

فرض في مادة الرياضيات - التصحيح اضغط هنا

التمرين الأول : (12 نقطة) - التصحيح

الجزء الأول : لتكن الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = e^x + 2x - e^{-x}$

- (1) أدرس تغيرات الدالة g .
- (2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجموعة \mathbb{R} .

الجزء الثاني :

الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x - \frac{2x}{e^x + 1}$

وليكن C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس O, \vec{i}, \vec{j} .

- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{2x}{e^{-x} + 1} = 2x - \frac{2x}{e^x + 1}$
- (2) بين أن الدالة f زوجية . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى C_f .
- (3) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
- (4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{e^x + 1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول

تغيراتها

(5) أ) بين أن المستقيم Δ ذي المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى C_f عند $-\infty$ و المستقيم Δ' ذي

المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى C_f عند $+\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي لـ C_f بالنسبة الى Δ ثم بالنسبة الى Δ' .

ج) أرسم المستقيمين Δ ، Δ' و C_f .

التمرين الثاني : (08 نقاط) - التصحيح

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بـ : $g(x) = (ax+b)e^x + c$

حيث a, b, c أعداد حقيقية .

(1) (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .

(2) المماس (T) لـ (C_g) عند النقطة $A(0; -1)$ و المماس (T') للمماس

لـ (C_g) عند النقطة $B(-1; e^{-1} - 1)$

1- بقراءة بيانية عين : $g(0), g'(0), g'(-1)$.

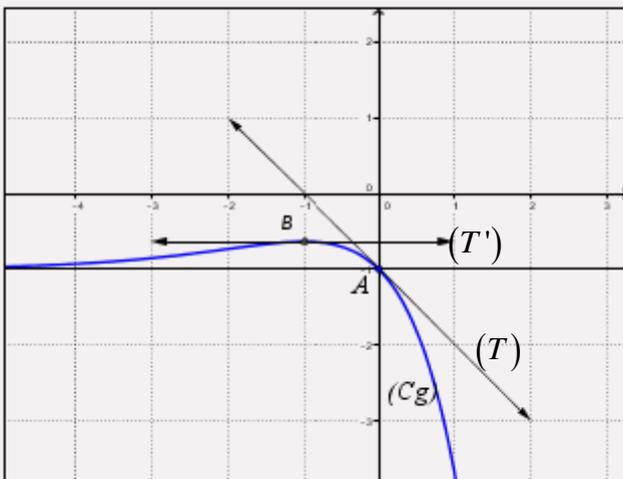
2- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .

3- شكل جدول تغيرات الدالة g .

4- شكل جدول إشارة الدالة g .

5- باستعمال النتائج السابقة عين الأعداد الحقيقية

a, b, c .



التنقيط	التصحیح - الرجوع الى نص الفرض - اضبط هنا									
12 نقطة	التمرين الأول : نص التمرين									
	الجزء الأول : لدينا : $g(x) = e^x + 2x - e^{-x}$ $D_g =]-\infty; +\infty[$									
0.5+0.5	(1) دراسة تغيرات الدالة g : (ب) حساب النهايات : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - e^{-x}) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - e^{-x}) = -\infty$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x - e^{-x}) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x - e^{-x}) = +\infty$									
0.75	(ج) حساب المشتقة : لدينا : $g'(x) = e^x + 2 - (-e^{-x}) = e^x + 2 + e^{-x}$ أي $g'(x) = e^x + 2 + e^{-x}$									
0.75	دراسة إشارة المشتقة : لدينا : $g'(x) = 0$ يعني $e^x + 2 + e^{-x} = 0$ أي $e^x + e^{-x} = -2$ (مستحيلة) لأن $e^x > 0$ و $e^{-x} > 0$ جدول إشارة المشتقة :									
	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$g'(x)$		+			
x	$-\infty$	$+\infty$								
$g'(x)$		+								
0.75	(ج) جدول تغيرات الدالة g :									
	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$g'(x)$		+	$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$
x	$-\infty$	$+\infty$								
$g'(x)$		+								
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$								
0.25+0.5	(2) حساب $g(0)$ واستنتاج إشارة $g(x)$: لدينا : $g(0) = e^0 + 2(0) - e^0 = 1 - 1 = 0$ استنتاج إشارة $g(x)$:									
	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td></td> <td>-</td> <td>0 +</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g(x)$		-	0 +	
x	$-\infty$	0	$+\infty$							
$g(x)$		-	0 +							
	الجزء الثاني :									
	لدينا : $f(x) = x - \frac{2x}{e^x + 1}$ $D_f =]-\infty; +\infty[$									
	(1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{2x}{e^{-x} + 1} = 2x - \frac{2x}{e^x + 1}$									

