الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى:** ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" **المادة:** رياضيات	# فرض # الفصل الثاني	**الموسم الدراسي:** 2023/2022 **المدة:** ساعتان ونصف **إعداد:** عبد المطلب مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة Ecole Erradja wa Tafaouk ÉCOLE PRIVÉE

تمرين1 (04نقاط)

I و J العددان الحقيقيان المعرّفان كما يلي: $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$ و $J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}}{e^{2x}-1}dx$.

1) بيّن أنّ $I=\frac{1}{2}(3\ln 2-\ln 3)$.

2) احسب $I-J$، واستنتج حساب J.

3) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1، و K_n العدد الحقيقي المعرّف بـ: $K_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\,dx$.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب K_2.

ب) احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=K_2+K_3+...+K_n$. (حساب K_n غير مطلوب)

تمرين2 (07نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=\alpha+2$ و $u_{n+1}=\frac{(\alpha+2)u_n}{u_n+2-\alpha}$. (α عدد حقيقي يختلف عن 2 -)

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $v_n=\frac{u_n}{u_n-2\alpha}$.

I- في هذا الجزء من التمرين نفرض أنّ: $\alpha=1$.

1) تحقّق أنّ: $u_{n+1}=3-\frac{3}{u_n+1}$، ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2<u_n<4$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنّها متقاربة.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{6}{3-3^{-n}}$، واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم عيّن أصغر عدد طبيعي n يحقّق $v_n\geq e^{66}$.

5) احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$.

II- نفرض في هذا الجزء أنّ: $-2<\alpha<0$.

1) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2+\alpha}{2-\alpha}$، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n و α.

2) بيّن أنّ $0<\frac{2+\alpha}{2-\alpha}<1$، ثم استنتج اتّجاه تغيّر المتتالية (v_n) واحسب نهايتها.

3) لكل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع: $S'_n=\ln\left((2-\alpha)v_0\right)+\ln\left((2-\alpha)^2v_1\right)+...+\ln\left((2-\alpha)^n v_{n-1}\right)$.

احسب بدلالة n و α، المجموع S'_n.

تمرين3 (09نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=-e^{x}(e^{x}+2x)$.

1) احسب $g(0)$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) احسب $g'(x)$ ، ثم بيّن أنّ $g'(x)<0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$.

3) شكّل جدول تغيرات الدالة g، واستنتج أنّ $g(x)+1\leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\right)$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-x)=f(x)$. ماذا تستنتج؟ فسّر ذلك بيانيا.

2) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، و أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{x}{2}\right)=0$.

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-\dfrac{x}{2}$. ماذا يمثل (Δ)؟

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب، $f'(x)=\dfrac{1+g(x)}{2(1+e^{x})^{2}}$.

ب) بيّن أنّ f متناقصة تماما على $]0\,;+\infty[$. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلين α و β حيث $2{,}3<\alpha<2{,}4$. استنتج حصرا للعدد β.

ب) اكتب معادلة للمستقيم (Δ') المقارب المائل لـ$(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$ ، ثم ارسم (Δ)، (Δ') و $(\mathscr{C})$.

III- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)+\dfrac{u_n}{2}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (u_n) متناقصة. استنتج أنّها متقاربة.

3) أ) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي k من المجال $]0;1[$ ، حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq k\,u_n$.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

﴾بالتّوفيق﴿

تصحيح الفرض للفصل الثاني 2023م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

(1 $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\Big[\ln(e^{2x}-1)\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 3)=\frac{1}{2}(3\ln 2-\ln 3)=\ln\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(2 $I-J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}+1)(e^{x}-1)}dx$

$I-J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx=\Big[\ln(e^{x}+1)\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}$

$I-J=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$

ومنه: $J=I-\ln\frac{4}{3}$ ، $J=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

(3 أ) $K_2=\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

$\begin{cases}u(x)=\ln(e^{2x}-1)\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases}$ $\begin{cases}u'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$

$K_2=\Big[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\Big]_{\ln 2}^{\ln 3}+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^{x}}{e^{2x}-1}dx$

$K_2=\frac{-\ln 8}{3}+\frac{\ln 3}{2}+2J=\frac{1}{2}(3\ln 3-4\ln 2)=\ln\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

ب) $S_n=\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx+\int_{\ln 3}^{\ln 4}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx+\dots+\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

علاقة شال: $S_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

نضع: $I_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$ و $J_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{x}}{e^{2x}-1}dx$

$I_n-J_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx=\Big[\ln(e^{x}+1)\Big]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$

$J_n=\Big[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}-1)-\ln(e^{x}+1)\Big]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$

$J_n=\Big[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\Big]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$

لحساب S_n نستعمل المكاملة بالتجزئة:

$S_n=\Big[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\Big]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}+2J_n$

$S_n=\Big[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)+\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\Big]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$

$S_n=-\frac{\ln(n^2+2n)}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+2}\right)+\frac{3}{2}\ln 3$

تمرين 2:

I- $V_n=\frac{U_n}{U_n-2}$ و $U_{n+1}=\frac{3U_n}{U_n+1}$

(1 $U_{n+1}=\frac{3U_n+3-3}{U_n+1}=3-\frac{3}{U_n+1}$.

