المستوى: الثالثة ثانوي علوم تجريبية	فيفري 2020
فرض الثلاثي الثاني في الرياضيات	المدة: 2 سا

التمرين الأول(10 نقط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

1- احسب الحدود u_2, u_3، و u_4 (تدوّر النتائج الى 10^{-2}) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- ا- بين بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

3- المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ: $v_n=u_n-n$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين حدها العام v_n

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n

4- نضع من اجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1V_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2V_2+........+\left(\frac{2}{3}\right)^nV_n$

$S'_n=u_1+u_2+....+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$ احسب المجموعين S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim_{n\to+\infty}T_n$

التمرين الثاني(10 نقط)

كيس يحتوي على 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرة واحدة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الكيس .

1/ أ * احسب عدد الحالات الممكنة .

ب * احسب احتمالات الأحداث التالية :

A " الحصول على 3 كرات من نفس اللون". B " الحصول على كرة على الأقل حمراء " .

C " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء ".

2 / نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان المحصل عليها .

أ * ما هي قيم X ؟

ب * أحسب الاحتمالات التالية : $P(X=1)$ ، $P(X=3)$ واستنتج $P(X=2)$.

ج * أحسب الأمل الرياضي ، التباين ثم الانحراف المعياري .

التصحيح النموذجي

العلامة		الحل	رقم التمرين
		1)حساب u_4, u_3, u_2 :	
10 ن	1.5	$U_2 = \frac{2}{3}U_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{e} + \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{e}+4}{3} \approx 2,43$	
	1	$U_3 = \frac{2}{3}U_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}(\frac{2\sqrt{e}+4}{3}) + \frac{5}{3} = \frac{4\sqrt{e}+23}{9} \approx 3,28$ $U_4 = \frac{2}{3}U_3 + \frac{3}{3} + 1 = \frac{2}{3}(\frac{4\sqrt{e}+23}{9}) + 2 = \frac{8\sqrt{e}+100}{9} \approx 12,58$ 2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n+3$ * من اجل $n=1$: $U_1 = \sqrt{e} \approx 1,6$ ومنه $U_1 \leq 1+3$ (محققة) *نفرض أن $U_n \leq n+3$ صحيحة و نبين أن: $U_{n+1} \leq n+4$ لدينا : $U_n \leq n+3$ ومنه: $\frac{2}{3}U_n \leq \frac{2}{3}(n+3)$ إذن: $\frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1$ وبالتالي: $U_{n+1} \leq n+3$ ومنه $U_{n+1} \leq n+3 \leq n+4$ ومنه : $U_{n+1} \leq n+4$ إذن $p(n+1)$ صحيحة *الإستنتاج : من أجل كل $n \geq 1$: $U_n \leq n+3$ ب) $U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - U_n$ $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{1}{3}U_n = \frac{1}{3}(n+3-U_n)$	التمرين 1

1	لدينا : $U_n \leq n+3$ ومنه: $n+3-U_n \geq 0$ أي: $\frac{1}{3}(n+3-U_n) \geq 0$ ومنه: $U_{n+1}-U_n \geq 0$ ومنه: (U_n) متزايدة	
1	3) أ) إثبات أن (V_n) متتالية هندسية: $V_n = U_n - n$	
0.5	$V_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}U_n - \frac{2}{3}n$ $V_{n+1} = \frac{2}{3}(U_n - n)$ أي : $\boxed{V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n}$ (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_1 = U_1 - 1 = \sqrt{e} - 1$	
1	ب) عبارة V_n : $V_n = V_1 \times q^{n-1}$ $V_n = (\sqrt{e}-1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	
1	ب) عبارة U_n :	
1	$U_n = (\sqrt{e}-1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n$	

4) حساب: $S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_2 + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_n$

لدينا : $V_n = V_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 V_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n V_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[\underbrace{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}} \right]$$

1

$$S_n = V_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right]$$

0.5

0.5 $$S_n = \frac{6}{5}(\sqrt{e} - 1)\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$S'_n = 3(\sqrt{e} - 1) \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$T_n = \frac{S'_n}{n^2} = \frac{3}{n^2}(\sqrt{e} - 1) \times \left|1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right| + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}$$

1 $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} T_n = \frac{1}{2}}$$

	0.75	**1 / ا * الحالات الممكنه لسحب 3 كرات هي :** $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$ **ب* حساب احتمال الأحداث** A : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " $P(A) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}} = \frac{C_3^3 + C_4^3}{56} = \frac{1+4}{56} = \frac{5}{56}$	التمرين 2
	1		
	1	B : " الحصول على كرة على الأقل حمراء " $P(B) = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}}$ $= \frac{C_4^1 \times C_4^2 + C_4^2 \times C_4^1 + C_4^3 \times C_4^0}{56}$ $= \frac{24+24+4}{56} = \frac{52}{56} = \frac{13}{14}$ C : " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء "	

		C : " الحصول على كرتين على الأكثر حمراء "	
	1	$P(C)=\dfrac{C_4^0\times C_4^3+C_4^1\times C_4^2+C_4^2\times C_4^1}{56}$ $=\dfrac{4+24+24}{56}=\dfrac{52}{56}=\dfrac{13}{14}$	
	1	**2 / تعيين قيم** X **:** $X(\Omega)=\{1;2;3\}$	
	0.75	$P(X=1)=P(A)=\dfrac{5}{56}$	
	0.75	$P(X=3)=\dfrac{C_4^1\times C_3^1\times C_1^1}{56}$ $=\dfrac{4\times3\times1}{56}=\dfrac{12}{56}=\dfrac{3}{14}$	

استنتاج $P(X=2)$:

لدينا : $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

ومنه

0.75

$$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)$$
$$=1-\frac{5}{56}-\frac{12}{56}=\frac{39}{56}$$

ومنه قانون توزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X :

0.75

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

ج - حساب الامل الرياضى :

0.75

$$E(X)=\left(1\times\frac{5}{56}\right)+\left(2\times\frac{39}{56}\right)+\left(3\times\frac{12}{56}\right)=\frac{119}{56}\approx 2.13$$

*** حساب التباين والانحراف المعيارى :**

0.75

$$v(X)=\sum_{i=1}^{3}\left(x_i-E(X)\right)^2\times p_i\approx 0.29$$

0.75

$$\sigma(X)=\sqrt{v(X)}\approx 0.54$$