

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم م $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;2;-2)$ ، $B(0;3;-3)$ و $C(1;1;-2)$

(1) أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب - بين أن الشعاع $\vec{n}(1;0;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

(2) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0$

- بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تحديد احداثيات مركزها Ω و نصف قطرها .

(3) أ - بين أن سطح الكرة (S) يمس المستوي (ABC) .

ب - احسب الطول ΩC ثم استنتج نقطة التماس بين (S) و (ABC) .

التمرين الثاني: (4.5 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى م م $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط A ، B و C ذات اللواحق: $z_A = i$ ، $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ و f التحويل النقطي المعرف بالعلاقة المركبة: $z' = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

(1) أ - اكتب z_C على الشكل الجبري.

ب - حدد طبيعة التحويل f مع تعيين عناصره المميزة.

(2) أ - اوجد z_D لاحقة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,2)\}$.

ب - حدد طبيعة مجموعة النقط $M(Z)$ التي تحقق: $z = e^{i\theta}$ لما يتغير θ في المجال $[0;2\pi]$.

(3) نعتبر الآن التحويل النقطي h الذي يحول $M(Z)$ إلى $M'(Z')$ حيث: $z' - i = 2(z - i)$

أ - حدد طبيعة التحويل h و عناصره المميزة.

ب - اوجد z_E لاحقة E صورة النقطة D بالتحويل h ثم بين أن: $z_D - z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_C)$

ج - استنتج قياس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{CD})$ ثم حدد نوع المثلث CDE .

(4) بين أن التحويل $s = r \circ h$ هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

نعتبر المتتاليات (u_n) و (v_n) المعرفتين على N حيث: $u_0 = 1$ و $v_0 = 2$ و من أجل كل n من N :

$$v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}v_n$$

(1) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على N بـ: $w_n = v_n - u_n$

أ - بين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول w_0 يطلب حسابه.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

ج - استنتج إشارة w_n ثم استنتج أنه من أجل كل n من N : $v_n \geq u_n$.

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(3) بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ .

(4) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $v_n + u_n = 3$

ب - استنتج النهاية ℓ .

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

(I) g دالة معرفة على $]-\infty; 1]$ بـ: $g(x) = 1 - (x-1)e^{x-1}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-\infty; 1]$.

(2) شكل جدول تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]-\infty; 1]$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $f(x) = -e^{x-1} + \ln(1-x)$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ثم فسر النتيجة الثانية بيانيا.

(2) بين أنه من أجل كل x من $]-\infty; 1[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{1-x}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(3) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-1 < \alpha < 0$.

ب - عين حصرًا للعدد α سعته $0, 1$.

(4) احسب $f(0)$ ثم انشئ المنحنى (C_f) .

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $-e^{x-1} - 2m + \ln(1-x) = 0$

(6) نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty; 1[$ بـ: $h(x) = (x-1)\ln(1-x) - x$

أ - بين أن h هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(1-x)$ على المجال $]-\infty; 1[$.

ب - احسب العدد الحقيقي $I = \int_{-1}^{\alpha} f(x) dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

I) نعتبر كثير الحدود التالي: $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

(1) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $p(z) = (z+1)(z^2 + \alpha z + \beta)$

(2) حل في C المعادلة: $p(z) = 0$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقاط A, B, C و D

حيث: $z_D = 3$ و $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_B = 2 + \sqrt{3}i$ ، $z_A = -1$

(1) بين باستعمال الخواص و علاقة شال أن: $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = (\overline{AC}; \overline{AB})$

(2) اكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج نوع المثلث ABC بدقة.

(3) بين أن النقطة D هي مرجح الجملة $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$

(4) (Δ) مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق: $(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}) \cdot \overline{CD} = 12$

- اوجد بدلالة x و y احداثيات $\overline{MD}$ ثم بين أن (Δ) هو مستقيم يطلب تحديد معادلة ديكارتية له.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ من أجل كل n من N : $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$

نضع من أجل كل n من N : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = 5^n u_n$

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ يطلب حساب حدها الأول v_0 و اعطاء عبارة حده العام v_n .

(2) بين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5 يطلب حساب حدها الأول w_0 .

(3) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم بين أن: $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$

(4) أ - بين أنه من أجل كل n من N^* : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ (يمكن البرهنة على أن: $u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n \leq 0$)

ب - استنتج أنه من أجل كل n من N^* : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج - استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و خمس كريات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 لانفرك بينها عند اللمس. نسحب كريتين على التوالي و بدون إعادة الكرية المسحوبة إلى الصندوق.

(1) اذكر لماذا لدينا تساوي الإحتمال؟

(2) نعتبر الحوادث التالية: A "سحب كريتين من نفس اللون"

B "سحب كريتين تحملان نفس الرقم" ، C "سحب كريتين مجموع رقميهما يساوي 7"

أ - بين أن $p(A) = \frac{13}{28}$ ثم احسب: $p(B)$ و $p(C)$.

ب - ما احتمال سحب كريتين تحملان نفس الرقم علما أنهما من نفس اللون؟

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب - احسب $E(X)$ ثم $V(X)$.

التمرين الرابع: (8 نقاط)

(I) g دالة معرفة على R ب: $g(x) = 4xe^{2x} + 1$

(1) احسب نهايات الدالة g .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال R ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أنه من أجل كل x من R : $g(x) > 0$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على R ب: $f(x) = x + 1 + (2x - 1)e^{2x}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ - بين أن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) بين أنه من أجل كل x من R : $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(4) أ - بين أن المنحنى (C_f) يشمل النقطة $\omega\left(\frac{-1}{2}; \frac{e-4}{2e}\right)$.

ب - تحقق أن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

(5) احسب $f(0)$ ثم انشئ (Δ) و المنحنى (C_f) .

(6) أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب العدد: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx$

ب - احسب التكامل $I = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$. ماذا تمثل النتيجة المحصل عليها بالنسبة للدالة f .