

المدة: 03 ساعات و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:  
الموضوع الأول

التمرين 01:

نعتبر متتالية الأعداد الحقيقية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  ب:

$$u_0 = -1 \text{ و } u_1 = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

(1) احسب  $u_2$  و استنتج أن  $(u_n)$  ليست حسابية ولا هندسية.

(2) نعرف من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، المتتالية  $(v_n)$  ب:  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

(أ) احسب  $v_0$ . (ب) عبر عن  $v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$ .

(ج) استنتج أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ . (د) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(3) نعرف من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، المتتالية  $(w_n)$  ب:  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ .

(أ) احسب  $w_0$ . (ب) باستعمال المساواة  $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ، عبر عن  $w_{n+1}$  بدلالة  $u_n$  و  $v_n$ .

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $w_{n+1} = w_n + 2$ . ثم عبر عن  $w_n$  بدلالة  $n$ .

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ .

(5) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع  $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ،

. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ .

التمرين 02:

I- نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب:  $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

(2) أدرس تغيرات الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $I$ .

II- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  ب:  $f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

1) بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ، ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2) أ) بين أن :  $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$  حيث  $f'$  مشتق الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

ب) عين إشارة  $f'(x)$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

ج) استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $A$  يطلب تعيين إحداثياتها.

3) أ) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $(\ln x - 1)(2x - 1 - \ln x) = 0$ .

ب) عين معدلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة التي ترتيها  $-\frac{1}{2}$ .

4) بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $3.3 < \alpha < 3.4$ .

5) أ) احسب القيمة المضبوطة لـ  $f(e^2)$  ثم قيمة مقربة لها.

ب) ارسم  $(\Delta)$  و  $(C_f)$ .

6) نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على المجال  $]0; -\infty[$  بـ :  $h(x) = x \ln |x| - x + \frac{1}{2}(\ln |x|)^2$

و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) من أجل كل  $x$  من المجال  $]0; -\infty[$ ، احسب  $f(-x)$ . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنين  $(C_f)$  و  $(C_h)$ .

ب) ارسم  $(C_h)$ .

### التمرين 03:

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متمايزة عند اللمس . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق و نسجل لونها ، ثم نعيدها الى الصندوق و نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة .

1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

أ) "A" الحصول على كرتين بيضاوين .

ب) "B" الحصول على كرتين من نفس اللون .

2) نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) ولكل كرة سوداء العلامة  $(-\alpha)$

ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين مجموع النقط المحصل عليها.

أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي  $X$  و أحسب أمله الرياضي  $E(X)$ .

ب) عين قيمة العدد الحقيقي حتى تكون اللعبة مربحة .

3) نضيف  $(n-3)$  كرة سوداء إلى الصندوق و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه .

- ما هو عدد الكرات السوداء التي تم إضافتها إلى الصندوق علم أن احتمال الحادثة  $A$  يساوي  $\frac{1}{4}$

## الموضوع الثاني

### التمرين 01:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0, 2]$  بـ :  $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0, 2]$

استنتج أنه إذا كان  $x \in [1, 2]$  فإن  $f(x) \in [1, 2]$

2. نعرف المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$u_0 = 2$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$

أ- أنقل الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور

الفواصل الحدود  $u_0, u_1, u_2$  مبرزاً خطوط الرسم

ب- ما هو تخمينك حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية  $(u_n)$

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 1 < u_n \leq 2$

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً

ج- استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  مقاربة ثم احسب نهايتها

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$  و أوجد مرة أخرى  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n : S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : n < S_n \leq n + \frac{1}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### التمرين 02:

$f$  دالة معرفة على المجموعة  $I = ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{1}{x-1} + \ln(x+1)$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1- احسب  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ماذا تستنتج بالنسبة لـ  $(C_f)$ . ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- أ- بين أن  $f'(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)^2(x+1)}$ . ثم استنتج إشارة  $f'(x)$  على  $I$  ثم شكل جدول تغيرات  $f$ .

ب- عين معادلة المماس  $(\Delta)$  لـ  $(C_f)$  في نقطة ذات الفاصلة 2

3)  $g$  دالة معرفة على  $]1; +\infty[$  بـ :  $g(x) = \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ .

إعداد الأستاذ بالعبيدي محمد العربي

- أ) بين أنه من أجل كل  $x \in ]1; +\infty[$ ،  $\frac{x+1}{x} > 1$ ، ثم استنتج إشارة  $g(x)$  على المجال  $]1; +\infty[$ .
- ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . ماذا تستنتج؟
- ج) نسمي  $(C)$  التمثيل البياني للدالة  $x \mapsto \ln x$ . حدد وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(C)$  على  $]1; +\infty[$ .
- د) ارسم  $(C)$  و  $(\Delta)$  ثم المنحنى  $(C_f)$ .

4) حل بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما  $m$  المعادلة التالية:  $(x-1)\ln\left(\frac{x+1}{m}\right) = -1$

### التمرين 03:

- صندوق A يحتوي على 4 كريات حمراء و 6 كريات سوداء و صندوق B يحتوي على كرية واحدة حمراء و 9 كريات سوداء مع أن كل الكريات متساوية الاحتمال.
- I) يرمي لاعب زهرة نرد غير مزيفة و مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة في الهواء.
- إذا تحصل على الرقم 1 يسحب كرة واحدة من الصندوق A.
  - إذا لم يتحصل على الرقم 1 فيسحب كرة واحدة من الصندوق B.
- 1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه التجربة.
- 2) نسمي  $R$  الحادثة: "الحصول على كرية حمراء" بين أن  $P(R) = 0,15$
- 3) تحصل اللاعب على كرية حمراء، بين أن احتمال أن تكون من الصندوق B أكبر أو تساوي من احتمال أن تكون من الصندوق A
- II) اللاعب يكرر هذه اللعبة مرتان (اللعبة المنصوص عليها في الجزء في نفس الشروط المتماثلة و المستقلة عن بعضها بمعنى يعيد الصندوقين إلى تعدادها الأول بعد اللعبة الأولى)
- ليكن  $x$  عدد طبيعي غير معدوم، بعد اللعبتين يتحصل اللاعب على نقطة عن كل كرية حمراء و يخسر نقطة عن كل كرية سوداء.
- نرمز بـ  $G$  إلى قيمة الربح أو الخسارة بعد اللعبتين.
- 1) بين أن  $G$  يأخذ القيم  $2x$ ،  $x-2$ ،  $-4$ .
- 2) أوجد قانون الاحتمال و أحسب الأمل الرياضي  $E(G)$  للمتغير العشوائي  $G$  بدلالة  $x$ .
- 3) ماهي أصغر قيمة لـ  $x$  حتى تكون اللعبة مربحة.