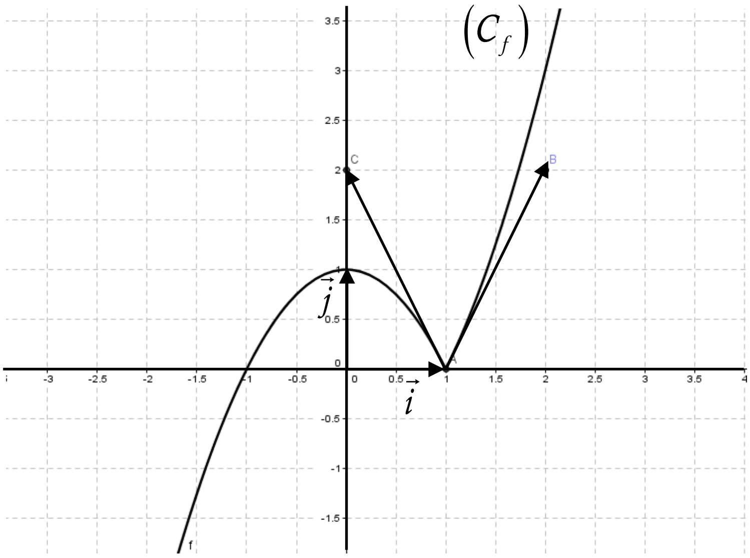
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية قسنطينة / ثانوية الحريـــة

الشعبة : علوم تجريبية

فرض في مادة : الرياضيات **المدة : ساعة**

التمرين الأول : (06 نقاط)



f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=|x-1|.(x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني كما هو مبيّن في الشكل.

1) باستعمال المنحنى (C_f) ضع تخميناً حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 1 .

2) أثبت صحة تخمينك .

3) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)-m^2=f(0)$.

التمرين الثاني : (14 نقطة)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^3+1}{3x^2+1}$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{3x(x-1)(ax^2+bx+c)}{3x^2+1}$

حيث a , b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها . ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{3}x\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{3}x\right]$ ، ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\dfrac{1}{3}x$.

3) أحسب $f(-1)$ ، ثم أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x}{3x^2-6x+4}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x-1)$ ثم استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه ، ثم أنشئ (C_h) .

التمرين الأول : (06 نقاط)

1) التخمين حول قابلية الاشتقاق الدالة f عند 1 : نلاحظ أن المنحنى يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 و منه **الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند** 1 .

2/ إثبات صحة التخمين :

– أولا ننزع القيمة المطلقة :

$$f(x)=|x-1|.(x+1)=\begin{cases}(x-1).(x+1) & ; \quad x\geq 1\\ (-x+1).(x+1) & ; \quad x\leq 1\end{cases}$$

و منه :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{(\cancel{x-1}).(x+1)-0}{(\cancel{x-1})}=\lim_{x \xrightarrow{>} 1}(x+1)=2$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{(-x+1).(x+1)-0}{x-1}=\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{-(\cancel{x-1}).(x+1)}{(\cancel{x-1})}$$

$$=\lim_{x \xrightarrow{<} 1}-(x+1)=-2$$

بما أن : $$\lim_{x \xrightarrow{<} 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x \xrightarrow{>} 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

و منه الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند 1 .

3) المناقشة البيانية ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)-m^2=f(0)$.

لدينا : $f(x)=m^2+1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)-m^2=f(0)$ (المناقشة أفقية)

نضع : $m^2+1=m'$ و منه : $f(x)=m' \quad (m'>0)$

$m'\in]0;1[$ للمعادلة حلين مختلفين . و منه : مستحيل أي لا توجد قيم m تحقق المعادلة .

$m'=1$ للمعادلة حلين أحدهما مضاعف . و منه : $m=0$ للمعادلة حلين أحدهما مضاعف .

$m'\in]1;+\infty[$ للمعادلة حل وحيد . و منه : $m\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ للمعادلة حل وحيد .

