



ثانوية : 18 فيفري - الحمادية -
 ثانوية : بلعروسي بن يحي - الرابطة -
 دورة : ماي 2019
 المدة : 04 سا و 30 د

مديرية التربية لولاية البرج
 امتحان تجريبي لبعالوريا التعليم الثانوي
 الشعبة : 3 رياضيات + تقني رياضي
 اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- (I) 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 10 .
 2) استنتج باقي قسمة العدد A على 10 حيث : $A = 2019^{2018} - 2017^{1440}$
 3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $[10] (n-1)3^{2n+1} \equiv 3n \times 1439^n + 1037^{2n+1}$
 4) استنتج قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $[10] 3n \times 1439^n + 1037^{2n+1} \equiv 0$
 (II) 1) أحسب : $PGCD(225; 180)$
 2) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $225x - 180y = 90$
 3) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث : $a = 52^\alpha = 44^\beta$ ، $b = 252^\alpha = 206^\beta$
 - عيّن α ، β ثم a و b .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

- 1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :
 $(E) \dots \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0$ ، \bar{z} هو مرافق العدد المركب z .
 أ) بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z} + 1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$
 ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (E) .
 2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها
 على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = \bar{z}_B$ ، $z_D = 3$.
 أ) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا .
 ب) عيّن طبيعة المثلث ABC .
 3) أ) أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه .
 ب) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD .
 4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحتقتها z تحقق : $z + 1 = 2\sqrt{3} \cdot k e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0; +\infty[$
 - عين قياسا للزاوية الموجبة $(\vec{u}; \overline{AB})$ ، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ) .
 5) أ) عيّن قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون : $-\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} + \alpha \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
 ب) عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 3\overrightarrow{DM}\| \leq 2\|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$
 ج) استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ) .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

كيس يحتوي على 5 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس

(1) ن سحب من الكيس 3 كرات عشوائيا و في آن واحد .

- أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

A : " الكرات المسحوبة كلها حمراء " .

B : " توجد كرة واحدة حمراء في السحب " .

C : " توجد على الأقل كرة واحدة بيضاء في السحب " .

D : " الكرات المسحوبة من ألوان مختلفة " .

(2) ننزع من الكيس الكرات البيضاء و نضع مكانها n كرة سوداء حيث : $(n \geq 2)$ ثم ن سحب كرتين على التوالي دون إرجاع

- نفرض أنّ سحب كرة حمراء يساوي (-10) نقطة ، و سحب كرة سوداء يساوي (+5) نقطة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل سحب كرتين مجموع النقط المحصل عليها .

(أ) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري .

(ب) عيّن قيمة n حتى تكون اللعبة مربحة .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) (أ) تحقق أنّه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن : $\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$.

(ب) أثبت أنّ الدالة f فردية ، ثم أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

(ج) استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ فإن : $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$.

(3) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - 1 + \frac{1}{2}x \right]$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا .

(ب) استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

(4) أرسم المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ و المستقيم (Δ) ، ثم أنشئ المنحنى (C_f) .

(5) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما

(أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

(ب) أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (d) و المستقيمين ذو المعادلتين :

$x = 0$ و $x = \lambda$ ، ثم أحسب $A(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $+\infty$.

(II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بعدها الأول $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$.

(1) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n > 0$

(2) (أ) تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

(ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا يمكن القول عن تقاربها ؟

(3) بيّن أنّه من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإنّ : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

$$(\alpha \geq 2 \text{ عدد حقيقي}) \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\alpha} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{\alpha n} u_n \quad : n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي:

(1) برهن بالتراجع أنّ من اجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N}^* : $u_n > 0$.

(2) أ- برهن ان من اجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N}^* : $n+1 - \alpha n \leq 0$.
ب- استنتج ان المتتالية u_n متناقصة. هل u_n متقاربة. علل.

