

فرض الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

تمرين 1 (10 ن)

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{Q}$ ب: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$.
- (1) أ- أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 1$.
ب - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{Q}$.
ج - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .
- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{Q}$ ب: $v_n = u_n^2 - 1$.
أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$.
ب - استنتج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .
ج - أكتب بدلالة n ، كلا من u_n و v_n ، ثم أحسب من جديد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) أحسب بدلالة n كلا من S_n و T_n حيث :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$
$$T_n = v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n$$

تمرين 2 (10 ن) :

- نعتبر في $\mathbb{Q}^2$ المعادلتين $(E): 2019x - 1440y = 282$ و $(E'): 673x - 480y = 94$.
- (1) بين أن العدد 673 أولي .
- (2) بين أن للمعادلتين (E) و (E') نفس الحلول في مجموعة الحلول $\mathbb{Q}^2$.
- (3) عين الثنائية $(x_0; y_0)$ من $\mathbb{Q}^2$ الحل الخاص للمعادلة (E') حيث : $x_0 - y_0 = 1$ ، ثم حل في $\mathbb{Q}^2$ المعادلة (E') .
- (4) علما أن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E') ، عين القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$.
- (5) عين الثنائيات $(x; y)$ من $\mathbb{Q}^2$ حلول المعادلة (E') ، بحيث $PGCD(x; y) = 47$.
- (6) n عدد طبيعي باقي قسمته على 480 هو 152 وباقي قسمته على 673 هو 58 .
- عين قيم n ، ثم استنتج أصغر قيمة ممكنة له .

بالتوفيق .

$$(1) \text{ لنا : } u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$$

أ- حساب الحدود :

$$u_3 = \sqrt{\frac{1+u_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{2} \text{ و } u_2 = \sqrt{\frac{1+u_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}^2}{2}} = \sqrt{3} \text{ و } u_1 = \sqrt{\frac{1+u_0^2}{2}} = \sqrt{\frac{1+3^2}{2}} = \sqrt{5}$$

ب- البرهان بالتراجع :

من أجل $n=0$: $u_0 = 3 > 1$ محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$

لنا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ تكافئ : $u_n^2 > 1$ تكافئ : $\frac{1+u_n^2}{2} > 1$ تكافئ : $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} > 1$ تكافئ : $u_{n+1} > 1$.
بما أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .
ب- بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{Q}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1+u_n^2}{2} - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1+u_n^2 - 2u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

$$\frac{\frac{1+u_n^2 - 2u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1-u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{1-u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

لنا $u_n > 1$ تكافئ : $u_n^2 > 1$ تكافئ : $-u_n^2 < -1$ تكافئ : $1 - u_n^2 < 0$

ولنا : $2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right) > 0$ ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{Q}$.

ج- استنتاج أن (u_n) متقاربة : المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

حساب النهاية :

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

ومنه : $\sqrt{\frac{1+l^2}{2}} = l$ تكافئ : $\frac{1+l^2}{2} = l^2$ مع $l \geq 0$ تكافئ : $1+l^2 = 2l^2$ تكافئ : $l^2 = 1$

تكافئ : $l = 1$ (مقبول) أو $l = -1$ (مرفوض) . ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{Q}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$

أ- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$

من أجل $n=0$: لدينا : $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$ ولنا : $v_1 = u_1^2 - 1 = \sqrt{5}^2 - 1 = 4$ ومنه : $2v_1 = v_0$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ (أي نبرهن أنه : $2v_{n+2} = v_{n+1}$)

$$2v_{n+1} = 2(u_{n+1}^2 - 1) = 2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - 1\right)^2 = 2\left(\frac{1+u_n^2 - 2}{2}\right) = u_n^2 - 1 = v_n$$

بما ان الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ فهي صحيحة من أجل n وذلك حسب البرهان بالتراجع .

ب- استنتاج أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 :

لنا : من أجل كل عدد طبيعي n ، $2v_{n+1} = v_n$ تكافئ : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

حساب v_0 : $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$

ج- كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

و كتابة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = u_n^2 - 1$ تكافئ : $u_n^2 = v_n + 1$ تكافئ : $u_n = \sqrt{v_n + 1} = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

حساب النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \sqrt{0+1} = 1$

(3) حساب المجموع :

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n \\ &= 2^0 v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n \\ &= 2^0 \times 8 + 2 \times 8 \times \frac{1}{2} + \dots + 2^n \times 8 \times \frac{1}{2^n} \\ &= 8 + 8 + \dots + 8 \\ &= 8 \times (n - 0 + 1) \\ &= 8n + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 \\ &= v_0 + 1 + v_1 + 1 + \dots + v_n + 1 \\ &= v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 \times (n - 0 + 1) \\ &= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 16 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + n + 1 \end{aligned}$$

تبرين 2 :

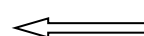
(1) بين أن العدد 673 أولي : $\sqrt{673} \approx 25,94$

العدد 673 يقبل القسمة على	2	3	5	7	11	13	17	19	23
	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

ومنه العدد 673 أولي.

