فرض تدريبي للفصل الثاني

التمرين الأول : (المتتاليات العددية)

1) في الشكل أدناه (C) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+8}$.

و (Δ) المستقيم ذا المعادلة : $y=x$. (**أنظر الوثيقة المرفقة**)

أ- ادرس إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها في المجال $[0;4]$.

ب- بين أنه إذا كان : $x\in[0;4]$ فإن : $f(x)\in[0;4]$.

2) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_1 ، u_2 و u_3 ، ثم أعط تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0<u_n<4$.

ج- أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة .

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n=16-u_n^2$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج الحد العام u_n بدلالة n و أحسب : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب بدلالة n كلا من المجموعين : $S_n=v_0+v_1+\dots\dots+v_n$ و $S'_n=u_0^2+u_1^2+\dots\dots\dots+u_n^2$.

5) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $|u_n-4|<\frac{|v_n|}{4}$.

ب- إستنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

التمرين الثاني : (الإحتمالات)

يحتوي كيس غير شفاف على 5 كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 و كريتين بيضاوين تحملان الرقمين : 1 ، 3 و كريتين خضراوين تحملان الرقمين : 2 ، 3 . الكريات كلها متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

I) نسحب عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد من الكيس .

1) احسب إحتمال كل حدث من الأحداث التالية :

A : " الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم " ، B : " الكريات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى " .

C : " الأرقام المسحوبة مختلفة مثنى مثنى " .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب بأكبر الأرقام المسحوبة .

أ- ما هي قيم X الممكنة ؟ .

ب- اكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

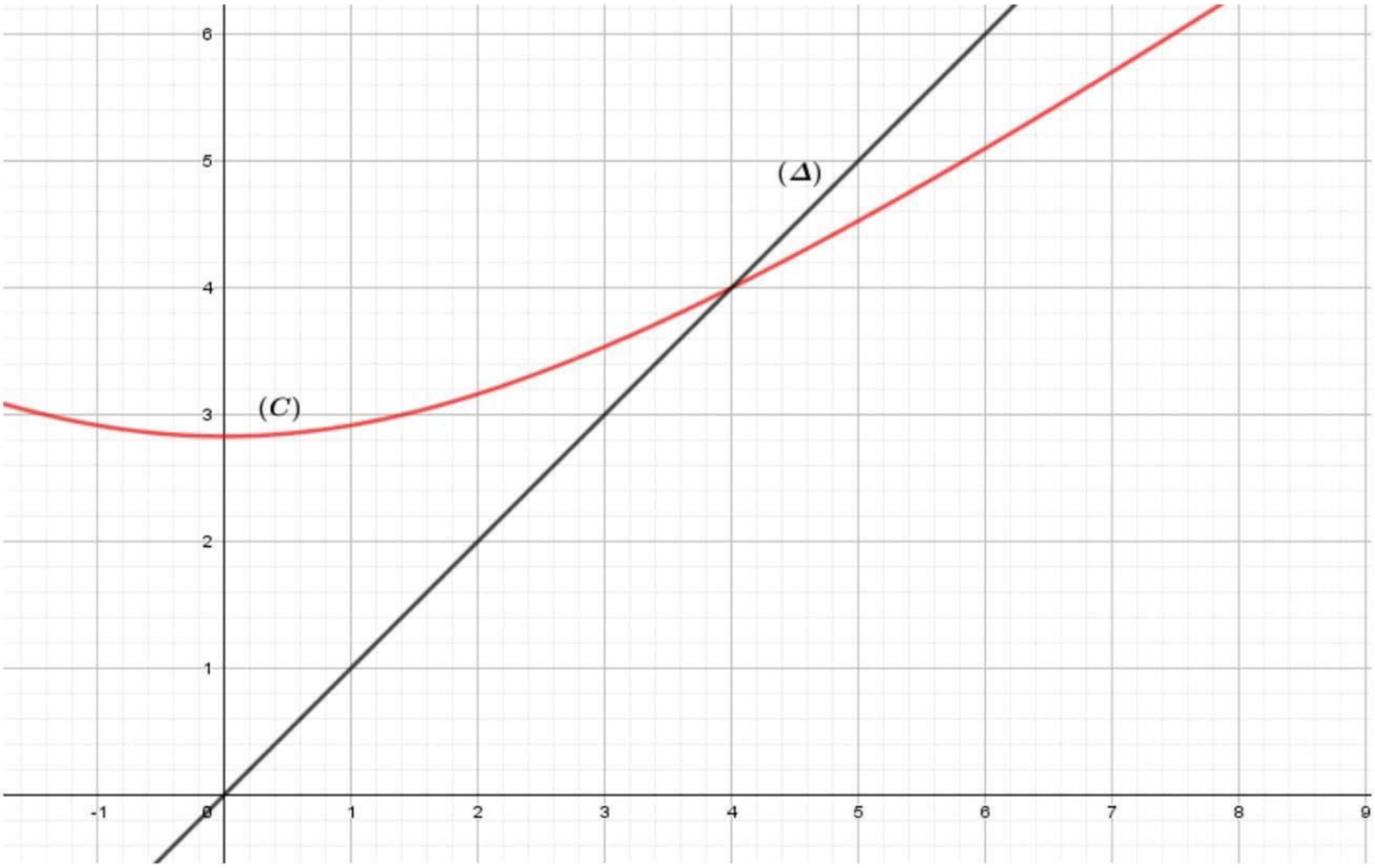
II) ننزع الآن الكريات الحمراء من الكيس ثم نقوم بسحبات على التوالي لكرية واحدة مع الإرجاع و ليكن عدد هذه السحبات n .

