الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2023

شعبة: التقني رياضي — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــــوع الأول

التمرين الأول: 05 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} \end{cases}$.

1. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < \frac{5}{2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج أنها متقاربة.

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{5}{2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2} - u_n\right)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{5}{2} - u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{5}{2} - u_0\right)$، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \ln(u_{n+1} - u_n)$.

أ. بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ يطلب حساب حدها الأول، ثم اكتب v_n بدلالة n.

ب. احسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = (u_1 - u_0)\times(u_2 - u_1)\times \ldots \times(u_{n+1} - u_n)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة منها 6 كريات بيضاء مرقمة بـ: $0,2,2,2,2,4$ و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: $0,1$.

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس و نعتبر الحدثين A و B بحيث: الحدث A: الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون و الحدث B: الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.
2. بين أن $P(A\cap B) = \frac{1}{8}$، ثم استنتج $P(A\cup B)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب أصغر الأرقام المحصل عليها أو يساويها.
   - ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.
4. نسحب الآن عشوائيا n كرية على التوالي بالإرجاع بحيث $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases}$ ونسمي C الحدث: الحصول على n كرية سوداء.
   - ✓ بين أن $P(C) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثم أوجد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P(\overline{C}) \geq 0{,}99$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول الصحيح $(x;y)$: $2x-5y=1$.

1. أ) جد الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E) بحيث $x_0=3y_0$، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

ب) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن الكسر $\frac{x}{y}$ غير قابل للاختزال.

2. جد قيم العدد الطبيعي λ التي تحقق $\begin{cases}\lambda\equiv 1962[5]\\ \lambda\equiv 2023[2]\end{cases}$، ثم عين باقي قسمة λ على 10.

3. عين الثنائيات الطبيعية $(x;y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $10^{\lambda}+x+y\equiv 0[11]$.

4. ليكن N عددا طبيعيا يكتب $\overline{23}$ في النظام ذي الأساس α ويكتب $\overline{54}$ في النظام ذي الأساس β بحيث α و β عددان طبيعيان.

✓ جد العددين α و β علما أن $\beta^2-\alpha=31$، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة والمتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ بحيث: $g(x)=e^x+x+1$.

1. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن $-1,29<\alpha<-1,27$.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$، ثم تحقق أن $e^{-\alpha}=-\frac{1}{\alpha+1}$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-x+\frac{x}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. أ) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ب) بين أن $f(\alpha)=-\alpha$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).

ب) بين أن $f(-\alpha)=0$ و $f'(-\alpha)=-1$، ثم اكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$.

4. أنشئ المماس (T) والمستقيمات المقاربة، ثم مثل (C_f).

5. أ) بين أنه من أجل $x\in[0;1]$: $f(x)\leq 1-\frac{1}{2}x$، ثم استنتج أنه من أجل $x\in[0;1]$: $1-x\leq f(x)\leq 1-\frac{1}{2}x$.

ب) استنتج حصرا لـ A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحوري الاحداثيات والمستقيم ذا المعادلة $x=1$.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــي

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر العددين الطبيعيين a و b بحيث: $\begin{cases} a+b \equiv 7[11] \\ a-b \equiv 5[11] \end{cases}$.

1. أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد a^2-b^2 على العدد 11.
   ب) بين أن $a \equiv 6[11]$ ثم استنتج أن $b \equiv 1[11]$.
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد a^n على 11.
3. بين أن العدد A بحيث $A = a^{2023} + a^{1444} - (a-b)^{2021}$ مضاعف للعدد 11.
4. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $(b-a)^{10n+6} + (a+b)n \equiv b^{2973}[11]$.

التمرين الثاني: 05 نقاط

I. جد العددين المركبين α و β بحيث: $\begin{cases} 2\overline{\alpha} - \sqrt{3}\overline{\beta} = 3\sqrt{3}+i \\ \overline{\alpha i - \beta} = 0 \end{cases}$.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها $z_A = \sqrt{3}+i$، $z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ و $z_C = -1+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

1. اكتب z_B على الشكلين المثلثي و الجبري، ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
2. أ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}z_A}\right)^n$ تخيليا بحتا سالبا تماما.
   ب) تحقق أن B صورة A بتحويل نقطي S يطلب تعيين طبيعته و تحديد عناصره المميزة.
3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A} = i$، ثم استنتج طبيعة المثلث AOC.
   ب) تحقق أن $z_B - z_A = z_C$ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $AOCB$.
4. عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث $\left|\frac{\overline{z}-\sqrt{3}+i}{\frac{\sqrt{2}}{2}iz}\right| = \left|\frac{z_B}{z_A}\right|$، ثم عين صورتها بالتحويل النقطي S.

التمرين الثالث: 04 نقاط

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{u_n}}{2}\right)^2 \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 \le u_n \le 1$.

2. بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{u_n}\right)\left(1+3\sqrt{u_n}\right)$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر تقاربها.

II. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\sqrt{u_n}-1$.

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n=u_0+u_1+......+u_n$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(\frac{x^2-2x+2}{x}\right)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{> \\ \to 0}} f(x)$.

2. أ) تحقق أنه من أجل $x>0$: $f(x)=\ln(x)+\ln\left(1-\frac{2x-2}{x^2}\right)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln(x)\right]$، ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Γ) المنحني الممثل للدالة $x\mapsto \ln(x)$.

3. بين أنه من اجل $x>0$: $f'(x)=\frac{x^2-2}{x(x^2-2x+2)}$ ثم ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ (لاحظ أن: $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$) وشكل جدول تغيرات الدالة f.

4. أ) بين أن حل المعادلة $f'(x)=-1$ يؤول إلى حل المعادلة $(x-1)(x^2+2)=0$، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه -1 يطلب كتابة معادلة له.

ب) عين احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

5. أنشئ (T) ومثل (Γ) ثم مثل (C_f). يعطى $f\left(\sqrt{2}\right)\approx -0,2$.

6. الدالة g معرفة على $[-2;0[\cup]0;2]$ بـ: $g(x)=-\ln\left(\frac{x^2-2|x|+2}{|x|}\right)$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

أ) بين أن الدالة g زوجية.

ب) بين أنه من أجل $x\in]0;2]$: $g(x)+f(x)=0$، ثم استنتج طريقة لرسم (C_g) انطلاقا من (C_f) و ارسمه.

انتهـــــــــى الموضــــوع الثاني