الميلادية الحالية" C : "الحصول على نفس اللون". D : "الحصول على نفس الرقم".

(2) ننزع الكريات الخضراء من الصندوق السابق ونقوم بالسحب على التوالي وبدون إرجاع 3 كريات.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل طويلة العدد المركب $(a + ib)$ حيث:

a : عدد الكريات الحمراء المسحوبة. b : عدد الكريات البيضاء المتبقية في الصندوق.

(أ) بين أن قيم X هي: $X \in \{1; \sqrt{5}; \sqrt{13}; 5\}$

(ب) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب الأمل الرياضي $E(X^2)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I / لتكن الدالة g العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

(1) حدد قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة g تحقق: $g'(x) + g(x) = 1 - 2xe^{-x}$

(2) أدرس اتجاه تغير g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1.2 < \alpha < -1.1$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II / الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = x + (x+1)^2 e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها وبين أن $f(\alpha) = (\alpha+1)(2e^{-\alpha} + 1)$.

(3) أكتب معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

(4) أ- بين أن (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) ومستقيمه المقارب المائل (Δ) .

(6) أنشئ (Δ) والمنحنى (C_f) . نأخذ $f(\alpha) = -1$

(7) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - x = 2 + 2e^{-x} - 2g(x) - g'(x)$

- جد بسنتيمتر مربع المساحة $S(\alpha)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$$x = 0 \text{ و } x = \alpha$$

$$S(\alpha) = \frac{-16\alpha^2 + 16\alpha + 40}{\alpha^2 - 1} \text{ cm}^2 \quad - \text{ ثم تحقق أن:}$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير:

ليكن المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_C = i \quad , \quad z_B = -2 - 2i \quad , \quad z_A = 3 - i$$

01	$(z_A - 2)$ هو حلا للمعادلة :	$z^2 - 6z + 10 = 0$
02	$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ يساوي	$-i$
03	قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)^n$ حقيقي موجب هي	$n = 4k \quad / \quad k \in \mathbb{N}$
04	التحويل النقطي T الذي مركزه C ويحول A الى B هو	دوران زاويته $\frac{3\pi}{2}$
05	مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $ \bar{z} + 1 - 3i = \bar{z}_B + z_C $ هي	دائرة مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{13}$
06	$\left(\frac{z_A - 2}{\sqrt{2}}\right)^{2024} - \sqrt{2}\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1445} + (z_C)^{1962}$ يساوي	$\bar{z}_B$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

مؤسسة تربوية مؤلفة من 7 أساتذة رياضيات من بينهم 3 رجال H_1 ، H_2 و H_3 و 4 نساء F_1 ، F_2 ، F_3 ، F_4 نريد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 أساتذة مكلفون بالمهام الآتية (رئيس ونائبا له وكاتبا).

(1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

(2) أحسب احتمال أن تكون اللجنة : A " H_1 رئيسا لها " . B " الرئيس ونائبه من الجنسين " .

C " F_1 و F_2 عضوان في اللجنة " . D " تحتوي على الأقل رجلين " .

(3) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيم : $-\alpha$ (عند تواجد كل رجل في اللجنة) ، $2\alpha - 1$ (عند تواجد كل امرأة) حيث α عدد طبيعي.

(أ) بين أن قيم X هي : $\{-3\alpha; -1; 3\alpha - 2; 6\alpha - 3\}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) حدّد أصغر قيمة لـ α حتى يكون $E(X) > 4335$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) متتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} - 1$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{1}{2}$

(2) أ- تحقق أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n + 1}{u_{n+1} + u_n + 2}$

- ثم استنتج اتجاه تغيرات (u_n) .

ب- تحقق أن (u_n) متقاربة.

(3) أ- بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} \left(u_n^2 - \frac{1}{4} \right)$

ب- استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(u_0 + \frac{1}{2} \right) \left(u_1 + \frac{1}{2} \right) \times \dots \times \left(u_{n-1} + \frac{1}{2} \right)$

- ثم حدد نهاية (u_n) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I / نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - x - \ln x$.
- أدرس اتجاه تغيرات الدالة g ثم بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $g(x) \geq 0$.

II / لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = 2 \left(\frac{g(x) + x}{x} \right)$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) نعتبر الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x^2 - 1$. ونسمي (γ) تمثيلها البياني .

أ- بين أن L (C_f) و (γ) مماسا مشتركا (T) في النقطة يطلب تعيينها .

ب- اكتب معادلة L (T) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) .

ج- ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟ مبررا إجابتك .

(3) مثل بيانيا (T) ، والمنحنى (C_f) .

(4) أ- بين أن : $P : x \mapsto x(\ln x - 1)$ دالة أصلية لـ $p : x \mapsto \ln x$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل : $I = \int (\ln x)^2 dx$.

ج- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = e^{-1}$.

III / نعتبر الدالة K المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $K(x) = f(x^2)$. (عبارة $K(x)$ غير مطلوبة) .

- ادرس تغيرات الدالة K .

انتهى الموضوع الثاني

