



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

I نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.
- برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) ثابتة .

II نعتبر الآن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

n	0	1	2	3	4
u_n					

(1) أملء الجدول التالي (تعطى النتائج مقربة إلى 10^{-3}) .
أذكر تخميننا يتعلق باتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

(2) أ- برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $0 < u_n \leq 2$.
ب - استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كما يلي $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$.
أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) أحسب، بدلالة n ، المجموع : $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$ ثم استنتج الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

كيس يحتوي على 9 كريات لا نفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي:

خمس كريات حمراء مرقمة ب : 1،1،2،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة ب : 3، 2، 3- و كرية بيضاء تحمل الرقم 1-.

(1) نسحب عشوائيا أربع كريات و في آن واحد. أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " الحصول على أربع كريات تحمل نفس اللون".

B : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر".

C : "الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم".

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

(ب) أحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب احتمال الحدث : " $X^2 - X > 0$ "

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1/ حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) $3x - 2y = 1$

2/ ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم.

أ/ بين ان الثنائية $(14n + 3; 21n + 4)$ حل للمعادلة (E) .

ب/ استنتج ان العددين $14n + 3$ و $21n + 4$ اوليان فيما بينهما.

3/ ليكن d هو القاسم المشترك الاكبر للعددين $21n + 4$ و $2n + 1$.

أ/ عين قيم d .

ب/ بين ان $n \equiv 6 [13]$ يكافئ $d = 13$.

4/ من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ و نضع $a = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ و $b = 21n^2 - 17n - 4$.

أ/ بين ان a و b مضاعفان للعدد $(n - 1)$.

ب/ عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

1 ● الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $g(x) = 1 - xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

2 ● نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كما يلي : $f(x) = x + (x + 1)e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أ/ بين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب/ بين انه من اجل كل x من \mathbb{R} $f'(x) = g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج/ استنتج ان للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها.

(2) أ/ بين ان المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

(3) (T) المستقيم الذي معادلته $y = x + e$. بين ان (T) مماس للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين احداثيتها.

(4) أ/ بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$.

ب/ أنشئ (Δ) و (T) ثم (C_f) .

ج/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $(x + 1)e^{1-x} = |m|$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} كثير الحدود $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$

(أ) بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل $P(z) = (z - 8)(\alpha z^2 + \beta z + \gamma)$ ، حيث α ، β ، γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
(ب) حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ، نعتبر النقط A ، B ، C التي لواحقها على الترتيب هي :

$$z_C = 8 ، z_B = 2 + 2\sqrt{3}i ، z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$$

(أ) أحسب طولية وعمدة العدد المركب $z_A = 2 - 2\sqrt{3}i$ ، علم النقط A ، B ، C .

(ب) أحسب $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ ثم عين طولية وعمدة Z ، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثاني : (5 نقاط)

يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل العدد 1 و واحدة تحمل العدد 2 وكرتين حمراوين تحملان العددين 0 و -1 . كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس .

1/ نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين على التوالي بالارجاع.

أ/ ما احتمال A " الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما " .

ب/ ما احتمال B " الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني " .

2/ نقوم باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل العدد 2 حيث $n > 1$ و نسحب من الصندوق عشوائيا كرتين على التوالي بدون ارجاع.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع العددين المسجلين على الكرتين .

أ/ عين قيم المتغير العشوائي ثم عرف قانون احتماله.

ب/ بين ان الامل الرياضي $E(X) = \frac{4n + 10}{n + 4}$.

ج/ عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n حيث يكون $E(X) > \frac{39}{10}$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

نعتبر في المجموعة Z^2 المعادلة : $5x - 6y = 3$ (E)

(1) أ- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 .

ب- استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في Z^2 المعادلة (E) .

$$\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases} : (S) \text{ استنتج حلول الجملة}$$

د- حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية.

$$(2) \text{ عين كل الثنائيات } (x, y) \text{ حلول المعادلة } (E) \text{ التي تحقق } x^2 - y^2 \leq 56$$

(3) a و b عدنان طبيعيين حيث : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5 .

- عين α و β حتى تكون الثنائية (a, b) حلا للمعادلة (E).

التمرين الرابع : (7 نقاط)

$$1. \text{ ا. الدالة المعرفة على المجال }]-1; +\infty[\text{ بـ} : g(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$$

$$(1) \text{ بين أن : } \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty, \text{ ثم أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

(2) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق : $3.9 < \alpha < 4$.

(4) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

$$II. \text{ ا. الدالة المعرفة بـ } f(0) = 0 \text{ ومن أجل كل عدد حقيقي } x \text{ على المجال }]-1; +\infty[\text{ بـ} : f(x) = \frac{(\ln(x+1))^2}{x} \text{ وليكن}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس (O, \bar{i}, \bar{j}) .

$$(1) \text{ أ- بين أن : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ ثم فسر النتيجة هندسيا.}$$

$$\text{ب- بين أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ ثم فسر النتيجة هندسيا.}$$

$$\text{ج- أحسب } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ وفسر النتيجة هندسيا.}$$

$$(2) \text{ بين أنه من أجل كل } x \text{ على المجال }]-1; +\infty[\text{ فإن : } f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} g(x)$$

أ- عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

$$\text{ب- بين أن : } f(\alpha) = \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \text{ ثم عين حصر } f(\alpha) \text{ لـ}$$

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

د) أرسم المنحنى (C_f) و المماس (T) .

بالتوفيق في شهادة البكالوريا 2021