الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

القسم:3 ر+3 ت ر **المدة:1ساعة**

نص التمرين:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ : $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (γ) تمثيلها البياني

في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

1 / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

2 / أثبت أن النقطة $A(0\,,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (γ)

3 / أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (γ)

4 / لتكن h الدالة المعرفة بـ : $h(x)=f(x)-x$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي α وحيد ينتمي الى المجال $]1\,,2[$ يحقق أن : $h(\alpha)=0$

ب) استنتج مما سبق عدد نقط تقاطع المنحنى (γ) ومنصف الربع الأول

5 / أرسم المنحنى (γ) و المماس (Δ)

6 / لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=f(|x|)$ ، بين أن الدالة g زوجية

* بين كيف يمكن رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من (γ) ، ثم أرسمه في نفس المعلم

بالتوفيق

الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

القسم:3 ر+3 ت ر **المدة:1ساعة**

نص التمرين:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ : $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (γ) تمثيلها البياني

في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$

1 / أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

2 / أثبت أن النقطة $A(0\,,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (γ)

3 / أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (γ)

4 / لتكن h الدالة المعرفة بـ : $h(x)=f(x)-x$

أ) بين أنه يوجد عدد حقيقي α وحيد ينتمي الى المجال $]1\,,2[$ يحقق أن: $h(\alpha)=0$

ب) استنتج مما سبق عدد نقط تقاطع المنحنى (γ) ومنصف الربع الأول

5 / أرسم المنحنى (γ) و المماس (Δ)

6 / لتكن الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=f(|x|)$ ، بين أن الدالة g زوجية

* بين كيف يمكن رسم المنحنى (C_g) انطلاقا من (γ) ، ثم أرسمه في نفس المعلم

بالتوفيق

تصحيح الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات:

$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x)=\frac{1\times\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\times x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}\times\sqrt{x^2+1}-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}\succ 0$$

أي نستنتج ان الدالة f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

حساب النهايات: $D_f=IR=\left]-\infty;+\infty\right[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=1+\frac{-\infty}{+\infty}=\frac{-\infty}{+\infty}$ وهي حالة عدم التعيين.

إزالة حالة عدم التعيين:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right)=1-\sqrt{1}=1-1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right)=1+1=2$$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$0 \nearrow 2$

2) اثبات ان النقطة $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (γ) :

A نطقة انعطاف للمنحني (γ) معناه ان الدالة المشتقة الثانية للدالة f تنعدم عند فاصلة هذه النطقة وتغير اشارتها

لنا $\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \times \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} = f'(x)$ ومنه

$$f''(x) = \left(\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}\right)' = \frac{-3\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^4} = \frac{-3\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-3x}{\left(x^2+1\right)^2\sqrt{x^2+1}}$$

من خلال عبارة الدالة المشتقة نلاحظ ان مقامها موجب تماما وبالتالي فان اشارتها من نفس إشارة البسط أي من نفس إشارة $-3x$: إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$-3x$	+ 0 -
$f''(x)$	+ 0 -

من خلال جدول إشارة $f''(x)$ يتضح لنا انها فعلا تنعدم عند 0 وتغير اشارتها أي ان النقطة $A(0;f(0))$ أي $A(0;1)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (γ) .

3) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة $A(0;1)$: وهي $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $y = x+1$.

4) دراسة وضعية (γ) بالنسبة لـ (Δ) ولدراسة ذلك ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-(x+1) = 1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x$$
$$= \frac{x-x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(x-x\sqrt{x^2+1}\right).$$

واشارة الفرق هي من إشارة العبارة $x-x\sqrt{x^2+1}$:

$$x-x\sqrt{x^2+1} = x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right) = x\left(\frac{\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= x\left(\frac{1-x^2-1}{1+\sqrt{x^2+1}}\right) = x\left(\frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}\right) = \left(\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}\right)(-x)$$

ونستنتج ان إشارة العبارة المعطاة هي من إشارة $-x$ ومنه فان إشارة الفرق $f(x)-y$ هي من إشارة $-x$ وعليه تكون الوضعية المبينة في الجدول التالي:

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
إشارة $-x$	+ 0 -
إشارة الفرق $f(x)-y$	+ 0 -
الوضعية	(γ) فوق (Δ) يقطعه (γ) تحت (Δ)

