المستوى:الثالثة ثانوي رياضيات	فيفري2020
فرض الثلاثي الثاني في الرياضيات	المدة : 2 سا

التمرين الأول(7 نقط)

(u_n)متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1-\frac{1}{e}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ،

$u_{n+1} = 1-\sqrt{1-u_n}$

1- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0< u_n < 1$

2- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n = \frac{u_n^2-u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية و تقاربها.

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = ln(1-u_n)$

3- أن بين (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4- اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5-احسب $P_n = (1-u_0)\times(1-u_1)\times\ldots\times(1-u_n)$ ،

التمرين الثاني(8 نقطة)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x}\right)$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم بين أن : $f(x) = x+ln\,2 + ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) ليكن (C_f) الممثل للدالة f في المتجانس و المتعامد المعلم إلى المنسوب المستوي حيث : $||\vec{\imath}|| = 3$

بين أن المستقيم $(\Delta): y = x + ln2$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

4) بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين تنتمي إلى (C_f)

5) ادرس الوضع النسبي ل(C_f) و المستقيمين المقاربين.

6) أنشئ (C_f)

التمرين الثالث(5 نقطة)

1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $(E).....2081x-2018y=1$ و $(E').....2081x-2018y=03$

أ- بين أن العددان 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .

ب – باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') .

ج – حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') .

2/ نرمز ب d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y .

أ – ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب – عين حلول المعادلة (E') حتى يكون $d=3$.

3/ A و B عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل : $\overline{\alpha\beta0\alpha\alpha}$ ؛ $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}$.

أ – بين أنه إذا كان : $B-A=63$ فإن $(*).....19\alpha+6\beta=63$

ب – بين أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة $(*)$ ثم استنتج كتابة العددان A و B في النظام العشري .

بالتوفيق

التعليم ليس استعدادا للحياة انه الحياة ذاتها

التصحيح النموذجي

رقم التمرين	الحل	العلامة	
التمرين 1	1- البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0< u_n < 1$:$P(n)$.... ا) من اجل $n= 0$:$0< u_0 < 1$ و منه $P(0)$صحيحة		
	ب) نفرض صحة $P(n)$....:$0< u_n < 1$ و نبرهن صحة$P(n+1)$ لدينا $0< u_n < 1$ و منه $-1 < \sqrt{1- u_n} < 0$ إذن $0< u_{n+1} < 1$ ومنه $0< u_n < 1$	1	7 ن
	2- نبين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$ لدينا $u_{n+1} - u_n = 1- \sqrt{1- u_n} - u_n = \frac{(1- u_n)-(\sqrt{1-u_n})(1- u_n)+(\sqrt{1-u_n})}{(1- u_n)+(\sqrt{1-u_n})}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}} = \frac{u_n(u_n-1)}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$ لدينا $u_n > 0; (u_n - 1) < 0$; $1 - u_n + \sqrt{1-u_n} > 0$ و منه نستنتج أن المتتالية(u_n) متناقصة تماما	1	
	3-تبيان أن (n)هندسية $v_{n+1} = ln(1-u_{n+1}) = ln\,(1-(1-\sqrt{1-u_n}))$ $= ln\,(1-u_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} ln(1-u_n) = \frac{1}{2} v_n$ ومنه(v_n) هندسيةأساسها $\frac{1}{2}$ الأول حدها و $v_0 = -1$	1	
	4- كتابة v_n و u_n بدلالة n		

	2 **1**	$; v_n = -(\frac{1}{2})^n \qquad ; u_n = 1 - e^{-(\frac{1}{2})^n}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$	
	1	5-حساب $P_n = (1- u_0)\times (1- u_1)\times \ldots \times (1- u_n)$ $P_n = e^{(\frac{1}{2})^n - 2}$	
8ن	**0.5** **1** **1** **1.5**	1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\ln 2$ 2) الإثبات أن $f(x) = x + \ln 2 + \ln(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}})$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ اتجاه التغيّر: f دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{e^x(2e^{2x} - 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}$ $y_1 = \frac{-4+3\sqrt{2}}{2} \quad / \; e^x = y ; \Delta = 72$ $y_2 = \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}$ مرفوض $x_1 = \ln y_1 = \ln\left(\frac{-4+3\sqrt{2}}{2}\right) \approx -2,1$	**التمرين 2**

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

0.5

3 / $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x + \ln 2) \right)$

المستقيم $(\Delta): y = x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

0.5

4 / الإثبات أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f): ولتكن هذه النقطة هي النقطة $A(-2\ln 2; -\ln 2)$ نبين أن:

$f(-2\ln 2) = -\ln 2$

---

5 / دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته: $y = -\ln 2$

$$f(x) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right) + \ln 2$$

1

$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2} \times 2\right) = \ln\left(\frac{4e^{2x}+2}{e^x+2}\right)$$

$\frac{4e^{2x}+2}{e^x+2} \geq 1$; أي $\ln\left(\frac{4e^{2x}+2}{e^x+2}\right) \geq 0$

ومنه: $e^x(4e^x - 1) \geq 0$ أي : $e^x \geq \frac{1}{4}$ اي:

$x \geq -\ln 4$ ومنه من اجل كل x ; $x \geq -\ln 4$ فإن (C_f) فوق المستقيم المقارب وتحته في المجال الاخر.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته (Δ) :

