المستوى:الثالثة ثانوي تسيير و اقتصاد ديسمبر 2020

الفرض الأول للثلاثي الأول في الرياضيات المدة: 1 سا

التمرين الأول:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل n طبيعي، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1)احسب u_1، u_2، u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2)نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ: من أجل كل n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3)نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

أ) احسب S_n بدلالة n.

ب) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

بالتوفيق

الأستاذ زوبير عبد الرحيم

التصحيح النموذجي

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$.

1) حساب u_1، u_2، u_3:

- $u_1 = 3u_0 - 2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$
- $u_2 = 3u_1 - 2 = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$
- $u_3 = 3u_2 - 2 = 3(10) - 2 = 30 - 2 = 28$

تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n):

نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$، المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2) لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: من أجل كل n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول:

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n.

لدينا: $v_n = u_{n+1} - u_n$

ومنه: $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = (3u_{n+1} - 2) - (3u_n - 2) = 3u_{n+1} - 2 - 3u_n + 2$

وعليه: $v_{n+1} = 3(u_{n+1} - u_n) = 3v_n$

أي: $\boxed{v_{n+1} = 3v_n}$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = 3}$ وحدها الأول $\boxed{v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2}$.

ب) تعيين v_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $\boxed{v_n = 2(3)^n}$.

استنتاج أن المتتالية (u_n) متزايدة:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = v_n = 2(3)^n > 0$، إذن: (u_n) متزايدة تماما.

3) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.

ا) حساب S_n بدلالة n:

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = v_0\left(\frac{1-(3)^{(n-1)-0+1}}{1-3}\right) = 2\left(\frac{1-3^n}{-2}\right) = -(1-3^n)$

ومنه: $S_n = 3^n - 1$

ب) تبيان أن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = S_n + u_0$:

ط01: يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

ط02: لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$

ومنه: $S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n$

إذن: $\boxed{u_n = S_n + u_0}$.

استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

لدينا: $u_n = S_n + u_0 = (3^n - 1) + 2 = 3^n + 1$.