

الفرض الاول فى الثلاثى الاول فى مادة الرياضيات

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ ادرس تغيرات الدالة g

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

3/ استنتج اشارة $g(x)$

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$

1/ احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2/ برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من $R - \{-1, 1\}$ لدينا : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

3/ ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4/ برهن ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

5/ ادرس الوضع النسبي بين C_f و (Δ) .

6/ بين ان : $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$ ثم استنتج حصرا لـ : $f(\alpha)$

7/ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

8/ ارسم C_f و (Δ)

k دالة معرفة على $R - \{\alpha'\}$ بـ : $k(x) = \frac{1}{f(x)}$

9/ ادرس تغيرات الدالة k ثم ارسم منحناها

h دالة معرفة على $R - \{0, -2\}$ بـ : $h(x) = f((x+1)^2)$

10/ ادرس تغيرات الدالة h وشكل جدول تغيراتها .

11/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(x) = |m - 1|$.

12/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ حيث : $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

13/ / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط θ حلول المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$.

التصحيح النموذجي للفرض الاول 3 عت 1 من اعداد الاستاذ زرقى وليد

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

• النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

• الدالة المشتقة : g دالة قابلة للاشتقاق على R : $g'(x) = 3x^2 - 3$

• إشارة الدالة المشتقة :

$$3x^2 - 3 = 0$$

نجد : $x = 1$ أو $x = -1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$		-4	-8	$+\infty$

2/ اثبات ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

• من جدول التغيرات مستمرة ورتبية على المجال $[2; 2.25]$

• لدينا : $g(2) = -2$ و $g(2.25) = 0.64$ ومنه فان : $g(2) \cdot g(2.25) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

3/ استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول التغيرات لدينا :

$g(x) \leq 0$ لدينا $x \in]-\infty; \alpha[$

$g(x) = 0$ لدينا : $x = \alpha$

$g(x) \geq 0$ لدينا : $x \in]\alpha; +\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$

1/ حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$x = 1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

2/ الدالة المشتقة

f دالة قابلة للاشتقاق على $R - \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 3x^2 + 2x^3 - 2x^2 - (2x^4 - 2x^3 - 2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x(x^3 - 3x - 4)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

3/ دراسة تغيرات الدالة f

• إشارة الدالة المشتقة :

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

لدينا :

$$(x^2 - 1)^2 > 0$$

ومنه إشارة f' من إشارة $xg(x)$

• جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	

$$x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]\alpha; +\infty[$$

f متزايدة

$$x \in [0; 1[\cup]1; \alpha]$$

f متناقصة

4/ اثبات ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - (x + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5/ دراسة الوضع النسبي بين C_f و (Δ)

دراسة اشارة المقدار $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1} - (x + 1) = \frac{x^3 + x^2 + 1 - (x + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x - 2}{x^2 - 1}$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x - 2$	-	○	+	+	+
$x^2 - 1$	+		+	-	+
$f(x) - y$	-	○	+	-	+
الوضع النسبي	تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ)	C_f فوق (Δ)	C_f تحت (Δ)	C_f فوق (Δ)

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = 1$$

$$x = 1 \quad \text{او} \quad x = -1$$

6/ اثبات ان $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1}$$

$$= \frac{3\alpha + 4 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 5}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2 - 1 + 1 + 3\alpha + 5}{\alpha^2 - 1}$$

$$= \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 - 1} + \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} = 1 + \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1}$$

$$g(\alpha) = 0$$

$$\alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$\alpha^3 = 3\alpha + 4$$

استنتاج حصر لـ : $f(\alpha)$

$$2 \leq \alpha \leq 2.25$$

لدينا :

$$12 \leq 3\alpha + 6 \leq 12.75$$

(1)

باضرب في 3 و اضافة 6 الى جميع الاطراف نجد :

$$2 \leq \alpha \leq 2.25 \text{ : لدينا}$$

بتربيع اطراف المتراجحة ثم اضافة 1- الى جميع الاطراف نجد : $3 \leq \alpha^2 - 1 \leq 4.06$

$$\frac{1}{4.06} \leq \frac{1}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{1}{3}$$

(2)

بقلب اطراف المتراجحة نجد

بضرب اطراف المتراجحة (1) في اطراف المتراجحة (2) نجد :

$$\frac{12}{4.06} \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{12.75}{3}$$

