

المدة: 01 سا

الفرض الأول للثلاثي الثاني في الرياضيات

2024 - 2023

⚠ تجنب الشطب واستعمال المصحح.

التمرين الأول: (10 نقاط)



نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كيلي: $u_0 = 3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$.

① احسب الحدين u_1 و u_2 . هل المتتالية (u_n) رتيبة؟ برر إجابتك.

② أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n \leq u_n \leq n + 3$.
ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. ماذا تستنتج؟

③ لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - n$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .
ب- عبر عن v_n بدلالة n . ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- عين أكبر عدد طبيعي n بحيث: $u_n \geq \frac{3}{256} + n$.

④ احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S'_n = \ln\left(\frac{u_0}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_1-1}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_n-n}{3}\right) \text{ و } S_n = \left(\frac{3}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_1-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{u_n-n}\right)^2$$

التمرين الثاني: (10 نقاط)



ليكن (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المعرفتين

على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ و $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. نضع: $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$ و $J = \int_0^{\ln 2} g(x) dx$. وحدة الطول هي 1 cm .

① بين أنه من أجل كل x من المجال $[0; \ln 2]$ فإن: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$. ثم عين حصرًا للتكامل J .

② أثبت أن: $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$. ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين ذوو المعادلتين: $x = \ln 2$ و $x = 0$.

③ تحقق أنه من أجل كل x من المجال $[0; \ln 2]$ فإن: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$. ثم احسب التكامل I .

④ استنتج قيمة التكامل J . ثم فسر النتيجة هندسيًا.

الأساتذ: فراحتية المحفوظ

خليل مطران:



واصبر وثابر فالنجاح محقق

اعزم وكد فإن مضيت فلا تقف



المدة: 01 سا

الإجابة النموذجية للفرض الأول للثلاثي الثاني في الرياضيات

2024 - 2023

التمرين الأول: (10 نقاط)

(1)	المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :
(0.5)	$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1$
(2)	(أ) $u_1 = \frac{5}{2}$ ، $u_2 = \frac{11}{4}$
(1)	(ب) لدينا $u_0 > u_1$ و $u_1 < u_2$ وبالتالي (u_n) ليست رتيبة.
(2)	(أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n \leq u_n \leq n+3$.
(1)	(ب) لدينا $u_n \geq n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ والمتتالية (u_n) متباعدة.
(1.5)	(3) (أ) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها
(1)	$\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 3$
(1)	(ب) $v_n = v_0 \times q^n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و $u_n = v_n + n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + n$
(1)	(ج) تعيين أكبر عدد طبيعي n بحيث: $u_n \geq \frac{3}{256} + n$
	$\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^8$ أي: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{1}{256}$ يكافئ $u_n \geq \frac{3}{256} + n$
	وبالتالي $n \leq 8$ وأكبر عدد طبيعي n هو 8
(1)	(4) $S_n = \left(\frac{3}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_1-1}\right)^2 + \left(\frac{3}{u_2-2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{u_n-n}\right)^2$
	$\left(\frac{3}{v_n}\right)^2 = \left(\frac{3}{3\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2 = (2^n)^2 = 4^n$ و $S_n = \left(\frac{3}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{3}{v_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{v_n}\right)^2$
(1)	وبالتالي: $S_n = 4^0 + 4^1 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$
	$S'_n = \ln\left(\frac{u_0}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_1-1}{3}\right) + \ln\left(\frac{u_2-2}{3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{u_n-n}{3}\right)$
	لدينا $\frac{u_n-n}{3} = \frac{v_n}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
	$S'_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n$
	$= \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] \times (0+1+2+3+\dots+n)$
	$= \left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{-n(n+1)\ln 2}{2}$



(2)	(1) تبين أن: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ لدينا: $g'(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$ ومنه: الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0; \ln 2]$ ولدينا $0 \leq x \leq \ln 2$ ومنه: $g(\ln 2) \leq g(x) \leq g(0)$ إذا: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ ➤ حصر J:
(1)	لدينا: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ ومنه: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3} dx \leq \int_0^{\ln 2} g(x) dx \leq \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} dx$ أي: $\frac{\ln 2}{3} \leq J \leq \frac{\ln 2}{2}$ إذا: $\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{\ln 2} \leq J \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\ln 2}$
(2)	(2) إثبات أن: $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ لدينا: $I - J = \int_0^{\ln 2} f(x) dx - \int_0^{\ln 2} g(x) dx$ ومنه: $I - J = \int_0^{\ln 2} [f(x) - g(x)] dx$ ومنه: $I - J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx$ ومنه: $I - J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx$ وعليه: $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ➤ مساحة الحيز:
(1)	لدينا: $S = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ومنه: $S = [e^x - x]_0^{\ln 2}$ وعليه: $S = 1 - \ln 2$
(1)	(3) التحقق أن: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x+1}$ $e^x - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}}{e^x+1} = f(x)$ ➤ حساب التكامل I: لدينا: $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$ ومنه: $I = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx$ أي: $I = [e^x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln 2}$ إذن: $I = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$
(1)	(4) استنتاج قيمة التكامل J: لدينا: $I - J = 1 - \ln 2$ ومنه: $J = I - 1 + \ln 2$ أي: $J = 1 + \ln 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2$ إذا: $J = 2 \ln 2 - \ln 3$
(1)	➤ التفسير الهندسي: J هي مساحة الحيز من المستوي المحصور بين (C_g) و محور الفواصل و المستقيمين ذي المعادلتين: $x = \ln 2$ و $x = 0$

الأستاذ: فراحية المحفوظ
