

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين 01:

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $U_0 = 1$ و $\ln U_1 + \ln U_2 = -3\pi$

أ) عين أساس هذه المتتالية ، وأحسب U_n بدلالة n .

ب) نسمي P_{n+1} المجموع : $U_0 + U_1 + \dots + U_n$. أحسب P_{n+1} بدلالة n ، ثم جد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P_{n+1})$

2) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $V_n = \ln(U_n)$

أ) بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب) نسمي S_{n+1} المجموع : $V_0 + V_1 + \dots + V_n$. أحسب S_{n+1} بدلالة n ، ثم بين أن $\sin(S_{n+1}) = 0$

3- أ) نسمي π_{n+1} الجداء : $U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$ ، أحسب π_{n+1} بدلالة n

ب) عين الحد U_p بحيث يكون : $\pi_{p+1} = e^{-6\pi}$

التمرين 02:

1) تذكير: إذا كان n و p عددين طبيعيين حيث $p \leq n$ فإن $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

• بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ومن أجل كل عدد طبيعي p :

حيث $1 \leq p \leq n$ لدينا : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

2) كيس يحتوي على 10 قريصات لا نفرق بينها عند اللمس ، 7 منها بيضاء مرقمة من 1 إلى 7

و 3 منها سوداء مرقمة من 1 إلى 3. نسحب من هذا الكيس قريصتين في آن واحد.

أ) نسمي A الحادثة " الحصول على قريصتين بيضاويين "

• نسمي B الحادثة " الحصول على قريصتين تحملان رقمين فرديين " .

بين أن احتمال A يساوي $\frac{7}{15}$. ثم احسب احتمال B .

• هل الحادثتان A و B مستقلتان .

ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد القريصات البيضاء .

• عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

• احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كمايلي : $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1-أ-تحقق أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ ثم استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

ب-بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

2-أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 4$ وفسر النتيجة الثانية هندسيا.

3-أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$ ثم تحقق أن : $f'(0) = 0$

ب-أدرس إشارة $(\sqrt{e^x} - 1)$ على $\mathbb{R}$ واستنتج أن f متزايدة على $[0; +\infty[$ و متناقصة على $]-\infty; 0]$

4-أ-تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x + 2\ln(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x})$.

ب-بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

5-أ-تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$

ب-أدرس أشاره $(\sqrt{e^x} - 2)$ و $(\sqrt{e^x} - 1)$ على $\mathbb{R}$.

ج-استنتج أنه من أجل كل x من $[0; \ln 4]$ ، $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$.

د-بين أنه من أجل كل x من $[0; \ln 4]$ ، $f(x) \leq x$.

6-إنشئ المنحنى (C).

الجزء الثاني:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1-بين أنه ومن اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \ln 4$.

2-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3-استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم حدد نهايتها.

الموضوع الثاني

التمرين 01:

(1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty; 6[$ كما يأتي : $f(x) = \frac{9}{6-x}$ و C_f منحنى f

ادرس تغيرات الدالة f ، ثم ارسم C_f

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = -3$ و $n \in \mathbb{N}$ ولدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$.
أ- باستخدام C_f والمستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل u_0 و u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل
ب- خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

3-أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 3$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)
ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .
ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين 02:

نعتبر نرد على شكل رباعي وجوه منتظم يحمل الأرقام التالية : 1 ، 1 ، 3 ، 5 .

I- نرمي هذا النرد مرتين ، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل رميتين مجموع الرقمين المسجلين على الوجه الأسفل خلال الرميتين.

(1) عين مجموعة قيم X .

(2) احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

II- نرمي هذا النرد عدة مرات متتالية ونعتبر كل رمية مستقلة عن الأخرى .

ليكن u_n احتمال الحادثة التالية : " ظهور رقم 3 لأول مرة على الوجه الأسفل في الرمية ذات الرتبة n " حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

(1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 . ثم عبارة u_n بدلالة n .

(2) احسب بدلالة n الاحتمال S_n للحادثة التالية : " لا يظهر الرقم 3 على الوجه الأسفل في الرمية ذات الرتبة $n+1$ " .

• احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ، ما يمكن القول عن هذه الحادثة عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين 03:

الجزء الأول: نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ حيث

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1} + \ln|x+1| \quad (C_f)$$

احسب: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيينها.

3- اكتب معادلتَي المماسين للمنحني عند النقطة التي فاصلتها -2 و عند النقطة I .

4- أ) (Γ) المنحني الممثل للدالة h المعرفة على $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = 1 + \ln(x+1)$

- احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب) بين أنه يمكن استنتاج رسم المنحني (Γ) انطلاقاً من دالة مرجعية بانسحاب يطلب تعيينه

6- بين أن المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذي المعادلة: $y = 3$ في نقطة فاصلتها x_0

من المجال $]-10; -9[$ ونقطة فاصلتها x_1 من المجال $]5; 6[$

7- أرسم المماسين والمنحني (Γ) ثم المنحني (C_f) في المجالين $]-10; -1[$ و $]-1; +\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ حيث:

$$\begin{cases} g(x) = e^{(x+2)\ln|x+1|} & x \neq -1 \\ g(-1) = 0 \end{cases}$$

1- أ) بين أنه لكل عدد حقيقي x يختلف عن -1 فإن: $g(x) = |x+1|e^{(x+1)\ln|x+1|}$

ب) بين أن الدالة g مستمرة عند القيمة -1

ج) ادرس قابلية اشتقاق الدالة g عند القيمة -1 ثم فسر النتائج هندسياً

د) اكتب معادلتَي نصفي المماسين (t_1) و (t_2) عند النقطة التي فاصلتها -1

1- أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $g'(x) = f(x)e^{(x+2)\ln|x+1|}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة g

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ثم فسر النتيجة بيانياً

د) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g

3- ارسم (t_1) و (t_2) ثم المنحني (C_g) في المجال $]-\infty; 1[$.

4- ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m^{\frac{1}{x+2}} = |x+1|$