

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقطة)

(1) أ) حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة: $Z^2 + 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$.

ب) أكتب حل المعادلة السابقة على الشكل الأسّي.

(2) في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث: $Z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} Z$.

▪ عين طبيعة التحويل T محددًا عناصره المميزة .

(3) لتكن النقطة A ذات اللاحقة Z_1 حيث: $Z_1 = -\sqrt{3} + i$

أ) عين Z_2 و Z_3 لاحقتي كل من النقطتين B و C على الترتيب حيث : $T(A) = B$ و $T(B) = C$.

ب) أنشئ النقط: A ، B و C .

ج) أحسب: $\frac{Z_2 - Z_3}{Z_1 - Z_3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

أ. يحتوي صندوق U_1 على تسع قرصات لا تميز بينها باللمس : أربعة منها حمراء و ثلاثة منها خضراء واثنين بيضاوين

نسحب عشوائيا من U_1 قرصتين في آن واحد ، أحسب احتمال كل من الحدثين التاليين :

A : " القرصتان المسحوبتان لهما نفس اللون "

B : " القرصتان المسحوبتان من لونين مختلفين "

أ. نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على خمس كريات لا تميز بينها باللمس تحمل الأرقام : 1، 1، 1، 2 و 2 . ولنعتبر التجربة العشوائية التالية :

إذا تحقق الحدث A فإننا نسحب عشوائيا من U_2 كرتين على التوالي دون إرجاع .

أما إذا تحقق الحدث B فإننا نسحب عشوائيا من U_2 كرتين على التوالي بإرجاع .

نرمز بـ : E للحدث : " كل كرية من الكرتين المسحوبتين تحمل الرقم 1 "

F للحدث : " كل من الكرتين المسحوبتين تحملان رقمين مختلفين "

و بـ G للحدث : " كل كرية من الكرتين المسحوبتين تحمل الرقم 2 "

أ) أنجز شجرة الاحتمالات المرفقة بهذه التجربة.

ب) أحسب: $P(E)$.

ج) ما احتمال الحصول على قريصتين لهما نفس اللون علما أن كل كرية من الكريتين المسحوبتين من U_2 تحمل الرقم 1 ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = x - x \ln x$

(1) أحسب نهايتي الدالة g عند كل من 0 و $+\infty$.

(2) بين أن: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $g'(x) = -\ln x$.

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم أنجز جدول تغيراتها.

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $U_n = \frac{e^n}{n^n}$

و المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N}^* بـ $v_n = \ln U_n$.

(1) بين أن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n - n \ln n$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

(3) بين أن المتتالية (U_n) محدودة.

(4) بين أن المتتالية (U_n) مقاربة ثم أحسب نهايتها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1,8; 1,9[$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2 \ln(x)}{x^2 + x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

(1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند كل من 0 و $+\infty$ ، ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليهما.

ب) بين أن: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم أنجز جدول تغيراتها.

(2) أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ، ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.

ب) عين فاصلة نقطة تقاطع (C) مع حامل محور الفواصل.

ج) مثل بيانيا (C).

الجزء الثالث: نرمز بـ A إلى مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتهما $x = \frac{3}{2}$ و $x = 1$.

(أ) بين أن: من أجل كل $x \in [1; +\infty[$: $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$

(ب) أحسب I حيث: $I = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x} dx$

(ج) باستخدام المكاملة بالتجزئة أحسب J حيث: $J = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{x^2} dx$

(د) استنتج حصر لـ K حيث: $K = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x) dx$

(هـ) عبر عن A بدلالة K ثم استنتج حصر لـ A

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط) ليكن θ عدد حقيقي من المجال $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$.

(1) حل في \mathbb{C} المعادلة: $Z^2 - 2(i + \cos \theta)Z + 2i \cos \theta = 0$

(2) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط: A ، M_1 و M_2 التي لواحقها على

الترتيب Z_A ، Z_1 و Z_2 حيث: $Z_A = i$ ، $Z_1 = i + e^{i\theta}$ و $Z_2 = i + e^{-i\theta}$

(أ) عين (E_1) مجموعة النقط M_1 لما θ يسمح $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$.

(ب) عين (E_2) مجموعة النقط M_2 لما θ يسمح $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$.

(ج) نعتبر I منتصف القطعة المستقيمة $[M_1M_2]$ ، عين (E_3) مجموعة النقط I لما θ يسمح $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$.

(3) (أ) بين أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $i + e^{ix} = 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

(ب) استنتج الشكل الأسّي لكل من العددين Z_1 و Z_2 .

(4) (أ) أثبت أن المثلث AM_1M_2 متقايس الساقين في A .

(ب) حدد قيمة θ التي من أجلها يكون المثلث AM_1M_2 متقايس الأضلاع.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أ. في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: A ، B و C التي احداثياتها

$(-1; -3; 2)$ ، $(2; 0; 1)$ و $(3; 1; 0)$ على الترتيب.

(1) بين أن النقط: A ، B و C تعين مستويا.

(2) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(0; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) .

(3) استنتج معادلة ديكارتية لـ (ABC) .

II. نعتبر المجموعة (S_α) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2y \sin \alpha + 2z + \alpha^2 + \sin^2 \alpha - 1 = 0$$

(1) بين أن: (S_α) سطح كرة محدد عناصرها المميزة.

(2) أدرس تبعا لقم الوسيط α الوضع النسبي لـ (S_α) و (ABC) .

(3) بين أن (ABC) يمس $\left(S_{\frac{-\pi}{2}}\right)$ في نقطة يطلب تعيين احداثياتها

التمرين الثالث: (05,5 نقاط)

(1) نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$

(أ) أحسب: I_1 .

(ب) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$

(ج) باستخدام الكاملة بالتجزئة بين أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

(د) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $e^2 = 1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

(2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على \mathbb{N}^* ب: $U_n = \frac{2^n}{n!}$

(أ) أحسب $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ثم أثبت أن: من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$: $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

(ب) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$: $0 \leq U_n \leq U_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

(3) (أ) استنتج نهاية المتتالية (U_n) ثم نهاية المتتالية (I_n) .

(ب) تحقق أن: $e^2 = \lim_n \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!}\right)$

التمرين الرابع: (06 نقطة)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} ب: $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1cm$

(1) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها .

(2) أثبت أن النقطة I مركز التناظر ل (C) .

(3) أكتب معادلة ل (T) مماس (C) في النقطة I .

(4) أرسم (T) ثم مثل بيانيا (C) .

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية (I_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي: $I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(t) dt$

(1) بين أن: $I_n = 4[\ln(n+2) - \ln(n+1)]$

(2) عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

(3) احسب $A(n)$ حيث $A(n)$ هي مساحة الحيز من المستوي المحدود ب (C) والمستقيمت التي معادلاتها:

$$y = 4 \text{ و } x = \ln(n+1), x = 0$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2019