01	<p>• لدينا : $\frac{2x}{e^{-x}+1} = \frac{2x}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)} = \frac{2xe^x}{1+e^x} = \frac{2x+2xe^x-2x}{e^x+1}$</p> <p>ومنه $\frac{2x}{e^{-x}+1} = \frac{2x(1+e^x)-2x}{e^x+1} = 2x - \frac{2x}{e^x+1}$ إذن $\frac{2x}{e^{-x}+1} = 2x - \frac{2x}{e^x+1}$</p>								
01	<p>(2) تبيان أن الدالة f زوجية :</p> <p>• D_f متناظرة بالنسبة إلى 0 أي من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $(-x) \in \mathbb{R}$</p> <p>• ولدنا : $f(-x) = -x - \frac{-2x}{e^{-x}+1} = -x + \frac{2x}{e^{-x}+1} = -x + 2x - \frac{2x}{e^x+1} = x - \frac{2x}{e^x+1}$</p> <p>وبالتالي $f(-x) = x - \frac{2x}{e^x+1} = f(x)$</p> <p>ومنه f دالة زوجية</p> <p>• نستنتج أن حامل محور الترتيب محور تناظر للمنحني (C_f)</p>								
0.5+0.5	<p>(3) حساب نهائي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$:</p> <p>• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{2x}{e^x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \frac{2}{e^x+1} \right) = +\infty$</p> <p>• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2x}{e^x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x}{e^x} \left(\frac{2}{1+e^{-x}} \right) \right) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1+e^{-x}} \right) = 2$</p>								
01	<p>(4) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(e^x+1)^2}$:</p> <p>لدينا : $f'(x) = 1 - \frac{2(e^x+1)-2xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x - 2 + 2xe^x}{(e^x+1)^2}$</p> <p>أي $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^x - 2 + 2xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} - 1 + 2xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x \left(e^x - \frac{1}{e^x} + 2x \right)}{(e^x+1)^2}$</p> <p>ومنه $f'(x) = \frac{e^x \left(e^x - \frac{1}{e^x} + 2x \right)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x (e^x + 2x - e^{-x})}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x \times g(x)}{(e^x+1)^2}$ إذن</p> <p>$f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(e^x+1)^2}$</p>								
0.5	<p>• استنتاج اتجاه تغير الدالة f :</p> <p>- جدول إشارة المشتقة : إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$</p> <table border="1" data-bbox="352 1787 1086 1888"> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </tbody> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	-	0	+
x	$-\infty$	0	$+\infty$						
$f'(x)$	-	0	+						

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

0.5

(5 أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$:

- لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{2x}{e^x + 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x(e^x + 1) - 2x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^x + 2x - 2x}{e^x + 1}$$

0.5

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^x}{e^x + 1} = 0$$

ومن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

• تبيان أن المستقيم (Δ') ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

- لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2x}{e^x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{-2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{-2}{1 + e^{-x}} = 0$$

0.5

ومن (Δ') ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1 + e^{-x}} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-x}) = 1 \end{cases} \text{ لأن } -2$$

عند $+\infty$

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x) = f(x) + x = \frac{2xe^x}{e^x + 1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) + x$		$-$	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