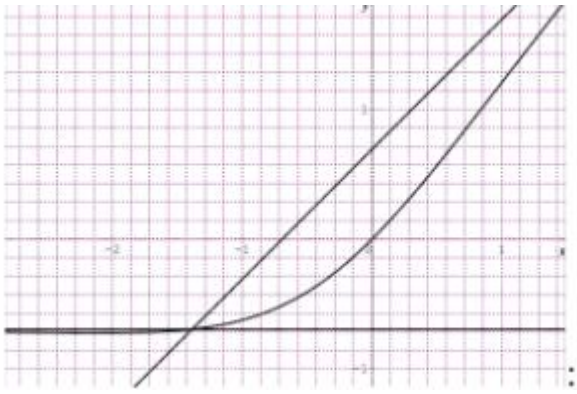
f متناقصة تماما على المجال $]-\infty, x_1]$

1

ومتزايدة تماما على $[x_1; +\infty[$

تابع للسؤال 2 / جدول التغيرات:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(x_1)$	↗ $+\infty$

	التمثيل البياني : 	1	
التمرين3	1/ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : (E).....$2081x-2018y=1$ و (E').....$2081x-2018y=03$ **أ- تبيان أن العددان 2018 و2081 أوليان فيما بينهما :** آخر باقي غير معدوم في سلسلة القسمات المتتالية يساوي 1 ومنه $\gcd(2081,2018)=1$ أي العددان2018 و2081 أوليان فيما بينهما . **ب – باستعمال خوارزمية إقليدس تعيين حل خاص للمعادلة (E) ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E') :** لدينا : $\begin{cases}63=2081-2018\\2=2018-63(32)\\1=63-2(31)\end{cases}$ ومنه $(31)(2018-63(32))-63=1$ تكافيء $(31)2018-(993)63=1$ ومنه $(31)2018-(993)(2081-2018)=1$ ومنه $2081(993)-2018(1024)=1$ ومنه الثنائية $(993;1024)$ حل خاص للمعادلة (E') . ومنه حل خاص للمعادلة (E') هو : $(993\times3;1024\times3)$ أي الثنائية $(2979;3072)$ حل خاص للمعادلة (E') .		

الحاصل		1	32	31	2
القاسم والمقسوم	2081	2018	63	2	1
الباقي		63	2	1	0

1

0.5

0.5

5ن

	0.5	**ج – حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E') :** $2081(x-2979)=2018(y-3072)....(*)$ ومنه $\begin{cases}2081x-2018y=3\\2081(2979)-2018(3072)=3\end{cases}$ $2081/2081(x-2979)$ ومنه $2081/2018(y-3072)$ وبما أن $pgcd(2081,2018)=1$ فإنه حسب مبرهنة غوص $2081/(y-3072)$ ومنه يوجد $k\in\mathbb{Z}$ حيث $y-3072=2081k$ وعليه نجد $y=2081k+3072$ وبالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد $x=2018k+2979$ ومنه $S=\{(2018k+2979;2081k+3072)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$ **2/ أ – القيم الممكنة للعدد d :** لدينا $\begin{cases}d/x\\d/y\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}d/2081x\\d/2018y\end{cases}$ ومنه $d/2081x-2018y$ ومنه $d/3$ ومنه $d\in\{1;3\}$	
	0.5	**ب – تعيين حلول المعادلة (E') حتى يكون $d=3$:**	

لدينا $d=3$ ومنه $\begin{cases} 3/x \\ 3/y \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x\equiv 0[3] \\ y\equiv 0[3] \end{cases}$ تكافيء $\begin{cases} 2018k+2979\equiv 0[3] \\ 2081k+3072\equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 2018k\equiv 0[3] \\ 2081k\equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k\equiv 0[3] \\ k\equiv 0[3] \end{cases}$

ومنه يوجد $k'\in\mathbb{Z}$ حيث : $k=3k'$ **0.5**

ومنه حلول المعادلة (E') بحيث $p\gcd(x;y)=3$ هي : $S=\left\{(6054k'+2979;6243k'+3072)\ /\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

3/ $A=\overline{\alpha\beta0\alpha\alpha}^{5}$ ؛ $B=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^{5}$.

أ – تبيان أنه إذا كان : $B-A=63$ **فإن** $19\alpha+6\beta=63.....(*)$

لدينا $\begin{cases} A=\overline{\alpha\beta0\alpha\alpha}^{5}=\alpha.5^0+\alpha.5^1+0.5^2+\beta.5^3+\alpha.5^4 \\ B=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^{5}=\beta.5^0+\beta.5^1+\alpha.5^2+\beta.5^3+\alpha.5^4 \end{cases}$ حيث $0\prec\alpha\leq 4$ و $0\leq\beta\leq 4$ **0.5**

ومنه $\begin{cases} A=631\alpha+125\beta \\ B=650\alpha+131\beta \end{cases}$ ومنه $B-A=19\alpha+6\beta$

ومنه إذا كان $B-A=63$ فإن $19\alpha+6\beta=63.....(*)$

ب – تبيان أنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ من $\mathbb{N}^2$ تحقق المعادلة $(*)$ ثم استنتاج كتابة العددان A و B في النظام العشري

لدينا $\alpha \in \{1;2;3;4\}$ و $\beta \in \{0;2;3;4\}$

4	3	2	1	
76	57	38	19	0
82	63	44	25	1
88	69	50	31	2
94	75	56	37	3
100	81	62	43	4

0.5

ومنه توجد ثنائية وحيدة $(\alpha;\beta)$ تحقق المعادلة $(*)$ حيث $(\alpha;\beta)=(3;1)$.

•استنتاج كتابة العددان A و B في النظام العشري :

لدينا $\begin{cases} A=631\alpha+125\beta \\ B=650\alpha+131\beta \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} A=631(3)+125(1) \\ B=650(3)+131(1) \end{cases}$ ومنه نجد $\begin{cases} A=2018 \\ B=2081 \end{cases}$

0.5