ثانوية عجّاج عبد القادر

عين تموشنت

المستوى: 3 تقني رياضي. السّنة الدّراسية: 2018 – 2019

الأستاذ: أمين حجّار. الاسم واللقب: ....

الفرض الأول في مادّة الرياضيات للثلاثي الأول

ملاحظة: التنظيم والدقة في الإجابة تؤخذ بعين الاعتبار.

التمرين 01:

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1.48; -1.47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$.

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3. بين أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

5. أثبت أن من أجل كل $x \in [\alpha; 0]$ ، $-3 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

تعود على منهجية الحل والدقة في التعبير.

ثانوية عجّاج عبد القادر

عين تموشنت

المستوى: 3 تقني رياضي. السّنة الدّراسية: 2018 – 2019

الأستاذ: أمين حجّار. الاسم واللقب: ....

حل الفرض الأول في مادّة الرّياضيّات للثلاثي الأوّل

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g.

لدينا الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = 3x^2 + 6$.

$g'(x)$ موجبة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-1.48; -1.47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$، ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث $\alpha \in]-1.48; -1.47[$. ومنه نستنتج جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$.

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \text{ ، } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-6}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$. ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2) - (x^3-6)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^4 + 6x^2 - 2x^4 + 12x}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 + 12x}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $(x^2+2)^2$ موجب تماما ومنه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $xg(x)$. إذن:

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha]$، متناقصة تماما على $[\alpha; 0]$ ومتزايدة تماما على $[0; +\infty[$.

ومنه جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ -3 ↗	$+\infty$

2. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-6}{x^2+2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-6}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) هو مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $-\infty$ وبجوار $+\infty$ أيضا.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)-x=\frac{-2x-6}{x^2+2}$ ومنه:

x	$-\infty$ $\quad -3 \quad$ $+\infty$
$-2x-6$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$
x^2+2	$+$ $\quad\quad$ $+$
$f(x)-x$	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$

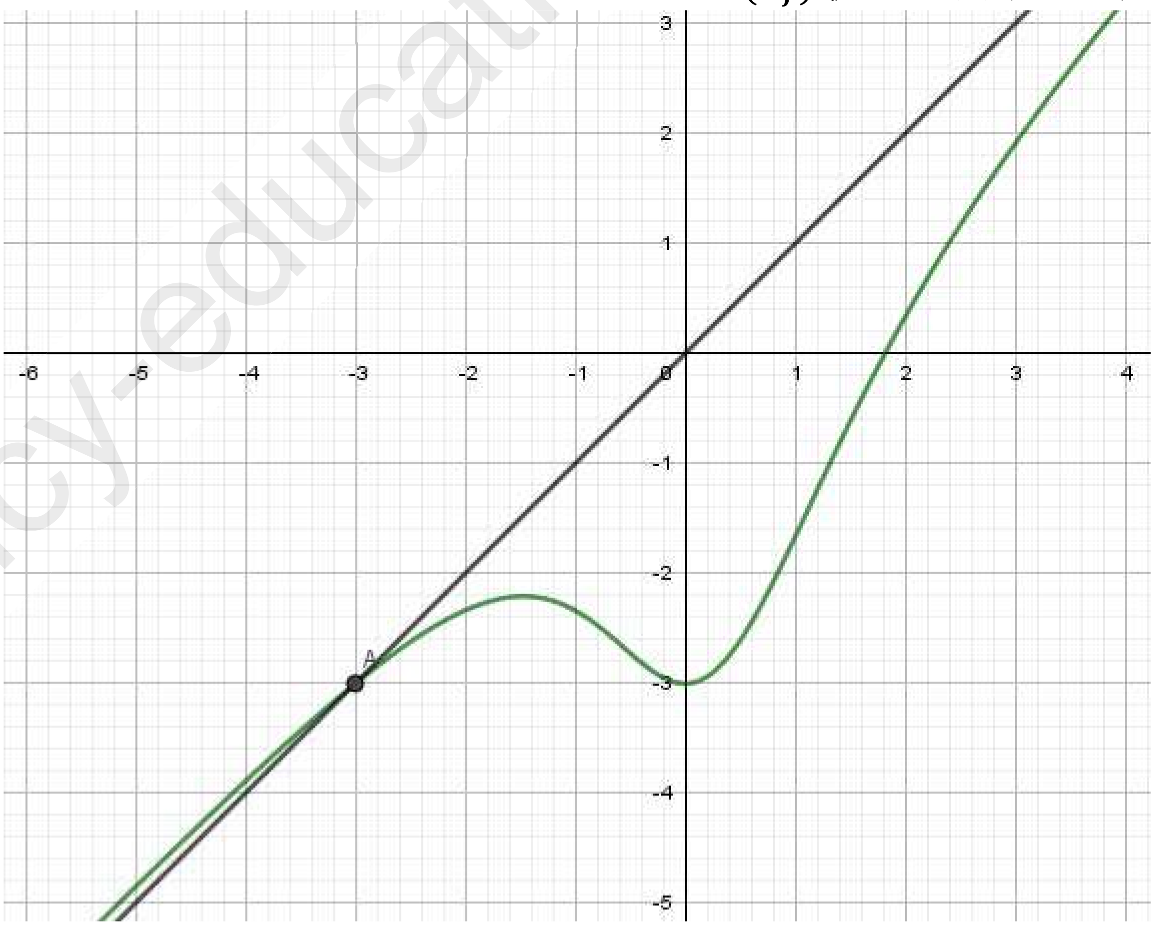
إذن يكون $(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ) على $]-\infty;-3[$ ويكون تحته على $]-3;+\infty[$، ويقطعه في النقطة $A(-3;-3)$

3. بين أن $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3+6\alpha+12=0$ ومنه $\alpha^3=-6\alpha-12$ ومنه $\alpha^2=\frac{-6\alpha-12}{\alpha}$ ومنه

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}=\frac{-6\alpha-12-6}{\frac{-6\alpha-12}{\alpha}+2}=\frac{-6\alpha-18}{\frac{-6\alpha-12+2\alpha}{\alpha}}=\frac{\alpha(-6\alpha-18)}{-4\alpha-12}$$
$$=\frac{-6\alpha(\alpha+3)}{-4(\alpha+3)}=\frac{3}{2}\alpha$$

4. ارسم المستقيم (Δ) والمنحني $(\mathcal{C}_f)$.



5. أثبت أن من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ ، $-3\le f(x)\le f(\alpha)$. (مباشرة من جدول التغيرات)