1) احسب إحتمال كل من الحدثين :

D : "كل الكريات المسحوبة بيضاء" ، E : "يوجد على الأقل كرية خضراء في كل السحبات" .

2) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون : $P(E)\geq 0,999$.

الوثيقة المرفقة بالتمرين الأول



حل مقترح للتمرين الأول : (المتتاليات العددية)

1) أـ الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x)=\dfrac{x}{2\sqrt{\dfrac{1}{2}x^2+8}}$.

على المجال $[0;4]$ لدينا : $f'(x)>0$ و منه : الدالة f متزايدة تماما على $[0;4]$.

x	0	4
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$ ↗	4

ب ـ لدينا : $x\in[0;4]$ أي : $0\le x\le 4$ و منه : $f(0)\le f(x)\le f(4)$ أي نجد :

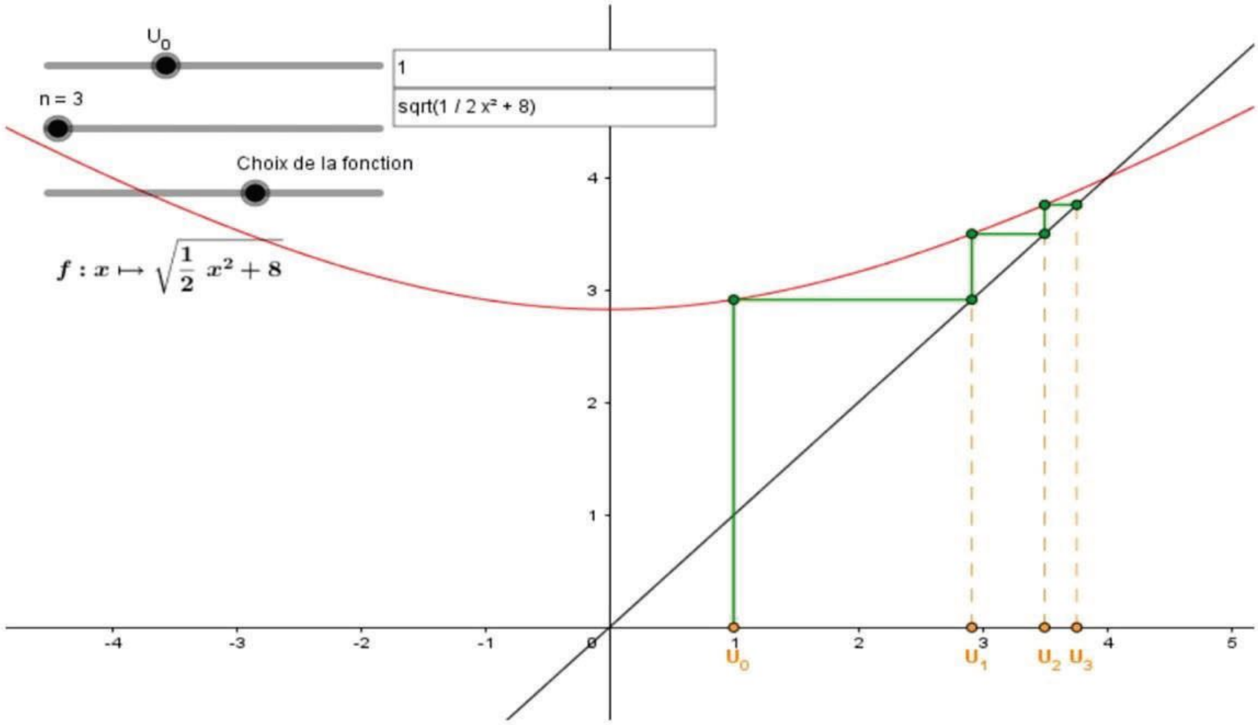
$0\le 2\sqrt{2}\le f(x)\le 4$ (الدالة f متزايدة تماما على $[0;4]$) .