5) h الدالة المعرفة بـ: $h(x) = f(x)-x$

أ) تبيين انه يوجد عدد حقيقي α وحيد ينتمي الى المجال $[1;2]$ بحيث $h(\alpha)=0$

لنا الدالة f مستمرة على IR وبالتالي فهي مستمرة على $[1;2]$ وأيضا الدالة $x \to -x$ مستمرة على هذا المجال وعليه فان الدالة h مستمرة على هذا المجال لانها مجموع دالتين مستمرتين وبالتالي فحسب مبرهنة القيم

المتوسطة فانه اذا كان $h(1)\times h(2)\prec 0$ فانه يوجد على الافل عدد حقيقي α من المجال $[1;2]$ يحقق $h(\alpha)=0$

و $h(1)=f(1)-1=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\succ 0$

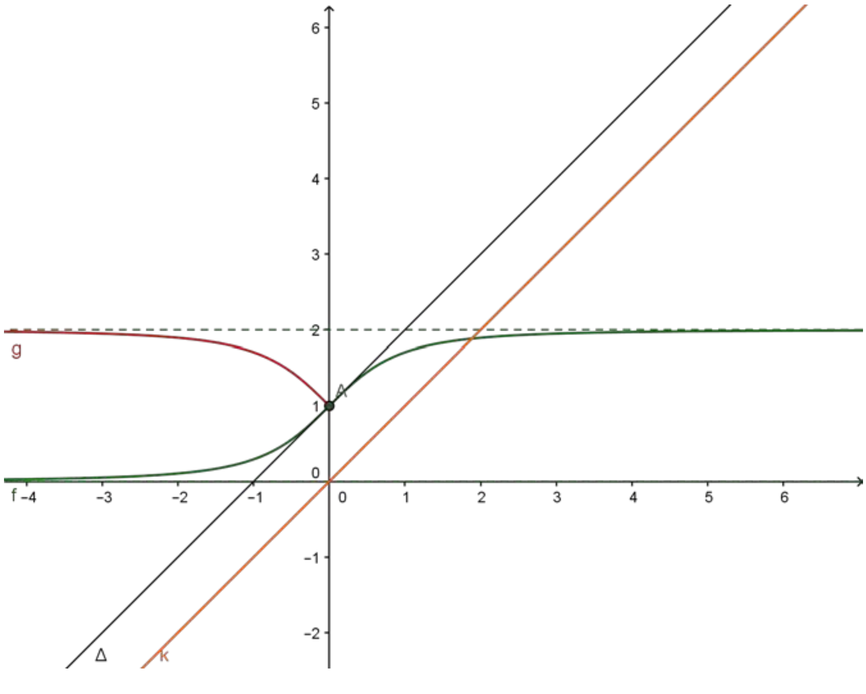
$$h(2)=f(2)-2=1+\frac{2}{\sqrt{5}}-2=\frac{2}{\sqrt{5}}-1=\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\left(2-\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)}=\frac{-1}{\sqrt{5}\left(2+\sqrt{5}\right)}\prec 0$$

ومنه نستنتج انه فعلا $h(1)\times h(2)\prec 0$ ومنه فانه يوجد على الاقل عدد حقيقي α من المجال $[1;2]$ يحقق $h(\alpha)=0$.

وحدانية α : من جدول التغيرات نلاحظ ان الدالة f رتيبة تماما على المجال $[1;2]$ والدالة $x\to -x$ أيضا رتيبة على هذا المجال و نحن نعلم ان مجموع دالتين رتيبتين على مجال هو دالة رتيبة على هذا المجال اذن العدد α وحيد.

ب) استنتاج عدد نقاط تقاطع المنحني (γ) مع المنصف الأول: ان عدد نقاط تقاطع (γ) مع المنصف الأول هو عدد حلول المعادلة $f(x)-x=0$ أي هو عدد حلول المعادلة $h(x)=0$ ولها حل وحيد α اذن هناك نقطة واحدة يتقاطع فيها المنحني (γ) مع المنصف الأول وهي $(\alpha;f(\alpha))$ حيث $\alpha\in[1;2]$.

6) رسم المنحني (γ) والمماس (Δ) :



7) $g(x)=f\left(|x|\right)$:

الدالة g معرفة على IR اذن مجموعة تعريفها متناظرة بالنسبة لـ 0

$g(-x)=f\left(|-x|\right)=f\left(|x|\right)=g(x)$ ومنه الدالة g زوجية.

$g(x)=\begin{cases} f(x): x\geq 0 \\ f(-x): x\prec 0\end{cases}$ ومنه نستنتج ان منحنى الدالة g هو نفسه منحنى الدالة f في المجال الموجب اما في المجال السالب فنحصل عليه بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لان g زوجية

الرسم cg مرفق مع الرسم السابق.