على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الاول (في الصفحتين 1 و2)

التمرين الأول:

المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=2$، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\frac{5}{7}u_n+1$

1) أحسب الحدود: u_1، u_2 و u_3؛ وخمّن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n<\frac{7}{2}$

ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة، ثمّ استنتج أنها متقاربة.

3) المتتالية (v_n) معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{1}{2u_n-7}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $5v_{n+1}=7v_n$، ثمّ استنتج أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وأحسب حدها الأول v_0.

ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n، ثمّ استنتج أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\frac{1}{2}\left(7-3\left(\frac{5}{7}\right)^n\right)$، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S=v_1\times u_0+v_2\times u_1+v_3\times u_2+\ldots+v_{2022}\times u_{2021}$

- اثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n.u_n=\frac{7v_n+1}{2}$، ثمّ أحسب المجموع S

التمرين الثاني:

نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$

1) أ) بيّن أنّ الدالة G المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x)=-(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث: $g(x)=x.e^{-x+1}$، ثم استنتج I_1

2) أ) بيّن باستعمال التكامل بالتجزئة، أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$

ب) استنتج I_2 و I_3.

التمرين الثالث:

يحتوي صندوق على خمس كريّات بيضاء مرقّمة: 1، 1، 1، 0 و1-، و خمس كريّات سوداءمرقّمة: 1، 1، 0، 0 و1-. كل الكريّات لا نميّز بينها عند اللّمس.

❖ نسحب من الصندوق عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريّات. ونعتبر الحوادث التالية:

A: " الحصول على كرية بيضاء واحدة فقط". ؛ B: " الحصول على كرية بيضاء على الأقل."

C: " الحصول على ثلاث كريّات من نفس اللّون" ؛ F: "مجموع أرقام الكريّات الثلاثة المسحوبة معدوم".

1) أ) أحسب احتمالات الحوادث: A، B، C و F.

2) أ) بيّن أنّ: $p(C\cap F)=\frac{7}{120}$.

ب) علمًا أن الكريات المسحوبة من نفس اللون، ما هو احتمال أن يكون مجموع أرقامها معدوما؟

3) نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكريات المسحوبة.
أ) عيّن قيّم X الممكنة. وعرّف قانون احتماله.
ب) أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$ ، وتباينه وانحرافه المعياري.

التمرين الرابع:

I) g دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2\ln x$

1) احسب النهايتين عند طرفي مجموعة التعريف.
2) أثبت أن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، وشكل جدول تغيراتها.
3) بيّن أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.75<\alpha<0.76$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعرّف الدالة f على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=1-x+\dfrac{2}{x}(1+\ln x)$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدة الأطوال هي cm.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
ب) بيّن أنّ المستقيم (D) ذا المعادلة: $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.
جـ) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D).
2) بيّن أنّه من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ واستنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.
3) أ) بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل مماسا (T) يوازي (D) يطلب تعيين معادلة له.
ب) اثبت أنّ: $f(\alpha)=1-2\alpha+\dfrac{2}{\alpha}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.
جـ) أحسب: $f(2)$ و $f(3)$ ثمّ أرسم المستقيمين (D)، (T) والمنحنى (C). [نأخذ: $f(\alpha)=2.15$].
4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $\dfrac{2}{x}(1+\ln x)=m-1$.
5) أ) عيّن دالة أصلية للدالة: $x\mapsto\dfrac{2}{x}+\dfrac{2\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$.
ب) λ عدد حقيقي أكبر من 1، احسب $S(\lambda)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$ ، $x=\lambda$ و $y=-x+1$
جـ) عيّن قيمة λ بحيث يكون: $S(\lambda)=\ln(\lambda^3)\ cm^2$.

III) k عدد حقيقي موجب تماما، و f_k دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_k(x)=1-x+\dfrac{k}{x}(1+\ln x)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) اثبت أنّ جميع المنحنيات (C_k) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثييها.
2) نعتبر النقط: $A\left(-2;\dfrac{4}{k}\right)$ ، $B\left(1;\dfrac{2\ln k}{k}\right)$ و $C(-2k;2k-2)$ ، ولتكن النقطة G_k مرجح الجملة المثقلة: $\{(C;-1);(B;2);(A;1)\}$.

- عيّن بدلالة k إحداثيي G_k. ثمّ استنتج مجموعة النقط G_k عندما يمسح k المجموعة $\mathbb{R}^{*+}$. **[انتهى الموضوع الأول]**

الموضوع الثاني (في الصفحتين 3 و4)

التمرين الأول:

المتتالية (u_n) معرّفة بـ: $u_0=\alpha$، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=2-\frac{4}{u_n+3}$

1) عيّن قيّم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

فيما يلي نضع: $u_0=0$،

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 1$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، واستنتج أنّها متقاربة و أحسب نهايّة المتتالية (u_n)

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<1-u_{n+1}\le\frac{1}{3}(1-u_n)$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<1-u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$، واستنتج نهاية المتتالية (u_n) من جديد.

4) نعرّف المتتالية (v_n)، من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

- اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها، وحدها الأول v_0. وعيّن عبارة v_n، ثمّ استنتج عبارة u_n

5) أ) أكتب بدلالة n عبارة المجموعين: T_n و T'_n حيث:

$$T_n=\frac{1}{u_0+2}+\frac{1}{u_1+2}+\frac{1}{u_2+2}+\ldots+\frac{1}{u_n+2}$$ و $$\ln(T'_n)=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n.$$

التمرين الثاني:

اختر الإجابة الصحيحة الوحيدة لكل سؤال مما يلي مع التبرير:

1) مجموعة حلول المتراجحة: $3(\ln x)^2-2\ln x-1\le 0$، هي:

أ) $\left[\sqrt[3]{e^{-1}};e\right]$ ب) $\left[e^{-3};e^{-1}\right]$ ج) $\left[e^{-3};e\right]$.

2) الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $2y'-3y+2=0$ هو:

أ) $C.e^{\frac{3}{2}x}-\frac{2}{3}$ ب) $C.e^{\frac{-3}{2}x}+\frac{2}{3}$ ج) $C.e^{\frac{3}{2}x}+\frac{2}{3}$.

3) دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ على المجال $]0;+\infty[$ هي:

أ) $x\mapsto\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-1$، ب) $x\mapsto 2\left(\sqrt{x}+1\right)\left[\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-1\right]$، ج) $x\mapsto\ln\left(1+\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}$

4) إذا كانت المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n=e^n+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ فإنّ: $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$ يساوي:

أ) $\frac{e^n-1}{e-1}-\ln(n+1)$ ب) $\frac{e^{n+1}-e}{e-1}+\ln(n)$ ج) $\frac{e^{n+1}-e}{e-1}-\ln(n+1)$.

التمرين الثالث:

تتكون مجموعة من الأشخاص من 6 رجال و 4 نساء، من بينهم رجل واحد اسمه عليّ، وامرأة واحدة اسمها فاطمة. نريد اختيار لجنة تضم ثلاثة أعضاء. ونعرف الحوادث التالية:

A : "اللجنة تضم 3 رجال"　　　B : "اللجنة تضم رجلا وامرأتين"

C : "اللجنة تضم عليّا"　　　D : "اللجنة لا تضم فاطمة"

1) أحسب الاحتمالات الآتية: $p(A)$، $p(B)$، $p(C)$ و $p(D)$.

2) أ) أثبت أن: $p(C\cap D)=\dfrac{7}{30}$ ، وأحسب $p(C)\times p(D)$ ، هل الحادثان C وD مستقلان؟

ب) علمًا أنّ اللجنة تضم عليًا، ما هو احتمال أن لا تضم فاطمة؟

3) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المشكلة.

أ) عيّن القيّم الممكنة للمتغير العشوائي X وعرّف قانون احتماله.

ب) أحسب أمله الرياضياتي، وانحرافه المعياري.

التمرين الرابع:

I) الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$.

1) احسب النهايتين عند طرفي $\mathbb{R}$ ،

2) أدرس تغيرات الدالة g،وشكل جدول تغيراتها.

3) بين أنّ المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14<\alpha<1.15$، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعرّف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$ ، و(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. حيث: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن: $f'(x)=g(x)$ واستنتج اتجاه تغيرات f وشكل جدول تغيراتها.

جـ) بيّن أنّ: $f(\alpha)=2\alpha+1+\dfrac{2}{\alpha-2}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

2) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(2x-1)$ ؛ وفسّر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=2x-1$

ج) بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

د) أحسب: $f(0)$ و $f(2)$ ثمّ أرسم (Δ)، (T) والمنحنى (C). (نأخذ: $f(\alpha)=0.95$)

3) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة ذات المجهول x التالية: $2m-1-(x-1)e^{-x+2}=0$ حليّن متمايزين.

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=(x-1)e^{-x+2}$.

أ) عيّن باستعمال التكامل بالتجزئة الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم عند 0.

ب) ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda>1$ و$A(\lambda)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ ، $x=\lambda$.

- أحسب بدلالة λ العدد $A(\lambda)$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

[انتهى الموضوع الثاني]