الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة)	فرض	الموسم الدراسي: 2020/2021
المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"	الفصل الثاني	المدة: ساعتان ونصف (2سا 30د)
المادة: رياضيات		إعداد: عبد المطلب

تمرين 1 (05نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 0 ، 1 ، 1 وثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 2- ، 2 ، 2 وكريتين خضراوين تحملان الرقمين 1- ، 1-. الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد.

1) نعتبر الحادثتين: A: "سحب ثلاث كريات من نفس اللّون" و B: "سحب كرية واحدة بيضاء على الأقل".

احسب الاحتمالات التالية: $P(\mathrm{A})$ ، $P(\mathrm{B})$ ، $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ و $P(\mathrm{A}\cup\overline{\mathrm{B}})$.

2) نقترح اللّعبة التالية: إذا سحب اللّاعب ثلاث كريات جُداء أرقامها موجب تماما يربح x نقطة (x عدد طبيعي)، إذا سحب اللّاعب ثلاث كريات جُداء أرقامها سالب تماما يربح نقطة واحدة، وإذا سحب اللّاعب ثلاث كريات جُداء أرقامها معدوما يخسر ثلاث نقاط. ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب ربح أو خسارة اللّاعب.

أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X.

ب) بيّن أنّ الأمل الرياضياتي هو $E(X)=\dfrac{4x-32}{21}$ ، ثم أوجد أصغر قيمة لـ x حتى تكون اللّعبة مربحة.

3) نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع. احسب عدد الحالات المكنة لسحبها بحيث جداء أرقامها يساوي 4.

(في كل التمرين، تُحسب الاحتمالات على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

تمرين 2 (07نقاط)

I - عيّن على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين للعدد المركب $3-4i$. استنتج حلول المعادلة: $(z-1-i)^2=3-4i$.

II - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_{\mathrm{A}}=-1+2i$ ، $z_{\mathrm{B}}=3$ و $z_{\mathrm{C}}=3+2\sqrt{5}\,i$.

1) احسب كلا من $|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|$ و $|z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}|$، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) اكتب كلا من $(z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}})$ و $(z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}})$ على الشكل الأسي ثم بيّن أنّ: $\left(\dfrac{z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}}}{2\sqrt{5}}\right)^{2021}-\left(\dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2\sqrt{2}}\right)^{1442}=0$.

3) لتكن D نقطة من المستقيم (BC) تختلف عن C لاحقتها z_{D}.

أ) بيّن أنّ $z_{\mathrm{D}}=3+\alpha i$ ، حيث α عدد حقيقي، ثم عيّن العدد الحقيقي α حتى يكون $\mathrm{AB}=\mathrm{BD}$.

ب) استنتج طبيعة المثلث ACD والعناصر المميزة للدائرة $(\mathscr{C})$ المحيطة به ثم ارسمها. (استعمل α الموجود سابقا)

4) لتكن النقطة E لاحقتها z_{E} نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة B.

أ) بيّن أنّ $z_{\mathrm{E}}=7-2i$ ، ثم عيّن بدقّة طبيعة الرباعي ADEC وارسمه.

ب) عيّن وأنشئ المجموعة $(\mathscr{C}')$ للنقط $M(z)$ حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}\right\|$.

5) F و G نقطتان لاحقتيهما z_{F} و $z_{\mathrm{G}}=z_{\mathrm{F}}+2$. عيّن z_{F} حتى يكون المثلث المباشر AFG قائم في A ومتساوي الساقين.

تمرين 3 (08 نقاط)

I- نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+4x+1-\dfrac{6}{x}+3\ln x$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$.

2) احسب $g'(x)$، ثم استنتج أنّ الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

3) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{3\ln x}{x+2}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$، فسّر النتيجة هندسيا ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$. استنتج وجود مستقيما مقاربا مائلا (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2) أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+2)^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) h الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=-1-\dfrac{2}{x}+\ln x$.

أ) بيّن أنّ الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $4{,}3<\alpha<4{,}4$.

ج) بيّن أنّ المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا (Δ') موازيا للمستقيم (Δ) معادلته $y=-x+\dfrac{3}{\alpha}$.

4) ارسم المنحني $(\mathscr{C})$، المستقيم (Δ) والمماس (Δ'). نأخذ $f(\alpha)=-3{,}6$.

5) استعمل $(\mathscr{C})$ لتعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $mx+2m-\ln x=0$ حلين متمايزين.

6) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بحدها الأول u_0، حيث $u_0=-4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(-u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $-4\le u_n<-1$.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.