$n=0$: $U_0=3$ ، $2<U_0<4$ (محققة)

نفرض أن $2<U_n<4$ من أجل n كيفي، ونبرهن صحتها من أجل n+1، أي $2<U_{n+1}<4$.

$2<U_n<4$ ؛ $3<U_n+1<5$ ؛ $\frac{1}{5}<\frac{1}{U_n+1}<\frac{1}{3}$

$-1<\frac{-3}{U_n+1}<-\frac{3}{5}$ ؛ $2<3-\frac{3}{U_n+1}<\frac{12}{5}<4$

$2<U_{n+1}<4$ ، ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $2<U_n<4$

(2 $U_{n+1}-U_n=\frac{3U_n}{U_n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+2U_n}{U_n+1}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n(2-U_n)}{U_n+1}<0$

لأن $2-U_n<0$ و $U_n>0$ ، ومنه (U_n) متناقصة

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

(3 $n=0$: $U_0=3$ محققة $\left(U_0=\frac{6}{3-1}=3\right)$

نفرض صحة U_n من أجل n كيفي ونبرهن صحتها من أجل n+1 أي: $U_{n+1}=\frac{6}{3-3^{-n-1}}$.

$U_{n+1}=\frac{3U_n}{U_n+1}=\frac{3\left(\frac{6}{3-3^{-n}}\right)}{\frac{6}{3-3^{-n}}+1}=$

$\frac{3\times 6}{9-3^{-n}}=\frac{3\times 6}{3\left(3-\frac{3^{-n}}{3}\right)}=\frac{6}{3-3^{-n-1}}$ (محققة)

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ U_n محققة.

$\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{6}{3}=2$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

(4 $V_n=\frac{U_n}{U_n-2}=\frac{\frac{6}{3-3^{-n}}}{\frac{6}{3-3^{-n}}-2}=\frac{6}{2\times 3^{-n}}$

$V_n=\frac{3}{3^{-n}}=3^{n+1}$

$V_n\geqslant e^{66}$ ، $3^{n+1}\geqslant e^{66}$ ، $\ln 3^{n+1}\geqslant\ln e^{66}$

$(n+1)\ln 3\geqslant 66$ ، $n+1\geqslant\frac{66}{\ln 3}$

$n\geqslant 59{,}07$ ومنه: $n=60$

(5 $S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\dots+\frac{1}{U_n}$

$S_n=\frac{3-3^{0}}{6}+\frac{3-3^{-1}}{6}+\dots+\frac{3-3^{-n}}{6}$

$S_n=\frac{\underbrace{3+3+\dots+3-(3^0+3^{-1}+3^{-2}+\dots+3^{-n})}}{6}$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 1

$S_n=\frac{3(n+1)-\left(\frac{1-3^{-n-1}}{1-3^{-1}}\right)}{6}=\frac{3(n+1)-\frac{3}{2}(1-3^{-n-1})}{6}$

$S_n=\frac{2n+1+3^{-n-1}}{4}$

II (1 $V_{n+1}=\frac{U_{n+1}}{U_{n+1}-2\alpha}=\frac{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}}{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}-2\alpha}$

$$V_{n+1}=\frac{(\alpha+2)u_n}{(2-\alpha)u_n-2\alpha(2-\alpha)}=\frac{\alpha+2}{2-\alpha}\left(\frac{u_n}{u_n-2\alpha}\right)$$

$V_{n+1}=\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)V_n$ ومنه (V_n) متتالية هندسية $q=\frac{2+\alpha}{2-\alpha}$

$$V_n=V_0q^n=\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n=\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^{n+1}$$

2) $-2<\alpha<0$ ؛ $0<-\alpha<2$ ؛ $2<2-\alpha<4$

$\frac{1}{4}<\frac{1}{2-\alpha}<\frac{1}{2}$ ؛ $0<2+\alpha<2$ ؛ ومنه :

$0<\frac{2+\alpha}{2-\alpha}<1$ ، $0<q<1$ و $V_0>0$ فهي متناقصة

$\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$

3) $$S'_n=\ln(2-\alpha)\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)+\ln(2-\alpha)^2\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^2+\dots+\ln(2-\alpha)^n\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n$$

$$S'_n=\ln(2+\alpha)+\ln(2+\alpha)^2+\dots+\ln(2+\alpha)^n$$

$$S'_n=\ln(2+\alpha)+2\ln(2+\alpha)+\dots+n\ln(2+\alpha).$$

$$S'_n=(1+2+\dots+n)\ln(2+\alpha)=\frac{n(n+1)}{2}\ln(2+\alpha)$$

تمرين 3:

I- 1) $g(0)=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

2) $$g'(x)=-\left(e^x(e^x+2x)+e^x(e^x+2)\right)$$

$=-2e^x(x+1+e^x)<0$ لأن $x\geq 0$.

