الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبي — الثانويات : **هواري بومدين (ع –احسانية)**

الشعبة : **علوم تجريبية** — **محجوب عبد الرحمان (قالمة)**

دورة : **ماي 2021** — **عيسى زريمش (حمام دباغ)**

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : **03 ساعات و نصف**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 9 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث كريات تحمل الرقم 1 وأربعة كريات تحمل الرقم 2 .

I. نسحب عشوائيا على الترتيب و بدون إرجاع كريتين من الصندوق و نشكل برقميهما عددا N . (الرقم المسحوب الأول هو رقم الآحاد)

1 . أحسب احتمال أن يكون N عددا زوجيا .

2 . أحسب احتمال أن يكون رقم آحاد العدد N أصغر تماما من رقم عشراته .

II. 1 . نسحب هذه المرة عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من صندوق ، و نعرف الحادثتين الآتيتين :

A : " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة "

B : " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جداؤها معدوم "

أ . أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب .

ب . بين أن $P(A\cap B)=\dfrac{7}{12}$.

2 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 0 .

عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. 1 . أ . حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$ ، نرمز إلى حلي هذه المعادلة بـ z و z' (حيث $\operatorname{Im}(z')<0$)

ب . أكتب z و z' على الشكل الأسي ثم تحقق أن $\left(\dfrac{z}{z'}\right)^{2021}=i$.

جـ . عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z}{z'}\right)^{n}$ حقيقي سالب .

2 . استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة : $\left(-i\,\overline{z}+3+3i\right)^2-2\left(\overline{i\,z}+3+3i\right)+2=0$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z .

II. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{u};\vec{v}\right)$ ،نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=3$ و $z_D=2(1-i)$

1 . اكتب على الشكل الجبري العدد $\dfrac{z_A-3}{z_D-3}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ADC .

2 . نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M(z')$ حيث : $z'=-iz+3+3i$

عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة ، ثم استنتج صورة D بالتحويل T .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة بـ : $u_0=-1$ و $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

1. لتكن المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

أ. بيّن أن $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم أكتب v_n بدلالة n .

ب. أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n=v_0+v_1+........+v_{n-1}$ و $S'_n={v_0}^2+{v_1}^2+......+v_{n-1}^2$

2. نعرف المتتالية $\left(w_n\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

بيّن أن $\left(w_n\right)$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم أكتب w_n بدلالة n .

3. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=u_0+u_1+.........+u_n$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$ ، نسمي $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f

و (Γ) المنحنى ذو معادلة $y=\ln x$ في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 . أحسب النهايات للدالة f عند 1 وعند $+\infty$.

2 . بين أنه من أجل كل عددا حقيقيا x حيث $x\succ 1$ لدينا : $f'(x)=\frac{1+(\ln x)^2}{x(\ln x)^2}$.

3 . أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .

4 . عين $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$ ، فسر بيانيا هذه النهاية ثم حدد الوضعية النسبية للمنحنى $\left(C_f\right)$ و (Γ) .

5 . عين نقطة تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ مع محور الفواصل .

II. ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال $]1;+\infty[$ و (T) المماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .

1. برهن أن المماس (T) يمر بالمبدأ O إذا وفقط إذا كان : $f(x_0)-x_0\,f'(x_0)=0$

2. نعرف الدالة g على $]1;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-x\,f'(x)$

برهن أنه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ لهما نفس الحلول .

3 . لتكن الدالة u ذات المتغير الحقيقي t المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $u(t)=t^3-t^2-t-1$

أ . أدرس تغيرات الدالة u وأنشئ جدول تغيراتها

ب . اثبت أن المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ، تحقق $1.83\prec\alpha\prec 1.84$

جـ . استنتج أن معادلة المماس (T) هي : $y=\left(\frac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\,\alpha^2}\right)x$.

III. 1 . أنشئ المماس (T) والمنحنيين $\left(C_f\right)$ و (Γ) ، يعطى مايلي $\alpha\approx 1.8$ و $e^{\alpha}\approx 6.26$

2 . ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m\,x$ التي تنتمي إلى المجال $]1;10[$.

3 . نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $h(x)=\frac{1}{\ln|x|}+\ln\left|\frac{1}{x}\right|$ و $\left(C_h\right)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ . بين أن الدالة h زوجية ب . بين انه يمكن انشاء $\left(C_h\right)$ اعتمادا على $\left(C_f\right)$ ثم انشئ $\left(C_h\right)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n}$

1. أ . برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب. بين أن (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

2. أ. برهن أنّ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

جـ. استنتج مرة ثانية : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$

أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $n < S_n \leq 2\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + n$

ب. استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$

4. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب. اكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب مرة أخرى : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

جـ. احسب بدلالة n المجموع L_n حيث $L_n = \dfrac{v_0 - 1}{u_0} + \dfrac{v_1 - 1}{u_1} + \dfrac{v_2 - 1}{u_2} + ... + \dfrac{v_n - 1}{u_n}$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I. نعتبر كثير الحدود المعرف بـ: $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

أحسب $P(4)$ ، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

II. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ، وحدة الرسم $2cm$

1. علم النقط : $C; B; A$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 4$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

2. اكتب على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

3. لتكن F نقطة ، لاحقتها $z_F = -\sqrt{3} - i$ ، أحسب $\dfrac{z_C}{z_F}$ واستنتج أن المستقيمان $(OC); (OF)$ متعامدان .

4. عين z_H لاحقة النقطة H بحيث يكون الرباعي $COFH$ مربعا.

5. عين (Γ)مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z| = \left|\bar{z} - 1 - i\sqrt{3}\right|$

6. عين (Γ')مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $\arg\left(\dfrac{z-4}{z-1-i\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \pi k .....(k \in Z)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

وحدة انتاجية يسيرها 20 عاملا منهم 8 نساء و12 رجلا ، من بينهم العامل محمد والعاملة فاطمة

I. يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من 3 عمال لهم نفس المهام

1. ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها

2. أحسب احتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على لجنة مختلطة "

B : " الحصول على لجنة لا تحتوي على محمد وفاطمة معا "

C : " العامل محمد موجود باللجنة "

3. أحسب : $P(A\cup C);P(A\cap C)$

4. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكلة ، عدد الرجال الموجودين فيها.

أ. عين قيم المتغير العشوائي X، ثم عرف قانون احتماله.

ب. أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

جـ. احسب $P(X^2-X>0)$

II. في هذه المرة يريد العمال تشكيل لجنة تتكون من رئيس ، نائب ، وأمين عام

احسب احتمال الحدث E : " الحصول على لجنة تضم رجلا واحدا بالضبط "

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على IR بـ : $g(x)=-x\,e^{-2x}+e^{-2}$.

1. أحسب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$, $\lim_{x\to+\infty}g(x)$, ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

2 . أ . أحسب $g(1)$ ، ثم بين أن $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α حيث : $0.2\prec\alpha\prec0.3$.

ب . عين حسب قيم x إشارة $g(x)$ على IR ،ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على IR.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+(4\,e^{-2})\,x$

(C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1 . أ . أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$،ثم بين أنه من أجل كل x من IR : $f'(x)=4\,g(-x)$.

ب . استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ .عين دون حساب : $\lim_{h\to0}\dfrac{f(-\alpha+h)-f(-\alpha)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2 . أ . بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=(4\,e^{-2})x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)بجوار $(-\infty)$.

ب . ادرس وضعية المنحنى (C_f)بالنسبة للمستقيم (D).

جـ . بين أن المنحنى (C_f)يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثييها .

د . أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التى فاصلتها $x_0=0$.

3 . أرسم (T) ، (D) و (C_f) يعطى $f(-\alpha)=-1.1$ ، $f(-1)=-0.9$ ونقبل أن $f(\beta)=0$ حيث $0.4\prec\beta\prec0.5$.

4 . عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : $(2x-1)e^{2x}=\ln m$ حلين مختلفين .

III. تعتبر الدالة h المعرفة على IRبـ : $h(x)=f(|x-1|)$

1 . بين أن من أجل كل x من IR : $h(2-x)=h(x)$ ،ماذا تستنتج ؟

2 . أكتب h دون رمز القيمة المطلقة ، ثم استنتج كيفية إنشاء (C_h)إنطلاقا من (C_f)و أنشئه في نفس المعلم.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الثانويات : هواري بومدين محجوب عبد الرحمان عيسى زريمش	تصحيح اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات الموضوع الأول	2020 - 2021 الشعبة : ع.تجريبية

التمرين الأول:

لدينا كريتان تحملان الرقم 0 و ثلاث كريات تحمل الرقم 1 وأربعة كريات تحمل الرقم 2 .

I. نسحب عشوائيا على الترتيب و بدون إرجاع كريتين من الصندوق و نشكل برقميهما عددا N .

عدد الإمكانيات الكلية هو: $A_9^2 = 9\times 8 = 72$

1 . حساب احتمال C " يكون N عددا زوجيا " :

لدينا 6 إمكانيات لاختيار رقم الآحاد و 8 إمكانيات لاختيار رقم العشرات ومنه $P(C)=\dfrac{6\times 8}{A_9^2}=\dfrac{48}{72}=\dfrac{2}{3}$

2 . حساب احتمال D " يكون رقم آحاد العدد N أصغر تماما من رقم عشراته " :

يمكن أن يكون رقم الآحاد 0 و رقم العشرات 1 أو 2 و
يمكن أن يكون رقم الآحاد 1 و رقم العشرات 2 ومنه

$$P(D)=\frac{2\times 7+3\times 4}{A_9^2}=\frac{26}{72}=\frac{13}{36}$$

II. 1 . نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من صندوق:

عدد الإمكانيات الكلية هو: $C_9^3=\dfrac{9!}{3!\times 6!}=\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2}=84$

أ . حساب $P(A)$ و $P(B)$:

* الحدث العكسي للحدث A هو
$\bar{A}$: " الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم "

إذن $P(\bar{A})=\dfrac{C_3^3+C_4^3}{C_9^3}=\dfrac{1+4}{84}=\dfrac{5}{84}$

ومنه $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\dfrac{5}{84}=\dfrac{79}{84}$

* يكون جداء الأرقام معدوما إذا و فقط إذا كانت إحدى الكريات على الأقل تحمل الرقم 0 ومنه

$$P(B)=\frac{C_2^1\times C_7^2+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{2\times 21+1\times 7}{84}=\frac{49}{84}=\frac{7}{12}$$

ب . تبيان أن $P(A\cap B)=\dfrac{7}{12}$:

لدينا $B\subset A$ ومنه $(A\cap B)\subset B$ إذن

$$P(A\cap B)=P(B)=\frac{7}{12}$$

2 . لدينا X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 0 .

قيم المتغير العشوائي X هي $X\in\{0;1;2\}$

تعين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

$$P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_9^3}=\frac{35}{84}=\frac{5}{12}$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1\times C_7^2}{C_9^3}=\frac{2\times 21}{84}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{1\times 7}{84}=\frac{1}{12}$$

ومنه جدول توزيع الاحتمال :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=\sum_{i=0}^{2}x_ip_i=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$$

التمرين الثاني:

I) 1 / أ* حل المعادلة : $z^2-2z+2=0$ في $\mathbb{C}$:

$\Delta=-4=(2i)^2$ ، $z=1+i$ و $z'=1-i$.

ب * كتابة z و z' على الشكل الأسي

$z=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z'=1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

التحقق أن $\left(\dfrac{z}{z'}\right)^{2021}=i$:

$$\left(\frac{z}{z'}\right)^{2021}=\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}\right)^{2021}=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{2021}$$

$$=e^{i\frac{\pi}{2}\times 2021}=e^{i\left(1010\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

جـ * تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z}{z'}\right)^n$ حقيقي سالب :

لدينا $\left(\dfrac{z}{z'}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}\right)^n=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}\right]^n=e^{in\frac{\pi}{2}}$

ومنه $\left(\frac{z}{z'}\right)^n$ حقيقي سالب يكافئ

$n\frac{\pi}{2}=\pi+2\pi k \quad /k\in\mathbb{N}$ ومنه $n=4k+2 \quad /k\in\mathbb{N}$

2 / استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة :

$$\left(-i\bar{z}+3+3i\right)^2-2\left(\overline{iz}+3+3i\right)+2=0......(2)$$

(2) تكافئ $\left(-i\bar{z}+3+3i\right)^2-2\left(-i\bar{z}+3+3i\right)+2=0$

بوضع $\alpha=-i\bar{z}+3+3i$ المعادلة (2) تصبح

$$\alpha^2-2\alpha+2=0$$

ومنه $\alpha=1-i$ أو $\alpha=1+i$

ومنه : $\begin{cases}-i\bar{z}+3+3i=1+i\\ \text{أو}\\ -i\bar{z}+3+3i=1-i\end{cases}$ نجد : $\begin{cases}z=2+2i\\ \text{أو}\\ z=4+2i\end{cases}$

وهي حلول المعادلة (2).

II) $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=3$ و $z_D=2(1-i)$

1 / كتابة العدد $\frac{z_A-3}{z_D-3}$ على الشكل الجبري

$$\frac{z_A-3}{z_D-3}=\frac{-2+i}{-1-2i}=\frac{-5i}{5}=-i$$

استنتاج طبيعة المثلث ADC .

لدينا $\left|\frac{z_A-3}{z_D-3}\right|=|-i|=1$ ومنه $CD=CA$

و $\arg\left(\frac{z_A-3}{z_D-3}\right)=\arg(-i)=\frac{-\pi}{2}+2\pi k \quad /k\in\mathbb{Z}$

ومنه $\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{-\pi}{2}+2\pi k \quad /k\in\mathbb{Z}$

ومنه المثلث ADC قائم في C و متساوي الساقين .

2 / تعين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة

عبارة T من الشكل $z'=az+b$ حيث $a\in\mathbb{C}$ و $a\notin\mathbb{R}$

و $|a|=|-i|=1$ ومنه T دوران مركزه النقطة الصامدة C

و زاويته $\theta=\arg(a)=\arg(-i)=\frac{-\pi}{2}+2\pi k \quad /k\in\mathbb{Z}$

استنتاج صورة D بالتحويل T .

$z'_D=-iz_D+3+3i=1+i=z_A$ ومنه $T(D)=A$

التمرين الثالث :

$u_0=-1$ و $u_1=\frac{1}{2}$ و $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$ ، $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

1 / أ *تبيان أن (v_n) متتالية هندسية

$$v_{n+1}=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=1$

كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب * أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n :

* $S_n=v_0+v_1+........+v_{n-1}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

* $S'_n={v_0}^2+{v_1}^2+........+v_{n-1}^2$

$$={v_0}^2\frac{1-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)$$

2 / من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=\frac{u_n}{v_n}$

*** تبيان أن (w_n) متتالية حسابية :**

لدينا $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$ ومنه $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$

$w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=\frac{v_n+\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}=2+\frac{u_n}{v_n}=2+w_n$ ومنه

(w_n) متتالية حسابية أساسها $r=2$ وحدها الأول $w_0=-1$

كتابة w_n بدلالة n . $w_n=w_0+nr=-1+2n$

3 / تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$

لدينا $w_n=\frac{u_n}{v_n}$ ومنه $u_n=v_n\cdot w_n=(-1+2n)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2n-1}{2^n}$

4 / لدينا $T_n=u_0+u_1+.....+u_n$ ، نبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$ **:**

نسمي $p(n)$ هذه الخاصية .

① نبرهن صحة $p(0)$:

لدينا $T_0=u_0=-1$ و $2-\frac{2\times0+3}{2^0}=-1$

ومنه $T_0=2-\frac{2\times0+3}{2^0}$ إذن $p(0)$ صحيحة .

② نفرض صحة الخاصية $p(n)$ و نبرهن صحة $p(n+1)$:

أي نبرهن: $T_{n+1}=2-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$ علما أن: $T_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$

لدينا $T_{n+1}=u_0+u_1+.....+u_n+u_{n+1}=2-\frac{2n+3}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$

ومنه $T_{n+1}=2-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$ إذن الخاصية $p(n+1)$

ومنه و حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن :

من أجل كل عدد طبيعي n: $T_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$

التمرين الرابع:

I) f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 1^{>}} f(x)=-\infty$

2. f قابلة للإشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$$

3. من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $f'(x)\succ0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4. $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\ln x}=0^-$

التفسير : المنحنيين (C_f) و (Γ) متقاربين بجوار $+\infty$

*وضعية المنحنيين (C_f) و (Γ): $f(x)-\ln x=-\frac{1}{\ln x}\prec 0$

ومنه (C_f) فوق (Γ) على $]1;+\infty[$

5. تعيين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x)=0$ على المجال $]1;+\infty[$:

$\ln x-\frac{1}{\ln x}=0$ يكافيء: $\frac{(\ln x)^2-1}{\ln x}=0$

يكافيء : $(\ln x)^2-1=0$ و $\ln x\neq0$ ومنه

$x=e$ أو $x=\frac{1}{e}\notin]1;+\infty[$ مرفوضة

ومنه : $(C_f)\cap(xx')=\{A(e;0)\}$

II) (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0

1. نبرهن أن المماس (T) يمر بالمبدأ O إذا وفقط إذا كان : $f(x_0)-x_0 f'(x_0)=0$

معادلة المماس هي : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$O\in(T)$ تكافئ $0=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

أي أن $f(x_0)-x_0f'(x_0)=0$

2.أ. برهان أنه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلتين $g(x)=0$ و $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ لهما نفس الحلول :

لدينا $g(x)=0$ يكافئ: $\ln x-\frac{1}{\ln x}-x\frac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}=0$

أي أن $\frac{(\ln x)^3-\ln x-(\ln x)^2-1}{(\ln x)^2}=0$

بما أن : من أجل $x\succ1$ لدينا $\ln x\succ0$ فإن :

$(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$

ب. تغيرات الدالة u : $\lim_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0}u(x)=-1$

$u'(t)=3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)$

ومنه : u متناقصة تماما على $[0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيراتها :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-1 ↘	-2 ↗	$+\infty$

ب . اثبات أن المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$:

الدالة u سالبة تماما على المجال $[0;1]$، ومنه المعادلة $u(t)=0$ لا تقبل حلول في هذا المجال

* على المجال $[1;+\infty[$ الدالة u مستمرة ورتيبة تماما و $\lim_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ و $u(1)=-2$ مختلفين في الإشارة

ومنه: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(t)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $[1;+\infty[$ و هو وحيد على المجال $]0;+\infty[$.

ولدينا $u(1.83)=-0.05$ و $u(1.84)=0.003$

بما أن: $u(1.84)\times u(1.83)\prec0$ فإن: $1.83\prec\alpha\prec1.84$

جـ. لدينا x_0 هو حل المعادلة $g(x)=0$

بوضع $t=\ln x$ نجد المعادلة $g(x)=0$ تكافئ $u(t)=0$

بما أن حل المعادلة $u(t)=0$ هو $t=\alpha$ فإن: حل المعادلة $g(x)=0$ هو $x_0=e^{\alpha}$ ومنه معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) المار من المبدأ هي : $y=\left(\frac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}\right)x$

III) 1. إنشاء $(C_f);(T)$ و (Γ) : الإنشاء أسفل الجدول

2. المناقشة البيانية: حلول المعادلة $f(x)=mx$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=mx$ نحل المعادلة على المجال $]1;10[$. المستقيم الذي يشمل المبدأ والنقطة $(10;f(10))$ ميله هو $m=\frac{f(10)}{10}$

ولدينا المماس (T) يشمل المبدأ ميله $m=\left(\frac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}\right)$

قيم العدد الحقيقي m	عددحلول المعادلة $f(x)=mx$ على $]1;10[$
$m\in\left]-\infty;\frac{f(10)}{10}\right[$	تقبل حلا وحيدا
$m\in\left[\frac{f(10)}{10};\frac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}\right[$	تقبل حلين متمايزين
$m=\frac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2}$	تقبل حل مضاعف
$m\in\left]\frac{1+\alpha^2}{e^{\alpha}\alpha^2};+\infty\right[$	لاتقبل حلول

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بالعلاقة : $h(x)=\frac{1}{\ln|x|}+\ln\left|\frac{1}{x}\right|$

أ. نبين أن الدالة h زوجية:

- المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ متناظر بالنسبة للصفر
- من أجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$h(-x)=\frac{1}{\ln|-x|}+\ln\left|\frac{1}{-x}\right|=\frac{1}{\ln|x|}+\ln\left|\frac{1}{x}\right|=h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية .

ب. نبين انه يمكن انشاء (C_h) اعتمادا على (C_f) :

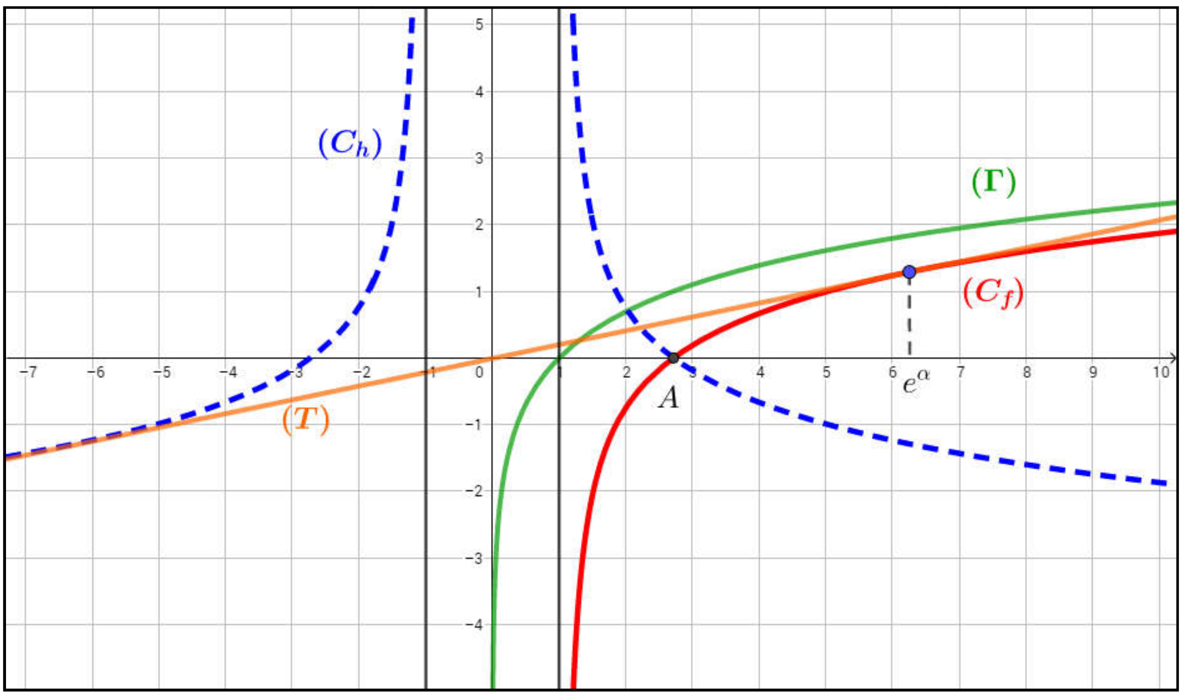
$$h(x)=\frac{1}{\ln|x|}+\ln\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{\ln|x|}-\ln|x|=-f(|x|)$$

$$h(x)=\begin{cases}-f(-x);x\in]-\infty;-1[\\-f(x);x\in]1;+\infty[\end{cases}$$

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفوصل على المجال $]1;+\infty[$.

وعلى المجال $]-\infty;-1[$ (C_h) يناظر جزؤه الأول بالنسبة لمحور الترتيب لأن h زوجية

III) 1/ إنشاء $(C_f);(T)$ و (Γ) و (C_h) :



الثانويات : هواري بومدين محجوب عبد الرحمان عيسى زريمش	تصحيح اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات الموضوع الثاني	2021 - 2020 الشعبة : ع.تجريبية

التمرين الأول:

$u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

1 . أ . إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$:

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n > 1$

① من أجل $n=0$: لدينا $u_0 = 2$ و $2 > 1$ إذن $u_0 > 1$

ومنه $p(0)$ صحيحة

② نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أي $u_n > 1$ ونبرهن على أن $p(n+1)$ صحيحة أي $u_{n+1} > 1$:

لدينا $u_n > 1$ ومنه $u_n + 2u_n > 1 + 2u_n$

وبالتالي $3u_n - 1 > 2u_n$ ومنه $\frac{3u_n - 1}{2u_n} > 1$

إذن $u_{n+1} > 1$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

اذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

ب. تبيان أن (u_n) متقاربة، و حساب نهايتها

ندرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{2u_n}$$

$$= \frac{(-2u_n + 1)(u_n - 1)}{2u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_n > 1$

ومنه $u_n - 1 > 0 ....(1)$

و $-2u_n < -2$ ومنه $-2u_n + 1 < -1$ أي أن

$-2u_n + 1 < 0 ....(2)$

وكذلك $2u_n > 0 ....(3)$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن $\frac{(-2u_n+1)(u_n-1)}{2u_n} < 0$

أي $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن (u_n) متقاربة.

حساب النهاية :

نضع $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ إذن $l = \frac{3l-1}{2l}$ ومنه $2l^2 - 3l + 1 = 0$

إذن $l = 1$ أو $l = \frac{1}{2}$ (مرفوض لأن $u_n > 1$)

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

2 . أ. إثبات أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(u_n - 1)$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2u_n}(u_n - 1)$$

ولدينا $u_n > 1$ ومنه $2u_n > 2$ إذن $\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}$

بضرب الطرفين في العدد الموجب $(u_n - 1)$ نحصل على

$\frac{1}{2u_n}(u_n - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1)$ ومنه $u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب. استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $0 < u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ومنه

$$0 < u_1 - 1 \le \frac{1}{2}(u_0 - 1)$$

$$0 < u_2 - 1 \le \frac{1}{2}(u_1 - 1)$$

$$0 < u_3 - 1 \le \frac{1}{2}(u_2 - 1)$$

....

$$0 < u_n - 1 \le \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$$

بضرب أطراف هذة المتباينات طرفا لطرف نجد :

$$0 < u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1)$$

وبما أن $u_0 - 1 = 1$ فإن $0 < u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(**طريقة 2 :** يمكن إستعمال طريقة البرهان بالتراجع)

جـ. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ مرة ثانية :

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأن $-1<\frac{1}{2}<1$ ومنه

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0$ حسب مبرهنة الحصر أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$

3. لدينا : $S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_{n-1}$

أ. تبيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

لدينا : $n<S_n\le 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+n$

$$S_n=u_0+u_1+u_2+......+u_{n-1}$$
$$=(u_0-1)+(u_1-1)+(u_2-1)+......+(u_{n-1}-1)+n$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ومنه $n<S_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+......+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n$

إذن $n<S_n\le\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}+n$ ومنه

$$n<S_n\le 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+n$$

ب. استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

لدينا $S_n>n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$ ومنه و حسب مبرهنة الحد من الأدنى فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$

ولدينا $n<S_n\le 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+n$ ومنه

$$1<\frac{S_n}{n}\le\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+1$$

و لدينا كذلك $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+1\right)=1$

ومنه وحسب مبرهنة الحصر فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=1$

4. من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$

أ. إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}=\frac{3u_n-1-2u_n}{6u_n-2-2u_n}$$
$$=\frac{u_n-1}{4u_n-2}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n-1}{2u_n-1}=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1}{3}$

ب. كتابة عبارة v_n بدلالة n : $v_n=v_0q^n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$ ومنه $2v_nu_n-v_n=u_n-1$ إذن

$(2v_n-1)u_n=v_n-1$ ومنه $u_n=\dfrac{v_n-1}{2v_n-1}$

إذن
$$u_n=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{2\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-3}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n-3}$$

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-3}{2\left(\frac{1}{2}\right)^n-3}=\frac{-3}{-3}=1$$ (لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$)

جـ. حساب بدلالة n المجموع L_n حيث :

$$L_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+........+\frac{v_n-1}{u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا $u_n=\dfrac{v_n-1}{2v_n-1}$ ومنه

إذن $\dfrac{v_n-1}{u_n}=2v_n-1$

$$L_n=(2v_0-1)+(2v_1-1)+(2v_2-1)+........+(2v_n-1)$$
$$=2(v_0+v_1+......v_n)-(1+1+1......+1)$$
$$=2v_0\frac{1-q^n}{1-q}-(n+1)=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-n-1$$
$$=-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}-n$$

التمرين الثاني :

لدينا : $P(z)=z^3-6z^2+12z-16$

I. حساب $P(4)$ و حل المعادلة $P(z)=0$ في $\mathbb{C}$

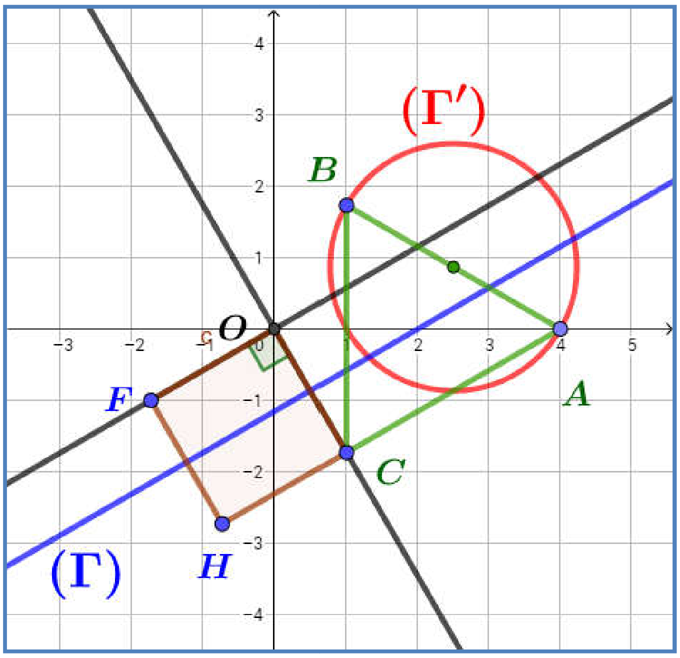
$P(4)=0$

$P(z)=0$ تكافئ $(z-4)(z^2-2z+4)=0$

ومنه $S=\left\{4;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}$

II. لدينا $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $z_C=1-i\sqrt{3}$

1. تعليم النقط و إنشاء الشكل :



2. كتابة على الشكل الأسي العدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$:

لدينا $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{4-1+i\sqrt{3}}=\frac{2i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

استنتاج طبيعة المثلث ABC

$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ إذن $CB=CA$

و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$ أي أن

$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

3. حساب $\frac{z_C}{z_F}$:

$\frac{z_C}{z_F}=\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}=i$ إذن $(\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OC})=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$

ومنه المستقيمان (OF) و (OC) متعامدان

4. تعيين z_H لاحقة النقطة H بحيث يكون الرباعي $COFH$ مربعا :

لدينا $(OC)\perp(OF)$ و $OC=OF=1$

إذن يكفي أن نثبت أن الرباعي $COFH$ متوازي أضلاع

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{FH}$ تكافئ $z_C=z_H-z_F$ ومنه

$z_H=z_F+z_C=(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i$

5. تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق: $(I)......|z|=\left|\bar{z}-1-i\sqrt{3}\right|$

(I) تكافئ $|z|=\left|\bar{z}-\overline{(1-i\sqrt{3})}\right|$ أي أن $|z|=\left|\overline{z-(1-i\sqrt{3})}\right|$

ومنه $|z|=\left|z-(1-i\sqrt{3})\right|$ إذن $OM=CM$

ومنه (Γ) هي محور القطعة المستقيمة $[OC]$

6. تعيين (Γ') مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق: $(II)...\arg\left(\frac{z-4}{z-1-i\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}+\pi k/(k\in\mathbb{Z})$

(II) تكافئ $(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}+\pi k\quad/(k\in\mathbb{Z})$ ومنه :

(Γ') هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

التمرين الثالث:

لدينا 20 عاملا منهم 8 نساء و12 رجلا .

I. يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من 3عمال لهم نفس المهام

1 . عدد اللجان التي يمكن تكوينها هو :

$$C_{20}^{3}=\frac{20!}{3!\times17!}=\frac{20\times19\times18}{3\times2}=1140$$

2 . حساب احتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على لجنة مختلطة "

$$P(A)=\frac{C_8^1\times C_{12}^2+C_8^2\times C_{12}^1}{C_{20}^3}$$

$$=\frac{8\times66+28\times12}{1140}=\frac{864}{1140}=\frac{72}{95}$$

طريقة 2 :

$$P(A)=1-\frac{C_8^3+C_{12}^3}{C_{20}^3}=1-\frac{56+220}{1140}=\frac{864}{1140}=\frac{72}{95}$$

B: " الحصول على لجنة لا تحتوي على محمد وفاطمة معا "

$$P(B)=\frac{C_1^1\times C_{18}^2+C_1^1\times C_{18}^2+C_{18}^3}{C_{20}^3}$$

$$=\frac{153+153\times816}{1140}=\frac{1122}{1140}=\frac{187}{190}$$

طريقة 2 :

$$P(B)=1-\frac{C_2^2\times C_{18}^1}{C_{20}^3}=1-\frac{18}{1140}=\frac{1122}{1140}=\frac{187}{190}$$

C: " العامل محمد موجود باللجنة "

$$P(C)=\frac{C_1^1\times C_{19}^2}{C_{20}^3}=\frac{171}{1140}=\frac{3}{20}$$

3. حساب : $P(A\cup C);P(A\cap C)$

$A\cap C$ هي الحدث : " الحصول على لجنة مختلطة وفيها العامل محمد "

$$P(A\cap C)=\frac{C_1^1\times C_8^1\times C_{11}^1+C_1^1\times C_8^2}{C_{20}^3}$$
$$=\frac{1\times 8\times 11+1\times 28}{1140}=\frac{116}{1140}=\frac{29}{285}$$
$$P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C)$$
$$=\frac{864}{1140}+\frac{171}{1140}-\frac{116}{1140}=\frac{919}{1140}$$

4. قيم المتغير العشوائي X هي $X\in\{0;1;2;3\}$

تعين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_{20}^3}=\frac{56}{1140}=\frac{14}{285}$$
$$P(X=1)=\frac{C_{12}^1\times C_8^2}{C_{20}^3}=\frac{12\times 28}{1140}=\frac{336}{1140}=\frac{28}{95}$$
$$P(X=2)=\frac{C_{12}^2\times C_8^1}{C_{20}^3}=\frac{66\times 8}{1140}=\frac{528}{1140}=\frac{44}{95}$$
$$P(X=3)=\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}=\frac{220}{1140}=\frac{11}{57}$$

ومنه جدول توزيع الاحتمال :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{14}{285}$	$\frac{28}{95}$	$\frac{44}{95}$	$\frac{11}{57}$

حساب الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X)=0\times\frac{56}{1140}+1\times\frac{336}{1140}+2\times\frac{528}{1140}+3\times\frac{220}{1140}$$
$$=\frac{2052}{1140}=\frac{9}{5}$$

جـ. حساب $P(X^2-X>0)$

لدينا $X^2-X>0$ تكافئ $X\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

ومنه $X=2$ أو $X=3$ إذن

$$P(X^2-X>0)=P(X=2)+P(X=3)$$
$$=\frac{44}{95}+\frac{11}{57}=\frac{187}{285}$$

II. حساب احتمال الحدث E : " الحصول على لجنة تضم رجلا واحدا بالضبط "

$$P(E)=\frac{A_{12}^1\times A_8^2\times 3}{A_{20}^3}=\frac{12\times 8\times 7\times 3}{20\times 19\times 18}=\frac{2016}{6840}=\frac{28}{95}$$

التمرين الرابع:

I) الدالة g معرفة على IR بـ : $g(x)=-x\,e^{-2x}+e^{-2}$

1. $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{-xe^{-2x}}_{0}+e^{-2}=e^{-2}$$

2. g قابلة للإشتقاق على IR ولدينا :

$$g'(x)=-e^{-2x}+2xe^{-2x}=e^{-2x}(2x-1)$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x-1)$

ومنه من أجل كل x من $]\frac{1}{2};+\infty[$: $g'(x)>0$

و الدالة g متزايدة تماما على $[\frac{1}{2};+\infty[$.

من أجل كل x من $]-\infty;\frac{1}{2}[$: $g'(x)<0$

و الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;\frac{1}{2}]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{-e+2}{2e^2}$	↗	e^{-2}

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-e+2}{2e^2}\simeq-0.05<0$$

2. لدينا $g(1)=-e^{-2}+e^{-2}=0$ ومنه 1 هو حل للمعادلة $g(x)=0$

نبين أن $g(x)=0$ تقبل حل آخر α حيث : $0.2<\alpha<0.3$

g مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;\frac{1}{2}]$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0.2;0.3[$ و $g(0.2)=0.001$ ، $g(0.3)=-0.029$ إذن $g(0.2)\times g(0.3)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;\frac{1}{2}]$ حيث $0.2<\alpha<0.3$

ب.إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

***استنتاج إشارة $g(-x)$:**

$g(-x)=0$ يكافيء $\begin{cases}-x=1\\-x=\alpha\end{cases}$ يكافيء $\begin{cases}x=-1\\x=-\alpha\end{cases}$

$g(-x)\le 0$ يكافيء $\alpha\le -x\le 1$ يكافيء : $-1\le x\le-\alpha$

$g(-x)>0$ يكافيء $-x<\alpha$ أو $-x>1$

يكافىء $x \succ -\alpha$ أو $x \prec -1$ ومنه إشارة $g(-x)$:

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad\quad -\alpha \quad +\infty$
$g(-x)$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

II) f معرفة على IR بـ :

$$f(x)=(2x-1)e^{2x}+\left(4e^{-2}\right)x$$

1 . أ. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

* f قابلة للإشتقاق على IR :

$$f'(x)=2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}+4e^{-2}=4(xe^{2x}+e^{-2})=4g(-x)$$

ب. f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-\alpha;+\infty[$
ومتناقصة تماما على المجال $[-1;-\alpha]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(-\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

جـ. $\lim_{h\to0}\frac{f(-\alpha+h)-f(-\alpha)}{h}=f'(-\alpha)=4\underbrace{g(\alpha)}_{0}=0$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مماس موازي لحامل محور الفواصل عند النقطة $(-\alpha;f(-\alpha))$ معادلته $y=f(-\alpha)$

2.أ. نبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=\left(4e^{-2}\right)x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(4e^{-2}x)\right]=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}=0^-$$

*وضعية المنحنيين (C_f) و (D) :

$f(x)-y=(2x-1)e^{2x}$ ومنه (C_f) فوق (D) على $\left]\frac12;+\infty\right[$ و (C_f) أسفل (D) على $\left]-\infty;\frac12\right[$ و (C_f) يقطع (D) في النقطة $A\left(\frac12;2e^{-2}\right)$

جـ. نبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف :

f' قابلة للإشتقاق على IR :

$$f''(x)=-4g'(-x)=-4e^{2x}(-2x-1)$$

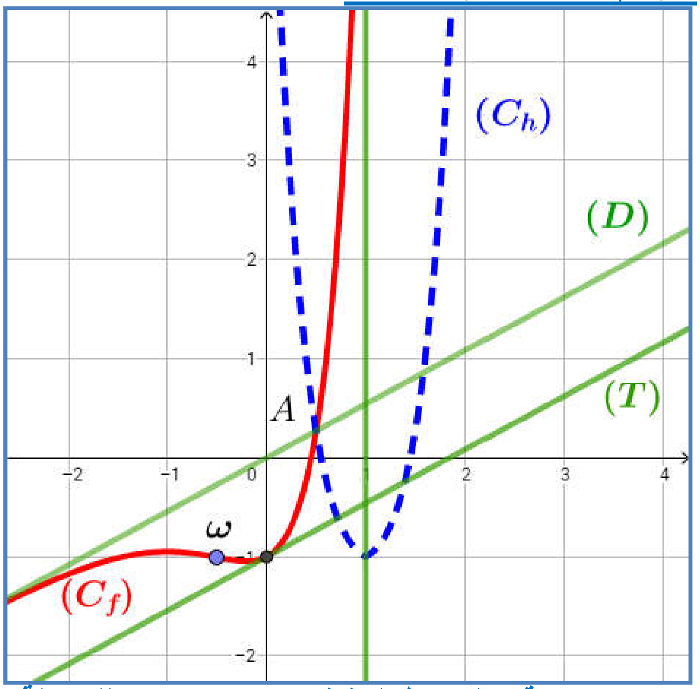
$f''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها عند $x_1=-\frac12$

ومنه (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω إحداثيبها $\left(-\frac12;f\left(-\frac12\right)\right)$

حيث $f\left(-\frac12\right)=-2\left(e^{-1}+e^{-2}\right)\simeq-1.01$

د. معادلة المماس (T) عند $B(0;-1)$ هي: $y=\left(4e^{-2}\right)x-1$

3.رسم (T)، (D) و (C_f) :



4.تعين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : $(2x-1)e^{2x}=\ln m$ حلين مختلفين : $(m>0)$

$(2x-1)e^{2x}=\ln m$ يكافىء $f(x)=(4e^{-2})x+\ln m$

حلول المعادلة $f(x)=(4e^{-2})x+\ln m$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=(4e^{-2})x+\ln m$ الموازي للمستقيمين (D) و(T) ومنه : يكون للمعادلة $(2x-1)e^{2x}=\ln m$ حلين مختلفين من أجل $-1\prec\ln m\prec0$ أي $m\in\left]\frac1e;1\right[$:

III) الدالة h معرفة على IR بـ: $h(x)=f(|x-1|)$

أ . نبين أن من أجل كل x من IR : $h(2-x)=h(x)$

لدينا

$$h(2-x)=f(|2-x-1|)=f(|1-x|)=f(|x-1|)=h(x)$$

نستنتج أن المنحنى (C_h) يقبل محور تناظر معادلته: $x=1$

ب . كتابة h دون رمز القيمة المطلقة :

$$h(x)=\begin{cases} f(x-1) & ;x\geq1 \\ f(-x+1) & ;x\leq1 \end{cases}$$

استنتاج كيفية إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) :

① على المجال $[1;+\infty[$:

(C_h) هو صورة الجزء من (C_f) الواقع على المجال $[0;+\infty[$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(1;0)$.

② على المجال $]-\infty;1]$:

بما ان (C_h) يقبل محور تناظر معادلته $x=1$ فإنه (C_h) يناظرجزؤه الأول بالنسبة لمحور التناظر ذو المعادلة $x=1$