بالتّوفيق

تصحيح الفرض للفصل الثاني 2021م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{5}{84}$

$P(B) = 1 - \frac{C_5^3}{C_9^3} = 1 - \frac{10}{84} = \frac{37}{42}$

$P(A\cap B) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$

$P(A\cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\cap \bar{B})$

(3حمراء) $P(A\cap \bar{B}) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$ $\left(P(A) - P(A\cap B)\right)$

$P(A\cup \bar{B}) = \frac{5}{84} + \frac{10}{84} - \frac{1}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$

2) أ) $X = \{-3\,;1\,;x\}$

$P(X=-3) = \frac{C_2^1\times C_7^2 + C_2^2\times C_7^1}{C_9^3} = \frac{49}{84} = \frac{7}{12}$

$P(X=1) = \frac{C_3^1\times C_4^2 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{19}{84}$

$P(X=x) = \frac{C_4^3 + C_4^1\times C_3^2}{C_9^3} = \frac{16}{84} = \frac{4}{21}$

x_i	-3	1	x
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{19}{84}$	$\frac{4}{21}$

ب) $E(X) = -3\times\frac{7}{12} + \frac{19}{84} + \frac{4x}{21}$

$E(X) = \frac{4x-32}{21}$

مربحة يعني $E(X)>0$
$x>8$
ومنه: $x=9$

3) $1\times 2\times 2$ أو $-1\times -2\times 2$

$3\left(A_2^1\times A_2^2\right) + 6\left(A_2^1\times A_1^1\times A_2^1\right) = 36$

تمرين 2:

I لنحل المعادلة: $z^2 = 3-4i$.

أي $(x+iy)^2 = 3-4i$: $x^2-y^2+2xyi = 3-4i$

$$\begin{cases} x^2-y^2 = 3 & ① \\ x^2+y^2 = 5 & ② \\ 2xy = -4 & ③ \end{cases}$$

① + ② نجد $x=2$ أو $x=-2$

نعوض في ③ : $x=2$ لـ $y=-1$ ، $x=-2$ لـ $y=1$

ومنه الجذرين التربيعيين هما: $2-i$ و $-2+i$

$(z-1-i)^2 = 3-4i$ يعني: $z-1-i = 2-i$

أو: $z-1-i = -2+i$ ومنه:

$z_1 = -1+2i$ و $z_2 = 3$

II 1) $|z_B - z_A| = |4-2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|z_C - z_B| = |2\sqrt{5}\,i| = 2\sqrt{5}$

ومنه المثلث ABC متساوي الساقين.

2) $z_A + z_B = 2+2i = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_C - z_B = 2\sqrt{5}\,i = 2\sqrt{5}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\left(\frac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1442} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1442} = e^{i\frac{1442\pi}{4}} = e^{i(360\pi+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$\left(\frac{z_C-z_B}{2\sqrt{5}}\right)^{2021} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2021} = e^{i\frac{2021\pi}{2}} = e^{i(1010\pi+\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

ومنه: $\left(\frac{z_A+z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1442} - \left(\frac{z_C-z_B}{2\sqrt{5}}\right)^{2021} = 0$

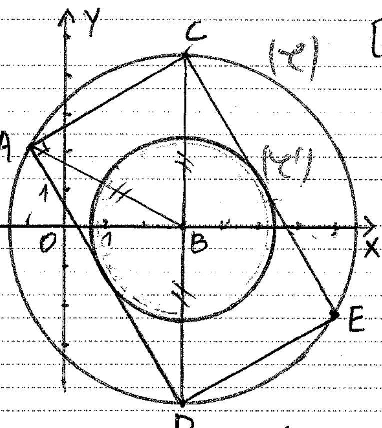
3) أ) $Re(z_C) = Re(z_B) = 3$ ومنه $Re(z_D) = 3$

$AB = \sqrt{20}$ و $BD = |z_D - z_B| = |\alpha i| = \sqrt{\alpha^2}$

$AB^2 = BD^2$ يعني $\alpha^2 = 20$ أي $\alpha = \pm\sqrt{20}$

بما أن $z_D \neq z_C$ إذن $\alpha \neq 2\sqrt{5}$ ومنه $z_D = 3-2\sqrt{5}i$

ب) المتوسط المتعلق بالوتر $[CD]$ طوله نصف CD
أي: $AB = BC = BD$ ومنه ACD قائم في A.
الدائرة $(\mathcal{C})$ مركزها B و نصف قطرها $AB = 2\sqrt{5}$



4) أ) B منتصف $[AE]$

$z_B = \frac{z_A+z_E}{2}$

ومنه: $z_E = 7-2i$

$[AE]$ و $[CD]$ متناصفان
و $[AC] \perp [AD]$
ومنه الرباعي $ADEC$ مستطيل.

ب) B مركز ثقل المستطيل $ADEC$ ومنه:

$\|\vec{MA}+\vec{MC}+\vec{MD}+\vec{ME}\| = \|\vec{MB}+\vec{BA}+\vec{MB}+\vec{BC}+\vec{MB}+\vec{BD}+\vec{MB}+\vec{BE}\|$

$= \|4\vec{MB} + \underbrace{\vec{BA}+\vec{BC}+\vec{BD}+\vec{BE}}_{\vec{0}}\| = 4MB$

$\|\vec{MA}-\vec{MC}+\vec{MD}-\vec{ME}\| = \|\vec{CM}+\vec{MA}+\vec{EM}+\vec{MD}\|$

$= \|\vec{CA}+\vec{ED}\| = \|2\vec{CA}\|$

لدينا: $4MB = 2AC$ أي $MB = \frac{AC}{2}$

ومنه: (Γ) هي الدائرة التي مركزها B و قطرها AC

5) ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$

G صورة F بواسطة هذا الدوران:

يعني: $(z_G - z_A) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_F - z_A)$

$z_F + 2 - z_A = i(z_F - z_A)$

ومنه: $z_F = \frac{z_A - i z_A - 2}{1-i} = -2+i$

تمرين 3:

I-1) $\lim_{x\to+\infty}(x^2+4x+1-\frac{6}{x}+3\ln x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0}(x^2+4x+1-\frac{6}{x}+3\ln x) = -\infty$

2) $g'(x) = \left(2x+4+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x}\right) > 0$ لأن $x>0$

ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

3) $g(1)=0$ ومنه إشارة $g(x)$: $0 \quad - \quad 1 \quad +$

II-1) أ) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$

(C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{3\ln x}{x(1+\frac{2}{x})}\right) = -\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

ب) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x(1+\frac{2}{x})} = 0$

ومنه (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا: $y=-x$.

ج) إشارة $(f(x)+x)$ من إشارة $\ln x$ ومنه:

$x>1$: (C) يقع أعلى (Δ).

$0<x<1$: (C) يقع أسفل (Δ).

(C) يقطع (Δ) عند: $A(1;-1)$.

2) أ) $f'(x) = -1+3\left[\frac{\frac{x+2}{x}-\ln x}{(x+2)^2}\right] = -1+\frac{3+\frac{6}{x}-3\ln x}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{-x^2-4x-1+\frac{6}{x}-3\ln x}{(x+2)^2} = \frac{-g(x)}{(x+2)^2}$

ب) $x>1$: f متناقصة تماما ، $0<x<1$: f متزايدة تماما

جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) $h'(x) = \frac{2}{x^2}+\frac{1}{x} = \frac{x+2}{x^2} > 0$

ومنه h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب) h مستمرة و متزايدة تماما على $]4,3;4,4[$

$h(4,3) \simeq -0,0065 < 0$ و $h(4,4) \simeq 0,027 > 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة

$h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $4,3<\alpha<4,4$

ج) $f'(x_0) = -1$ أي $\frac{-g(x_0)}{(x_0+2)^2} = -1$

$-3-\frac{6}{x_0}+3\ln x_0 = 0$ أي $3\left(-1-\frac{2}{x_0}+\ln x_0\right)=0$

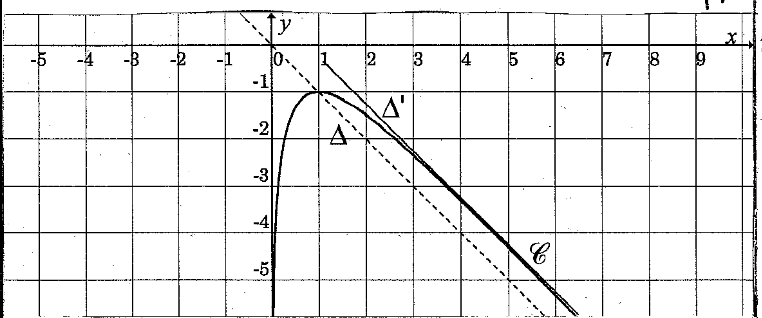
$3h(x_0)=0$ ومنه: $x_0=\alpha$

$y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) = -1(x-\alpha)-\alpha+\frac{3\ln\alpha}{\alpha+2}$

لدينا $h(\alpha)=0$ ومنه: $\ln\alpha = 1+\frac{2}{\alpha}$: $\ln\alpha = \frac{\alpha+2}{\alpha}$

$y = -x+\alpha-\alpha+3\left(\frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+2)}\right) = -x+\frac{3}{\alpha}$

4)



5) $m = \frac{\ln x}{x+2}$ ومنه: $3m - x = \frac{3\ln x}{x+2} - x$

تقاطع (C) مع المستقيمات: $y=-x+3m$ (ميلها -1)

حلين متمايزين: $0<3m<\frac{3}{\alpha}$

ومنه: $0<m<\frac{1}{\alpha}$

6) أ) $n=0$: $-4 \le u_0 < -1$. محققة.

نفرض أن $-4\le u_n<-1$ ونبرهن أن $-4\le u_{n+1}<-1$

$1<-u_n\le 4$ ومنه: $f(4)\le f(-u_n)<f(1)$

لأن f متناقصة تماما لما $1<x\le 4$ ،

ومنه $-4\le -4+\ln 2\le u_{n+1}<-1$ (محققة)

ومنه: $-4\le u_n<-1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$.

ب) $u_{n+1}-u_n = f(-u_n)-u_n = \frac{3\ln(-u_n)}{-u_n+2}$

$1<-u_n\le 4$ ومنه $0<\ln(-u_n)\le\ln 4$

و كذلك: $3<-u_n+2\le 6$ ،

ومنه: $u_{n+1}-u_n>0$ ، إذن (u_n) متزايدة تماما

ج) (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$ أي $f(-l)=l$ ومنه: $3\ln(-l)=0$

في الأخير: $l=-1$

"عبد المطلب"