إذن : من أجل $x\in[0;4]$ فإن : $f(x)\in[0;4]$.

2) لدينا : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+8} \end{cases}$.

أـ التمثيل :

أستاذ المادة : الأستاذ بلقاسم عبدالرزاق



ـ نلاحظ أن : $u_0<u_1<u_2<u_3$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة و نلاحظ أن حدودها تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C) و المستقيم (d) .

ب ـ لنستعمل البرهان بالتراجع لإثبات أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $0<u_n<4$ ....$P(n)$.

ـ لنتحقق من صحة $P(n)$ من أجل $n=0$: $u_0=1$ و $0<1<4$ إذن : $0<u_0<4$ (محققة) .

ـ نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $0<u_n<4$ و نثبت صحة $P(n)$ من أجل $n+1$ أي : $0<u_{n+1}<4$

لدينا فرضا أن : $0<u_n<4$ بما أن الدالة f متزايدة تماما على $[0;4]$ فإن : $f(0)<f(u_n)<f(4)$ و منه نجد :

$0<2\sqrt{2}<u_{n+1}<4$ أي : $0<u_{n+1}<4$ و أخيرا من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $\boxed{0<u_n<4}$.

جـ ـ نحسب : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+8}-u_n=\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+8}-u_n\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+8}+u_n\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+8}+u_n}=\dfrac{\dfrac{1}{2}u_n^2+8-u_n^2}{\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+8}+u_n}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}u_n^2+8}{\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+8}+u_n}$

أي : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-\frac{1}{2}\left(u_n^2-16\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+8}+u_n}=\dfrac{-\frac{1}{2}(u_n-4)(u_n+4)}{\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+8}+u_n}$.

لدينا : $u_n+4>0$ و $0<4+4$ أي : $u_n-4<0$ و نعلم أن : $-\frac{1}{2}(u_n-4)>0$ أي : $\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2+8}+u_n>0$

و منه : $u_{n+1}-u_n>0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

- المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

3) لدينا : $v_n=16-u_n^2$.

أ- لدينا : $v_{n+1}=16-u_{n+1}^2$ أي : $v_{n+1}=16-\frac{1}{2}u_n^2-8$ أي : $v_{n+1}=8-\frac{1}{2}u_n^2$ و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(16-u_n^2\right)$ أي : $v_{n+1}=\frac{1}{2}.v_n$

بالتالي فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{1}{2}}$ و حدها الأول $\boxed{v_0=15}$.

ب- نجد : $\boxed{v_n=15\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ و لدينا : $v_n=16-u_n^2$ و منه : $u_n=\sqrt{16-v_n}$ ، إذن : $\boxed{u_n=\sqrt{16-15\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$.

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{16-15\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=4$ لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$.

4) حساب المجاميع :

لدينا : $S_n=15\times\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$ و منه : $\boxed{S_n=30\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$.