التمرين الثاني : (14 نقطة)

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{3x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{3}=-\infty$$

ب) التبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\dfrac{3x(x-1)(ax^2+bx+c)}{3x^2+1}$

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(3x^2+1)-(6x)(x^3+1)}{(3x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^4+3x^2-6x}{(3x^2+1)^2}=\frac{3x(x^3+x-2)}{(3x^2+1)^2}=\frac{3x(x-1)(x^2+x+2)}{(3x^2+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=2\end{cases}$$

–دراسة اتجاه تغير الدالة f :

ندرس إشارة المشتقة :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\quad 3x(x-1)(x^2+x+2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}3x=0\\x-1=0\\x^2+x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\\\varnothing\end{cases}$$

	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$3x$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x+2	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;+\infty[$ ، و متناقصة تماما على المجال $[0;1]$.

– جدول التغيرات :

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right]$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\frac{1}{3}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+1}{3x^2+1}-\frac{x}{3}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3\left(x^3+1\right)-x\left(3x^2+1\right)}{3\left(3x^2+1\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{3-x}{3\left(3x^2+1\right)}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-x}{9x^2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-1}{9x}\right]=0$$

إذن : المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=\frac{1}{3}x$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

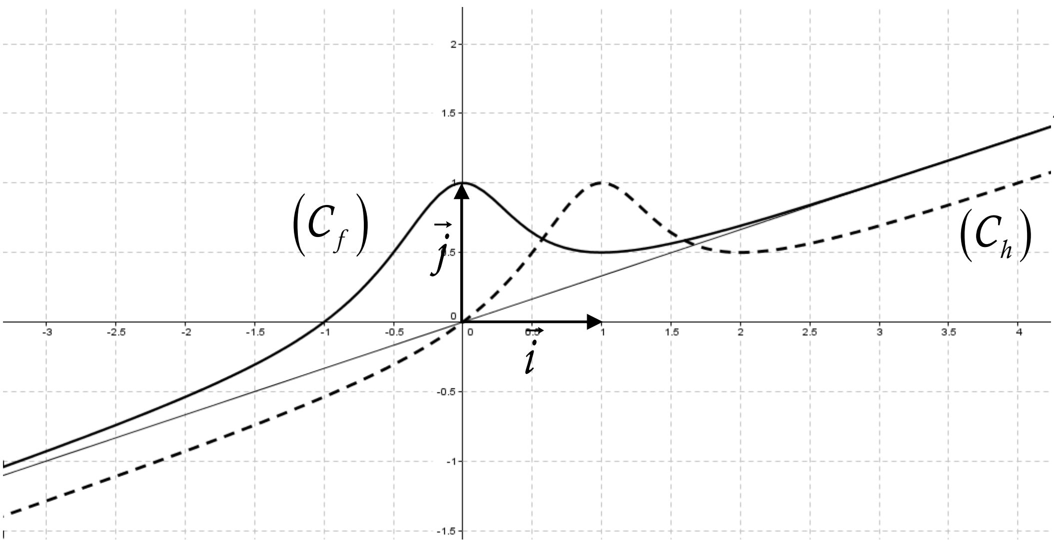
ب) دراسة الوضع النسبي بين المنحنى $\left(C_f\right)$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{3}x$:

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y=f(x)-\frac{1}{3}x=\frac{3-x}{3x^2+1}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع		$\left(C_f\right)$ فوق (Δ)	$\left(C_f\right)$ يقطع (Δ)	$\left(C_f\right)$ تحت (Δ)	

3) حساب : $f(-1)=0$

- الرسم :



4) التحقق أن : $h(x)=f(x-1)$

$$f(x-1)=\frac{(x-1)^3+1}{3(x-1)^2+1}=\frac{(x-1)(x-1)^2+1}{3(x^2-2x+1)^2+1}=\frac{(x-1)(x^2-2x+1)+1}{3(x^2-2x+1)+1}$$

$$f(x-1)=\frac{(x-1)(x^2-2x+1)+1}{3(x^2-2x+1)+1}=\frac{x^3-2x^2+x-x^2+2x-1+1}{3x^2-6x+3+1}$$

$$f(x-1)=\frac{x^3-3x^2+3x}{3x^2-6x+3+1}$$

$$f(x-1)=h(x)$$

- الاستنتاج :

المنحنى (C_h) هو صورة المنحنى (C_f) بانسحاب شعاع $\vec{v}$ حيث : $\vec{v}(1;0)$

– الرسم (الشكل السابق حيث (C_h) هو المنحنى الممثل بنقاط متقطعة)