نضيف 1 الى جميع الاطراف نجد :

$$3.95 \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} + 6 \leq 5.25$$

$$3.95 \leq f(\alpha) \leq 5.25$$

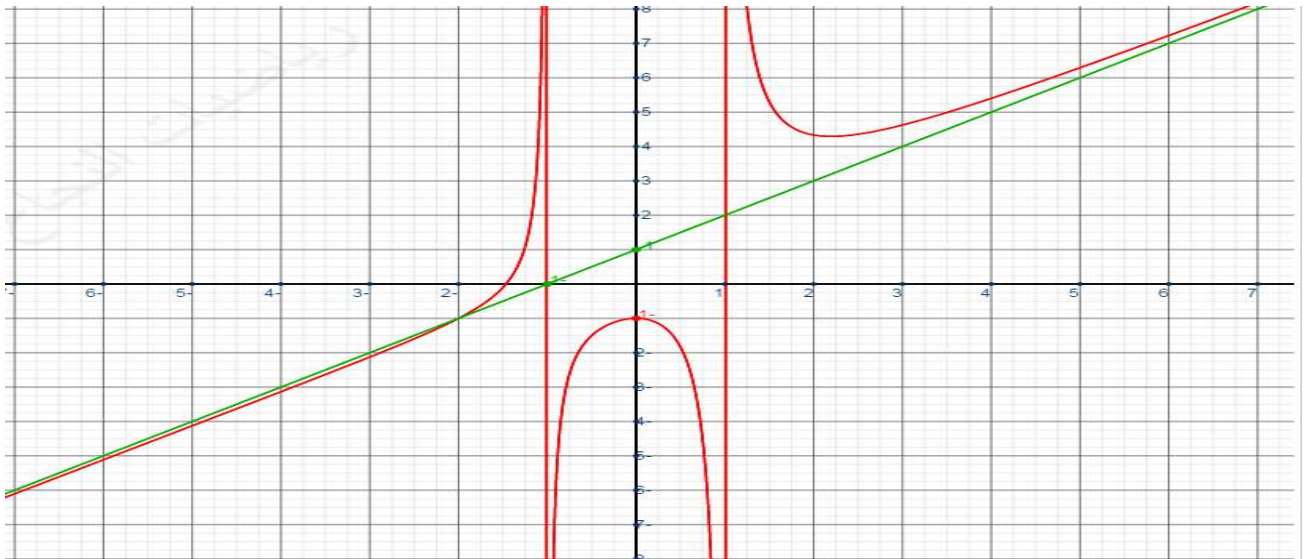
ومنه :

7/ اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

- من جدول التغيرات f مستمرة ورتيبة على المجال $[-1.5; -1.25]$
- لدينا : $f(-1.25) = \dots$ و $f(-1.5) = \dots$ ومنه فان : $f(-1.25) \cdot f(-1.5) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

8/ رسم C_f و (Δ)



$k(x) = \frac{1}{f(x)}$ دالة معرفة على $R - \{\alpha'\}$:-

9/ دراسة تغيرات الدالة k

• النهايات :-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha'^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha'^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha'^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha'^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

• الدالة المشتقة : k دالة قابلة للاشتقاق على $R - \{\alpha'\}$:

$$k'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

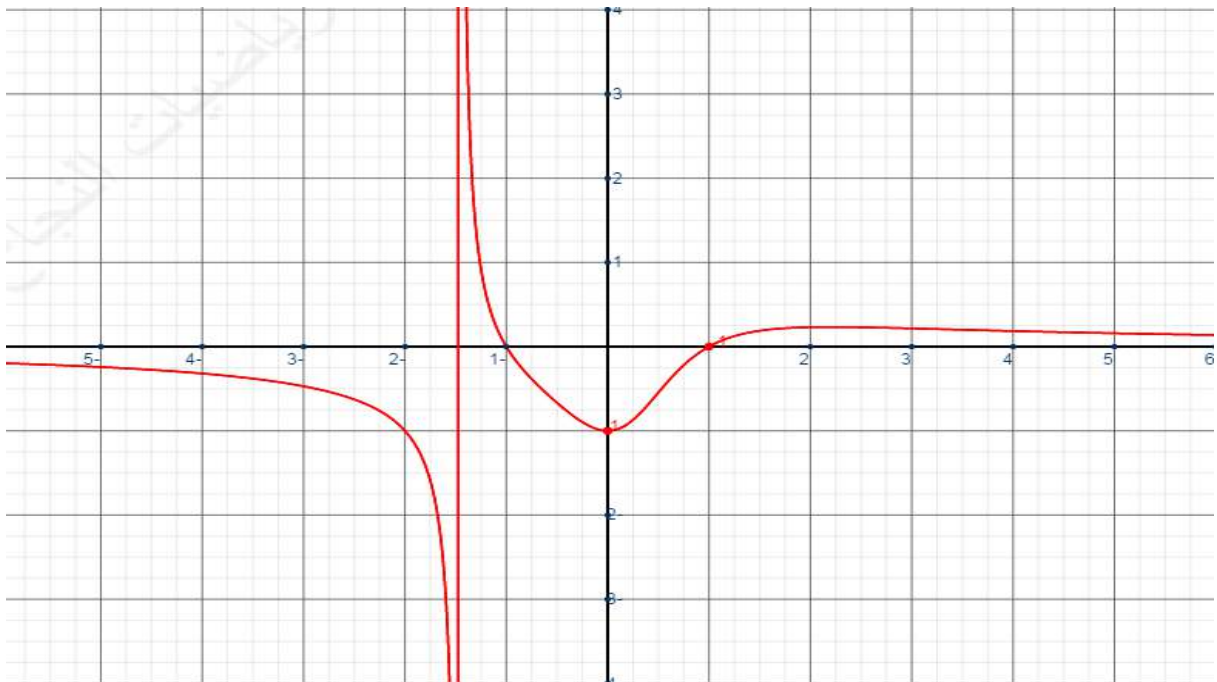
• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	α'	0	α	$+\infty$
$k'(x)$	$-$		$- \circ +$	$\circ -$	
$k(x)$	0	$+\infty$	-1	$k(\alpha)$	0

