

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقاط $B(1; -2; 4)$, $A(1; 1; 0)$, $C(-1; 0; 1)$ والمستوي (P) الذي معادلته: $2x + y - z + 3 = 0$.
1/ ليكن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .

أ. بين أنه يوجد عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AB} = \alpha \vec{n}$ ، ماذا تستنتج؟

ب. بين أن الجملة: $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - 3t + t' \\ z = 4t - t' \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستوي (Q) . (حيث t و t' عددين حقيقيين)

الذي يمر بالنقطة A ويوازي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$.

ج. استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (Q) ، و أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

2/ بين أن C نقطة مشتركة للمستويين (P) و (Q) وأن الشعاع $\vec{u}(14; -11; 17)$ يعامد كل من $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ حيث $\vec{n}'$ هو شعاع ناظمي للمستوي (Q) .

3 / استنتج تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D') المسقط العمودي للمستقيم (AB) على المستوي (P) .

4 / لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء. عيّن المجموعة (Γ) للنقطة M بحيث: $\sqrt{6} d(M, (P)) = \sqrt{101} d(M, (Q))$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية: (1) $2020x - 2424y = 1212 \dots \dots \dots$ ذات الجملة $(x; y)$

(1) أ - أحسب $PGCD(2020, 2424)$.

ب - استنتج أن المعادلة (1) تقبل حولا.

ج - أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 3.

(2) استنتج حلا خاصا للمعادلة (1) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

(3) استنتج حلول الجملة $(S): \begin{cases} \lambda \equiv -1[6] \\ \lambda \equiv -4[5] \end{cases}$.

(4) a و b عدنان طبيعيان حيث $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5.

عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (1) ثم أكتب العددين a و b في النظام العشري.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1 / حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$.

2 / المستوي المركب منسوب معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C, D و G لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{2} + i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2\sqrt{2}$,

$z_D = -\sqrt{2} + 3i$ و $z_G = 2i$.

أ. أثبت أن النقطتين A و B تنتميان إلى دائرة مركزها C يطلب تعيين نصف قطرها.

ب . تحقق من أن $|z_A| = |z_B|$ و $z_C = z_A + z_B$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $OACB$ و احسب مساحته .

3 / بين أن النقطة G هي مرجح الجملة المتقلة $\{(C; 1), (D; 2)\}$.

4 / (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\sqrt{(iz+2)(\overline{iz+2})} = 6$ ، عين المجموعة (Γ) .

5 / S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ من المستوي حيث :

$$z' = 2e^{i\pi} z + 4 + 2i$$

عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي S ثم أوجد صورة (Γ) بالتحويل S .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[\cup]e; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، (الوحدة 2 cm) .

1 / احسب نهايتي الدالة f عند e وعند $+\infty$ ، ثم فسّر النتائج هندسيا .

2 / بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتائج هندسيا . (لاحظ أن $x(1-\ln x) = x - x \ln x$) .

3 / بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[\cup]e; +\infty[$: $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

4 / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

II) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x^2(1 - \ln x)$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (انظر الشكل)

1 / أ . بقراءة بيانية حدّد عدد حلول المعادلة (E) التالية:

$$g(x) = 0 \text{ في المجال }]0; +\infty[$$

ب . باستعمال جدول القيم التالي :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	-0,14	-0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلاً α بحيث $2,2 < \alpha < 2,3$

2 / أ . تحقق أنه من أجل كل x من D_f ، $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$.

ب . بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و α .

ج . حدد انطلاقاً من (C_g) إشارة $g(x)$ على المجال $[1; \alpha]$ وبين أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من المجال $[1; \alpha]$.

3 / أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

4 / أ . بين أن $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$ ، (لاحظ أن $\frac{1}{x(1-\ln x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-\ln x}$ لكل x من D_f) .

ب . نعتبر المساحة A لمجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي حيث : $1 \leq x \leq \sqrt{e}$ و $f(x) \leq y \leq x$

احسب A بـ cm^2 .

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

1 / بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq \alpha$.

2 / بين أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$. (يمكن استعمال نتيجة السؤال II) 2 / ج .

3 / استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة معرفة على المجموعة $\mathbb{N}^*$ بـ :
$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 100 \\ u_1 \times u_3 = 256 \end{cases}$$

(1) أحسب u_2, u_1, u_3 ثم عين q أساس المتتالية (u_n) .

(2) عبر عن الحد العام u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n كلا من المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و الجداء $P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

(4) أ - أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على العدد 5.

ب - بين أن العدد $2016^{2017} + 49^{2n} + 5n - 2017$ يقبل القسمة على 5.

ج - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n' = \frac{1}{\ln 2} [\ln 4 + \ln 4^2 + \dots + \ln 4^n]$.

أحسب S_n' بدلالة n ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n' + 4n^2 + 7^{4n} \equiv 0[5]$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء على كرتان بيضاوان تحملان الرقم 1 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 2، 2،
و أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 1، 2، 2، 2 (لا يمكن التفريق بين جميع الكريات عند اللمس).
نسحب عشوائياً وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الوعاء .

(1) احسب احتمال كل من الحوادث التالية :

A: " الكريات الثلاثة المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى ".

B: " الكريات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم ".

C: " من بين الكريات الثلاثة المسحوبة توجد على الأقل كرية واحدة حمراء اللون " .

(2) احسب احتمال الحادثة $A \cap B$.

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد مجموع أرقام الكريات الثلاثة المسحوبة .

أ - عين قيم المتغير العشوائي X .

ب- اعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) أ - عين الجذران التربيعيان للعدد المركب z_1 حيث $z_1 = 3 + 4i$

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركبة z : $(z^2 + 1)(z^2 - 3 - 4i) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D و E

التي لواحقها على الترتيب $z_A = 2 + i, z_B = 2 - i, z_C = i, z_D = -i$ و $z_E = -3i$ على الترتيب

أ - أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي .

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحقق $S(C) = C$ و $S(A) = B$ محددا نسبته وزاويته

(4) أ - عين صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالتشابه S

ب - استنتج مساحة المثلث BCE صورة ABC بالتشابه S .

(5) أ - عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $iz = 1 + 2ie^{i\theta}$ لما θ يمسح المجموعة $\mathbb{R}$

ب - بين أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x) = 1 + x + e^x$

1 / ادرس تغيرات الدالة g

2 / بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α , حيث α من المجال $]-1.3; -1.2[$.

3 / حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (C_f) المنحنى البياني لها في مستوي منسوب

الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

/ 1

أ) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}$

ج) أستنتج اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

د) برهن أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$.

هـ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O مبدأ المعلم ، (T).

و) برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا بمعادلته : $y = x$. ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ز) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) ثم المماس (T)

2 / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية : $me^x + m + x = 0$.

3 / أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ فإن : $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

ب) استنتج حصر مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = -\alpha$ و $x = 1, y = 0$.