3)

x	0	$+\infty$
g'	$-$	
$g(x)$	-1 ↘	$-\infty$

لاحظ أن $g(x)\leq -1$ ،
ومنه : $g(x)+1\leq 0$
من أجل كل $x\in[0;+\infty[$

II- 1) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$.

$$f(-x)=\frac{-x}{2}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)=\frac{-x}{2}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\frac{e^x}{e^x}$$

$$f(-x)=\frac{-x}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)=f(x)$$

ومنه f زوجية . (C) متناظر بالنسبة لـ $(y'Oy)$.

2) أ) $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left[\frac{e^x(\frac{1}{e^x}-1)}{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}+1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{2}{1+e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=0$

ب) ندرس إشارة : $\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{e^x+1}$ ؛ ومنه :

$x>0$: (C) أعلى (Δ) ، $x<0$: (C) أسفل (Δ)

(C) يقطع (Δ) عند المبدأ $O(0;0)$.

(Δ) يمثل المستقيم المقارب المائل لـ(C) بجوار $+\infty$.

3) أ) $$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)+\frac{x}{2}\left(\frac{-e^x(e^x+1)-e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{(1-e^x)(1+e^x)+x(-2e^x)}{2(1+e^x)^2}=\frac{1-e^{2x}-2xe^x}{2(1+e^x)^2}$$

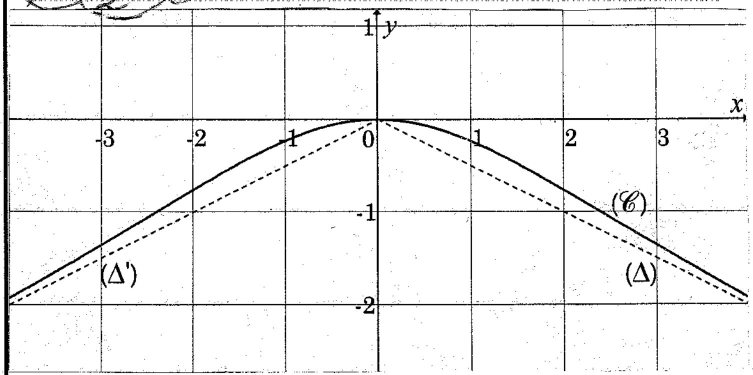
$$f'(x)=\frac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}$$

ب) $1+g(x)\leq 0$ ومنه f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$
f زوجية فهي متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

4) أ) f مستمرة ومتناقصة على $]2{,}3;2{,}4[$ ؛
$f(2{,}3)=-0{,}94>-1$ و $f(2{,}4)=-1{,}0004<-1$ ؛ ومنه
حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن : $f(x)=-1$
تقبل حلا وحيدا α على $]2{,}3;2{,}4[$ حيث $f(\alpha)=-1$.
$f(-x)=f(x)$ ومنه : $-2{,}4<\beta<-2{,}3$

ب) f زوجية : $f(-x)=f(x)$ ومنه : $(\Delta'):y=\frac{x}{2}$



III- 1) $n=0$: $u_0=1$ ، $u_0>0$ (محققة)
نفرض أن $u_n>0$ من أجل كل عدد n كيفي ،
ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}>0$.
مما سبق لما $x>0$ ، $\left(f(x)+\frac{x}{2}\right)>0$ ومنه ؛
$u_{n+1}=\left(f(u_n)+\frac{u_n}{2}\right)>0$. إذن $u_n>0$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

2) $$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-\frac{u_n}{2}=\frac{-u_ne^{u_n}}{e^{u_n}+1}<0$$

ومنه (u_n) متناقصة .
(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة .

3) أ) لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)+\frac{u_n}{2}=\frac{u_n}{e^{u_n}+1}$

$u_n>0$ ؛ $e^{u_n}>1$ ؛ $e^{u_n}+1>2$

$\frac{1}{e^{u_n}+1}<\frac{1}{2}$ عند ضرب طرفي المتباينة بـ(u_n)

$\frac{u_n}{e^{u_n}+1}<\frac{u_n}{2}$ ومنه ؛ $u_{n+1}<\frac{1}{2}u_n$

إذن : $k=\frac{1}{2}$

ب) $n=0$: $u_0\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ، $u_0\leq 1$. محققة
نفرض أن $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل n كيفي ونبرهن
صحتها من أجل $(n+1)$ أي $u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
لدينا : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، $\frac{1}{2}u_n\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (نضرب $\times\frac{1}{2}$)
$\frac{1}{2}u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ولدينا سابقا $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$ ،
ومنه $u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ، إذن $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$
$0<u_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ (مبرهنة الحصر)

حسب الطالب