0.5

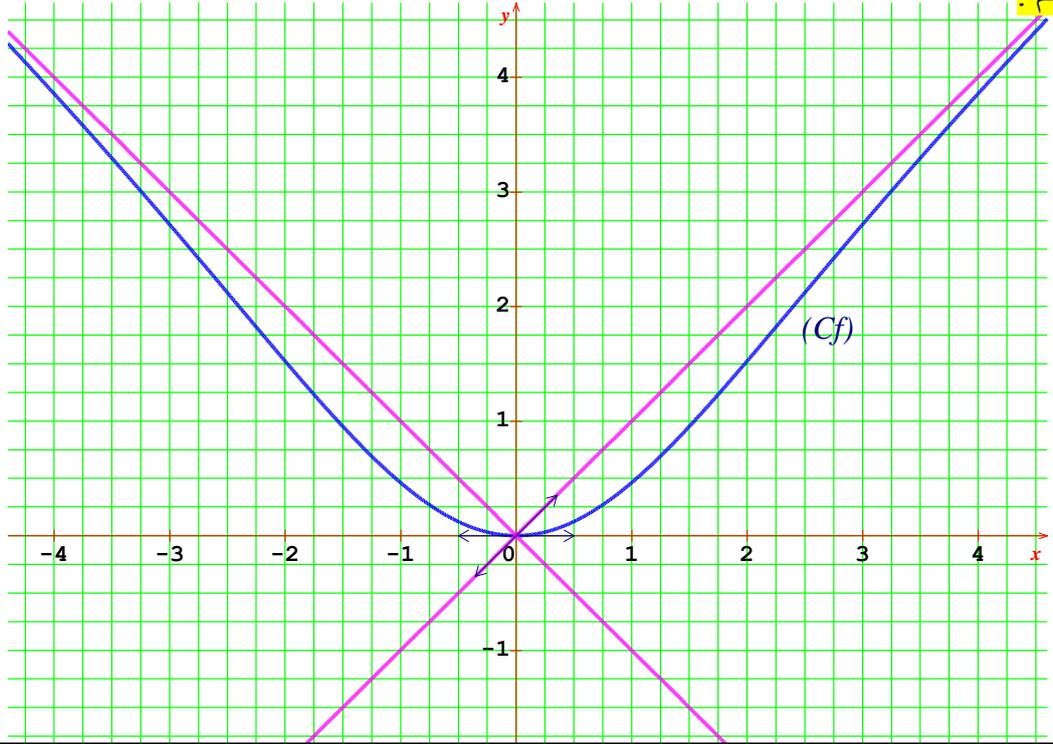
• دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ') :

- ندرس إشارة الفرق $f(x) - x = -\frac{2x}{e^x + 1}$

0.5

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$		+	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) يقطع (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

01



08 نقاط

التمرين الثاني : الرجوع الى النص

لدينا : $g(x) = (ax+b)e^x + c$

02.5

(1) تعيين $g(-1), g'(0), g(0)$:

$g(0) = -1$ -

$g'(0) = \frac{-1-0}{0-(-1)} = -1$ -

$g'(-1) = 0$ -

01

(2) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$(T): y = -x - 1$

$y = g'(0)(x-0) + g(0) = -x - 1$

01.5

(3) جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	-1	$e^{-1} - 1$	$-\infty$

0.5	<p style="text-align: right;">(4) جدول إشارة الدالة g:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">x</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$g(x)$</td> <td colspan="2" style="text-align: center;">-</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$g(x)$	-	
x	$-\infty$	$+\infty$					
$g(x)$	-						
02.5	<p style="text-align: right;">(5) تعيين الأعداد الحقيقية b, a و c:</p> <ul style="list-style-type: none"> • لدينا : $g(0) = -1$ يعني $(a \times 0 + b)e^0 + c = 0$ ومنه $b + c = -1$... (1) • ولدينا : $g'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$ يعني $g'(-1) = 0$ أي $(a \times (-1) + a + b)e^{-1} = 0$ ومنه $(-a + a + b)e^{-1} = 0$ وبالتالي $b = 0$ • من أجل $b = 0$ بالتعويض في (1) نجد : $c = -1$ • ولدينا كذلك : $g'(0) = -1$ أي $(a \times 0 + a + b)e^0 = -1$ ومنه $(a + 0) \times 1 = -1$ وبالتالي $a = -1$ <p style="text-align: right;">إذن $g(x) = -xe^x - 1$</p>						

✌ مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا جوان 2015 ☺ أستاذ المادة

