المستوى:الثالثة علوم تجريبية	فيفري 2025
فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات	المدة : 1 سا.

التمرين 1 (12 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+2}$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4 - \frac{8}{u_n+2}$

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leq 4$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج ؟

4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = ln(\frac{u_n}{u_n-2})$

أ) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2}{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) اكتب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \cdots + e^{v_n}$

التمرين 2 (8 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \alpha$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$

α عدد حقيقي موجب تماما.

I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

II) نضع في ما يلي $\alpha = \frac{1}{4}$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

2) عبر عن v_n و u_n بدلالة n . ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) احسب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n حيث :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n \quad ; \quad S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \cdots + \frac{5^n}{v_n}$$

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

التمرين 1 (12 ن)

1) البرهان انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4 - \frac{8}{u_n+2}$

2) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leq 4$

3) اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n{}^2+2\,u_n}{u_n+2}$

و منه $u_{n+1} - u_n < 0$ اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

4) أ) إثبات أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ لدينا : $v_{n+1} - v_n = ln\,2$

إذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = ln\,2$ و حدها الأول $v_0 = ln\,2$

ب) كتابة v_n بدلالة n ، ثم استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2}{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}$ ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$v_n = ln(2)^{n+1}\ ;\ u_n = \frac{2}{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

5) كتابة بدلالة n المجموع S_n : $S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \cdots + e^{v_n}$

$$S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \cdots + e^{v_n} = -2(1-(2)^{n+1})$$

التمرين 2 (8 ن)

I) تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

α=1

II 1) نبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

من اجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ لدينا : $v_{n+1} = \frac{5}{2}\ v_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$

2) التعبير عن v_n و u_n بدلالة n . ثم حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$v_n = 3(\frac{5}{2})^n\ ;\quad u_n = \frac{-2+3(\frac{5}{2})^n}{3(\frac{5}{2})^n+1}\ ;$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n حيث :

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \cdots + \frac{5^n}{v_n} = -\frac{1}{3}(1 - 2^{n+1})$$

$$P_n = v_0 \times v_1; \times \cdots \times v_n = 3^{n+1}(\frac{5}{2})^{\frac{n(n+1)}{2}}$$