(2) بيان أن للمعادلتين $(E): 2019x - 1140y = 282$ و $(E'): 673x - 480y = 94$ نفس الحلول في مجموعة الحلول $\mathbb{Z}^2$:

$$PGCD(2019; 1440) = 3$$



$$2019 = 1440 \times 1 + 579$$

$$1440 = 579 \times 2 + 282$$

$$579 = 282 \times 2 + 15$$

$$282 = 15 \times 18 + 12$$

$$15 = 12 \times 1 + 3$$

$$12 = 3 \times 4 + 0$$

لنا : 3 يقسم العدد 2019 وبالتالي يقسم $2019x$ و 3 يقسم العدد 1440 وبالتالي يقسم $1440y$ ومنه 3 يقسم $2019x - 1440y$

وبالتالي 3 يقسم 282 لذلك عند قسمة أطراف المعادلة على 3 تصبح المعادلة (E) مكافئة للمعادلة (E') .

(3) تعيين الثنائية $(x_0; y_0)$ من $\square^2$ الحل الخاص للمعادلة (E') حيث : $x_0 - y_0 = 1$.

$$\text{لنا } x_0 - y_0 = 1 \text{ تكافئ : } y_0 = x_0 - 1$$

بالتعويض نجد : $673x_0 - 480(x_0 - 1) = 94$ تكافئ : $673x_0 - 480x_0 + 480 = 94$ تكافئ : $193x_0 = -386$ ومنه

$$x_0 = -2 \text{ أي : } y_0 = -3$$

تعيين حلول المعادلة (E') :

$$\text{تكافئ : } \begin{cases} 673(x+2) - 480(y+3) = 0 \\ 673(-2) - 480(-3) = 94 \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} 673x - 480y = 94 \\ 673(-2) - 480(-3) = 94 \end{cases}$$

لنا 673 يقسم $480(y+3)$ ولكن 673 أولي مع 480 أي حسب مبرهنة غوص 673 يقسم $y+3$ ومنه $y+3 = 673k$ مع

$k \in \square$ ومنه : $y = 673k - 3$ مع $k \in \square$. و بالتعويض : $673x - 480(673k - 3) = 94$ ومنه : $x = 480k - 2$ مع $k \in \square$.

ومنه حلول المعادلة (E') في $\square^2$ هي من الشكل : $(480k - 2; 673k - 3)$ مع $k \in \square$.

• تعيين القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$ ، علما أن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E') : نضع $PGCD(x; y) = d$

لنا : d يقسم العدد 673 وبالتالي يقسم $673x$ و d يقسم العدد 480 وبالتالي يقسم $480y$ ومنه d يقسم $673x - 480y$

وبالتالي d يقسم 94 لذلك d من قواسم العدد 94 ولنا $94 = 2 \times 47$ ومنه القيم الممكنة له : $d \in \{1; 2; 47; 94\}$

تعيين الثنائيات $(x; y)$ من $\square^2$ حلول المعادلة (E') ، بحيث $PGCD(x; y) = 47$:

$$\begin{cases} 10k \equiv 2[47] \\ 15k \equiv 3[47] \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} 480k \equiv 2[47] \\ 673k \equiv 3[47] \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} 480k - 2 \equiv 0[47] \\ 673k - 3 \equiv 0[47] \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} x \equiv 0[47] \\ y \equiv 0[47] \end{cases}$$

تكافئ : $25k \equiv 5[47]$ (5 أولي مع 47) تكافئ : $5k \equiv 1[47]$ تكافئ : $5k \equiv 1 + 47 \times 2[47]$ تكافئ : $5k \equiv 95[47]$ تكافئ :

$$\begin{cases} x = 22560q + 9118 \\ y = 31631q + 12784 \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} x = 480(47q + 19) - 2 \\ y = 673(47q + 19) - 3 \end{cases} \text{ ومنه : } q \in \square \text{ مع } k = 47q + 19 \text{ ومنه } k \equiv 19[47]$$

ومنه الثنائيات $(x; y)$ التي نبحت عنها من الشكل : $(22560q + 9118; 31631q + 12784)$ مع $q \in \square$

$$(4) \text{ طريقة 1 : لنا : } \begin{cases} n - 152 = 480q' \\ n - 52 = 673q'' \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} n = 480q' + 152 \\ n = 673q'' + 58 \end{cases} \text{ بالفرق نجد : } 94 = 673q'' - 480q'$$

$$\text{معناه : } \begin{cases} q'' = x = 480k - 2 \\ q' = y = 673k - 3 \end{cases} \text{ بالتعويض نجد : } n = 323040k - 1288 \text{ مع } k \in \square^*$$

$$\text{طريقة 2 : لنا : } \begin{cases} n \equiv 152[480] \\ n \equiv 58[673] \end{cases} \text{ تكافئ : } \begin{cases} 673n \equiv 102296[323040] \\ 480n \equiv 27840[323040] \end{cases} \text{ تكافئ : } 193n \equiv 74840[323040] \text{ تكافئ :}$$

$$k \in \square^* \text{ مع } n = 323040k - 1288 \text{ تكافئ : } n \equiv 1288[323040] \text{ تكافئ : } 193n \equiv 176144 - 323040[323040]$$

تعيين اصغر قيمة له كي يكون n عدد طبيعيا :

$$n \geq 0 \text{ تكافئ : } 323040k - 1288 \geq 0 \text{ تكافئ : } k \geq \frac{1288}{323040} \approx 0.003 \text{ أي بأخذ } k = 1 \text{ نجد : } n = 321752$$