(3) لتكن v_n المتتالية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $v_n = \frac{1}{\alpha n} u_n$

أ- برهن أن من اجل كل طبيعي n من \mathbb{N}^* : $v_n = \frac{1}{\alpha^{n+1}}$.

ب- أكتب u_n بدلالة n و α ثم برهن ان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0$.

(4) نعتبر المتتالية s_n المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $s_n = u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{3}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} u_k$.

أ- أكتب s_n بدلالة n و α .

ب- أوجد α علما ان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n) = \frac{1}{2018}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء ، نعتبر النقط $A(1; -2; 2)$ ، $B(1; 0; 1)$

و لتكن (s) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ حيث : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$ (s)

(1) برهن ان (s) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(2) ليكن (P) المستوي الذي يعامد (AB) ويشمل النقطة $E(1; 1; -1)$

أ- برهن ان معادلة المستوي (P) هي : $2y - z - 3 = 0$.

ب- برهن ان (P) يمس (s) في نقطة H يطلب تعيين احداثياتها.

(3) ليكن (Q) المستوي الذي يمس (s) في النقطة B

أ- برهن ان معادلة المستوي (Q) من الشكل : $-2x + z + 1 = 0$.

ب- برهن ان (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب اعطاء تمثيل وسيطي له.

(4) ليكن (Q_m) مستوي حيث : $-2x + z + m = 0$ (Q_m)

أ- عين حسب قيم m طبيعة المجموعة $(s) \cap (Q_m)$.

ب- برهن ان (Q_0) يقطع (s) وفق دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

$$(1) \text{ ليكن العددا المركبان } z_1 \text{ و } z_2 \text{ حيث : } z_1 = \sqrt{2}(1-i) \text{ و } z_2 = \frac{\sqrt{2} + (-1 + \sqrt{2})i}{1 - z_1}$$

أ - أكتب العدد z_1 على الشكل المثلثي و الشكل الاسي و z_2 على الشكل الجبري.

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر ، M و M' نقطتان لاحقتاهما z و z' على الترتيب ؛ نضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$. نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ، النقطة M'

$$\text{حيث : } \begin{cases} x' = \sqrt{2}(x + y + 1) \\ y' = \sqrt{2}(-x + y + 1) - 1 \end{cases}$$

أ - بين أن العبارة المركبة للتحويل S هي من الشكل : $z' = \sqrt{2}(1-i)z + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - i$.

ب - استنتج الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S .

ج - Δ المستقيم ذو المعادلة $x + y + 1 = 0$ ، أكتب معادلة لصورة المستقيم Δ بالتحويل S

(3) أ - أكتب العبارة المركبة للتحويل $S \circ S$. واستنتج طبيعته وعناصره المميزة.

ب - قارن بين العناصر المميزة للتحويلين S و $S \circ S$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $g(x) = x^2 + 2x - \ln(x + 1)^2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g واستنتج إشارة $g(x)$.

(II) لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ حيث : $f(x) = \frac{x^2 + x + 2\ln|x+1|}{x+1}$.

(c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس ($\vec{i}; \vec{j}$) .

أ - عين العددين الحقيقيين $a; b$ بحيث يكون من أجل كل $x \neq -1$: $f(x) = ax + \frac{b\ln|x+1|}{x+1}$

ب - بين أنه من أجل كل $x \neq -1$: $f'(x) = \frac{g(x)+3}{(x+1)^2}$

ت - أدرس تغيرات الدالة f .

ث - بين أن (c_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) يطلب تعيينه . ثم أدرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (D) .

(III) أ - برهن على وجود مماسين (T); (T') لـ (c_f) يوازيان (D) اكتب معادلتيهما .

ب - برهن أن النقطة $\Omega(-1; -1)$ مركز تناظر للمنحنى (c_f) .

ت - أنشئ : (D) ، (T); (T') ، (c_f) (الوحدة 2cm) .

ث - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيمات : $y = x$; $x = 2$; $x = \frac{-2}{3}$

ج - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع المنحنى (c_f) والمستقيمات (D_m) التي معادلاتها

$$y = x + m$$