فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المستوى : سنة ثالثة شعبة رياضيات ـ تقني رياضي — المدة : ساعة واحدة

يمنع منعًا باتًّا استعمال القلم المُصحّح " *l'effaceur* "
تؤخذ بعين الإعتبار الإجابة الدقيقة والواضحة

التمرين الأول : 12 نقطة

I ـ نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + \cos x$.

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.
2. أثبت أنه من أجل كل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ فإن : $f(x) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

II ـ لتكن (U_n) متتالية عددية حقيقية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$.
2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة .
3. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
4. نعتبر المجموع S_n حيث : $S_n = \cos(U_0) + \cos(U_1) + \cos(U_2) + \ldots + \cos(U_n)$.

◄ أثبت أن $S_n = U_{n+1}$ ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

التمرين الثاني : 08 نقاط

◄ F و G دالتان معرفتان على المجال $[1; +\infty[$ بـ :

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\, dt \quad ; \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\, dt$$

1. باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن : $F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$.
2. باستخدام المكاملة بالتجزئة بين أن : $G(x) = x\sin(\ln x) - F(x)$.
3. استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$ بدلالة x .

✿ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ✿ 2024 ✿