$$(f(x))^2 > 0$$

ومنه إشارة k' من إشارة $-f'(x)$

رسم C_k



$h(x) = f((x+1)^2) : \mathbb{R} - \{-2, 0\}$ دالة معرفة على h

10 / دراسة تغيرات h

النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^+} f(y) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f((x+1)^2) = \lim_{y \rightarrow 1^+} f(y) = +\infty$$

الدالة المشتقة : h دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

$$h'(x) = (2x+2) f'((x+1)^2)$$

اشارة الدالة المشتقة :

$$2x+2 = 0 \text{ يكافئ } x = -1$$

$$f'((x+1)^2) = 0 \text{ يكافئ : } (x+1)^2 = 0 \text{ او } (x+1)^2 = 0$$

$$\text{يكافئ : } x = 0 \text{ او } x = -\sqrt{\alpha} - 1 \text{ او } x = \sqrt{\alpha} - 1$$

$$0 \leq f'((x+1)^2) \leq \alpha \text{ يكافئ : } -\sqrt{\alpha} - 1 \leq x \leq \sqrt{\alpha} - 1$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha} - 1$	-2	-1	0	$-\sqrt{\alpha} - 1$	$+\infty$
$2x+2$	-	-		-	+	+	+
$f'((x+1)^2)$	+	○	-	-	○	+	+
$h'(x)$	-	○	+	+	○	-	+
$h(x)$	$-\infty$	$h(-\sqrt{\alpha} - 1)$	$+\infty$	$-\infty$	-1	$+\infty$	$h(-\sqrt{\alpha} - 1)$

11/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = |m - 1|$

نضع $m - 1 = k$ تصبح المعادلة : $f(x) = |k|$

$|k| \in [0; f(\alpha)]$ أي : $k \in [-f(\alpha); f(\alpha)]$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل حل وحيد

$|k| = f(\alpha)$ أي $k = -f(\alpha)$ او $k = f(\alpha)$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل حلان

$|k| \in]f(\alpha); +\infty[$ أي : $k \in [-\infty; -f(\alpha)] \cup]f(\alpha); +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل 3 حلول

المناقشة حسب قيم m لدينا : $m = k + 1$

$m \in [-f(\alpha) + 1; f(\alpha) + 1]$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل حل وحيد

$m = -f(\alpha) + 1$ او $m = f(\alpha) + 1$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل حلان

$m \in [-\infty; -f(\alpha) + 1] \cup]f(\alpha) + 1; +\infty[$ المعادلة $f(x) = |m - 1|$ تقبل 3 حلول

12/ مناقشة حلول المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$

المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تكافئ المعادلة : $\frac{1}{f(\cos(\theta))} = m$ تكافئ : $k(\cos(\theta)) = m$

نناقش بيانيا مع منحنى الدالة k وناخذ فقط الحلول المحصورة بين -1 و 1 لان $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$

$m \in [-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$ المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ لا تقبل حلول

$m = -1$ المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تقبل حل وحيد اذا كان المجهول $\cos(\theta)$ وتقبل حلان اذا كان المجهول θ

$m \in]-1; 0[$ المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تقبل حلان اذا كان المجهول $\cos(\theta)$ وتقبل 4 حلول اذا كان المجهول θ

$m = 0$ المعادلة $f(\cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ تقبل حلان

13/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$

نضع $\sin(\theta) = t$ تصبح المعادلة $f(x) = t$

من اجل $\theta = \frac{3\pi}{2}$ فان $t = -1$ المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$ تقبل حلان

$\theta \in [0; \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ فان $-1 \leq t \leq 1$ المعادلة $f(x) = \sin(\theta)$ لا تقبل حلول