لدينا : $v_n=16-u_n^2$ أي : $u_n^2=16-v_n$ و منه يصبح : $S'_n=(16-v_0)+(16-v_1)+.......+(16-v_n)$ أي نجد :

$S'_n=(16+16+.....+16)-(v_0+v_1+....+v_n)$ و منه : $S'_n=16(n+1)-S_n$ إذن : $\boxed{S'_n=16(n+1)-30\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}$.

5) أ- لدينا : $v_n=16-u_n^2$ أي : $v_n=(4-u_n)(4+u_n)$ و منه : $4-u_n=\dfrac{v_n}{4+u_n}$ إذن : $|4-u_n|=\dfrac{|v_n|}{|4+u_n|}$.

و نعلم أن : $0<u_n<4$ أي : $4<4+u_n<8$ و منه : $|4+u_n|=4+u_n$ و أيضا : $|4-u_n|=|u_n-4|$.

إذن : $\boxed{|u_n-4|=\dfrac{|v_n|}{u_n+4}}$.

لدينا : $u_n>0$ أي : $u_n+4>4$ و منه : $\dfrac{1}{u_n+4}<\dfrac{1}{4}$ أي : $\dfrac{|v_n|}{u_n+4}<\dfrac{|v_n|}{4}$ و بالتالي : $\boxed{|u_n-4|<\dfrac{|v_n|}{4}}$ هو المطلوب .

ب- لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=0$ بالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-4|=0$ أي : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4}$.

حل مقترح للتمرين الثاني : (الإحتمالات)

I) عدد الحالات الممكنة للسحب هو : $\boxed{C_9^3=84}$.

1) حساب إحتمال الأحداث :

$P(A)=\dfrac{C_3^3+C_3^3+C_3^3}{84}=\dfrac{3}{84}$ و منه : $\boxed{P(A)=\dfrac{1}{28}}$.

$P(B)=\dfrac{C_5^1\times C_2^1\times C_2^1}{84}=\dfrac{5\times 2\times 2}{84}=\dfrac{20}{84}$ و منه : $\boxed{P(B)=\dfrac{5}{21}}$.

$P(B)=\dfrac{C_3^1\times C_3^1\times C_3^1}{84}=\dfrac{3^3}{84}=\dfrac{27}{84}$ و منه : $\boxed{P(C)=\dfrac{9}{28}}$.

2) المتغير العشوائي X يرفق بكل سحب بأكبر الأرقام المسحوبة :

أ- قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ، 2 و 3 .

ب- قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

$P(X=1)=\dfrac{C_3^3}{84}=\dfrac{1}{84}$ ، $P(X=2)=\dfrac{\left(C_3^2\times C_3^1\right)+\left(C_3^1\times C_3^2\right)+C_3^3}{84}=\dfrac{9+9+1}{84}=\dfrac{19}{84}$.

$P(X=3)=\dfrac{2\left(C_3^2\times C_3^1+C_3^1\times C_3^2\right)+\left(C_3^1\right)^3+C_3^3}{84}=\dfrac{18+18+27+1}{84}=\dfrac{64}{84}$.

X_i	1	2	3
$P(X=i)$	$\dfrac{1}{84}$	$\dfrac{19}{84}$	$\dfrac{64}{84}$

- حساب الأمل الرياضياتي :

$E(X)=\dfrac{1+38+192}{84}=\dfrac{231}{84}$ و منه : $\boxed{E(X)=2,75}$.

II) الكيس أصبح يحوي كريتين بيضاوين و كريتين خضراوين :

1) حساب إحتمال الأحداث :

$P(D)=\dfrac{2^n}{4^n}=\left(\dfrac{2}{4}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، $P(E)=1-P(D)=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (E هو الحدث العكسي لـ D) .

2) لدينا : $P(E)\geq 0,999$ أي : $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geq 0,999$ أي : $-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geq -0,001$ و منه : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\leq 0,001$ أي نجد :

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\leq \ln(0,001)$ و منه : $n\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\leq \ln(0,001)$ أي : $n\geq \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,5)}$ و منه : $\boxed{n\geq 9,9657}$.

بالتالي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث يكون : $P(E)\geq 0,999$ هي : 10 .

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق