2023-2022 — **الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات** — المدة: 01 سا

تجنّب الشطب و استعمال المصحّح.

التمرين الأول: (14 نقطة)

I) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

① عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون المتتالية (u_n) ثابتة على $\mathbb{N}$.

II) نضع في كل ما يلي: $\alpha = 0$.

① عين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n + 3}$.

② برهن بالتراجع أنه من من أجل كل عدد طبيعي n، $-1 \le u_n \le 0$.

③ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). ثم برر تقاربها.

④ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

أ- برهن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{2}$، يطلب تعيين حدها الأول v_0.

ب- اكتب v_n بدلالة n، ثم u_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. ماذا تستنتج ؟

جـ- احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث: $S_n = \ln\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right) + \cdots\cdots + \ln\left(\dfrac{v_n}{v_{n-1}}\right)$

$T_n = \dfrac{2023}{u_0 + 1} + \dfrac{2023}{u_1 + 1} + \cdots\cdots + \dfrac{2023}{u_n + 1}$.

التمرين الثاني: (06 نقاط)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ووحدة الطول هي: $1\,cm$.

① احسب التكامل التالي: $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\, dx$.

② بين أن: $H : x \mapsto 2\ln(x) - x$ هي دالة أصلية لـ $h : x \mapsto \dfrac{2}{x} - 1$ على المجال $]0; +\infty[$.

③ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x\, dx = (1 - \ln 2)^2$.

④ احسب S مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y = x$ ، $x = 1$ و $x = 2$.

************ الأستاذ: فراحتية المحفوظ ************

الأستاذ فراحتية المحفوظ | تصحيح الفرض الأول للفصل الثاني في مادة الرياضيات | سنة ثالثة علوم تجريبية

• حل التمرين الأول.

(I) $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$ ، $u_0=\alpha$

(1) تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه $u_{n+1}=u_n=u_0=\alpha$

بالتعويض في العلاقة التراجعية نجد:

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+3}=\alpha$$

تكافئ $\alpha(\alpha+3)=\alpha-1$

تكافئ $\alpha^2+2\alpha+1=0$ أي $(\alpha+1)^2=0$

تكافئ $\alpha+1=0$ تكافئ $\boxed{\alpha=-1}$

(II) نضع $\alpha=0$ أي $u_0=0$

(1) تعيين العددين a و b حيث: $u_{n+1}=a+\frac{b}{u_n+3}$

لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}=\frac{u_n-1+3-3}{u_n+3}=\frac{u_n+3}{u_n+3}-\frac{4}{u_n+3}=1-\frac{4}{u_n+3}$$

إذا $\boxed{a=1}$ و $\boxed{b=-4}$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $-1\leq u_n\leq 0$

(أ) من أجل $n=0$ نجد $u_0=0$

ولدينا $-1\leq 0\leq 0$

إذا $-1\leq u_0\leq 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

(ب) ليكن $n\in\mathbb{N}$. نفترض $-1\leq u_n\leq 0$

ونبرهن أن $-1\leq u_{n+1}\leq 0$

لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$: $-1\leq u_n\leq 0$

تكافئ $2\leq u_n+3\leq 3$

تكافئ $\frac{1}{3}\leq\frac{1}{u_n+3}\leq\frac{1}{2}$

تكافئ $-2\leq\frac{-4}{u_n+3}\leq-\frac{4}{3}$

تكافئ $-1\leq 1-\frac{4}{u_n+3}\leq-\frac{1}{3}\leq 0$

تكافئ $-1\leq u_{n+1}\leq 0$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

من (أ) و (ب) وحسب الاستدلال بالتراجع

فإنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $-1\leq u_n\leq 0$

(3) دراسة اتجاه تغير (u_n):

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n-1}{u_n+3}-u_n$$

$$=\frac{u_n-1-u_n^2-3u_n}{u_n+3}$$

$$=\frac{-u_n^2-2u_n-1}{u_n+3}$$

$$=-\frac{(u_n+1)^2}{u_n+3}\leq 0$$

لأن $-(u_n+1)^2\leq 0$ و $u_n+3>0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

• التقارب:

المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

(4) $V_n=\frac{1}{u_n+1}$

(أ) برهان أن (V_n) متتالية حسابية:

- لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$:

(1) $T_n = \frac{2023}{u_0+1} + \frac{2023}{u_1+1} + \dots + \frac{2023}{u_n+1}$

$= 2023\left(\frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1}\right)$

$= 2023\left(V_0 + V_1 + \dots + V_n\right)$

$= 2023\left(\frac{n+1}{2}\left(V_0 + V_n\right)\right)$

$= 2023 \times \frac{n+1}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}n\right)$

$= 2023 \times \frac{n+1}{2}\left(\frac{4+n}{2}\right)$

$= \frac{2023}{4}(n+1)(4+n)$

06 حل التمرين الثاني

$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$

(1) ① - حساب التكامل $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$:

$\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\ln x\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2$

$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

② - تبيين أن $H: x \longrightarrow 2\ln(x) - x$

(1) دالة أصلية لـ $h: x \longrightarrow \frac{2}{x} - 1$

H دالة معرفة وقابلة للاشتقاق

على مجال $]0;+\infty[$ حيث

$H'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$= \frac{2}{x} - 1 = h(x)$

ومنه الدالة H دالة أصلية للدالة h

على المجال $]0;+\infty[$

$V_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n+3}+1}$

$= \frac{1}{\frac{u_n-1+u_n+3}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}}$

$= \frac{u_n+3}{2u_n+2} = \frac{u_n+3}{2(u_n+1)}$

$= \frac{u_n+1+2}{2(u_n+1)} = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)} + \frac{2}{2(u_n+1)}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{2} + V_n$

ومنه (V_n) متتالية حسابية أساسها

$r = \frac{1}{2}$ وحدها الأول V_0 حيث

(0,5) $V_0 = \frac{1}{u_0+1} = \frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$

ب - كتابة V_n بدلالة n:

(1) من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $V_n = V_0 + nr$

$V_n = 1 + \frac{1}{2}n$

• كتابة u_n بدلالة n:

(1) لدينا من اجل كل $n \in \mathbb{N}$; $V_n = \frac{1}{u_n+1}$

معناه $\frac{1}{V_n} = u_n + 1$ اي $u_n = \frac{1}{V_n} - 1$

اذن $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{2}n} - 1 = \frac{2}{2+n} - 1$

$u_n = \frac{-n}{2+n}$

(1) • حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n}{n} = -1$

(0,5) • الإستنتاج: المتتالية (u_n) متقاربة نحو -1

جـ - حساب بدلالة n المجموعتين S_n و T_n:

(1) $S_n = \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) + \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$

$= \ln\left(\frac{V_1}{V_0} \times \frac{V_2}{V_1} \times \dots \times \frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$

$= \ln\left(\frac{V_n}{V_0}\right)$

$= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}n}{1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2}n\right)$

③ - باستعمال التكامل بالتجزئة نبين أن:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) \ln x \, dx = (1-\ln 2)^2$$

نضع $u(x) = \ln x$ و $v'(x) = \frac{2}{x} - 1$

نجد $u'(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = 2\ln(x) - x$

ومنه

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) \ln x \, dx = \left[\ln(x) \times (2\ln(x) - x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\ln x}{x} - 1 \, dx$$

$$= \left[\ln(x) \times (2\ln(x) - x)\right]_1^2 - \left[2\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 - x\right)\right]_1^2$$

$$= \ln 2 (2\ln 2 - 2) - 0 - \left((\ln 2)^2 - 2 - 0 + 1\right)$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1$$

$$= (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1$$

$$= (\ln(2) - 1)^2$$

$$= (1 - \ln(2))^2$$

④ - حساب مساحة الحيز S المحدد

بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات

$y = x$ ، $x = 1$ و $x = 2$

- من أجل $x \in]0; +\infty[$ لدينا

$$f(x) - y = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x - x$$

$$= \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = \left(\frac{x-2}{x}\right)\ln x$$

ولدينا من أجل $x \in [1, 2]$ ؛ $\ln x > 0$

و $\frac{x-2}{x} < 0$

ومنه $f(x) - y < 0$

إذن $S = \int_1^2 -\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x \, dx \ (1 \times 1)\, cm^2$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x \, dx \ cm^2$$

$$S = (1 - \ln 2)^2 \, cm^2$$