المراجعة النهائية لبكالوريا 2022

التمرين 01 : المتتاليات العددية

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 حيث : $u_0=\ln 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\ln\left(\dfrac{1+e^{u_n}}{2}\right)$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$.

2) أ- تحقق أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $e^{u_{n+1}}-e^{u_n}=\dfrac{1-e^{u_n}}{2}$.

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة .

جـ- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم عين نهايتها l .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{e^{u_n}-1}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها q و حدها الأول v_0 .

ب- اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\ln\left(\dfrac{1}{2^n}+1\right)$.

جـ- احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=e^{u_0}+e^{u_1}+......+e^{u_n}$.

☜ احسب S_n بدلالة n .

التمرين 02 : الإحتمـــالات

n عدد طبيعي غير معدوم .

يحتوي صندوق على 27 كرية متماثلة و لا فرق بينها عند اللمس ، من بين هذه الكريات توجد n كرية حمراء و $2n$ كرية بيضاء و ما بقي من الكريات كلها سوداء ، نسحب عشوائيا و في **آن واحد** ثلاث كريات من الصندوق :

1) برر لماذا يكون : $1\le n\le 9$ ؟ .

2) نفرض في هذا السؤال أن : $n=5$.

أ- احسب إحتمال كل حدث من الأحداث التالية :

A : "الكريات المسحوبة كلها سوداء" ، B : "يوجد بالضبط في السحب كرية سوداء"

C : "لا يوجد اللون الأسود في السحب" ، D : يوجد في السحب على الأقل كرية سوداء" .

E : "يوجد في السحب على الأكثر كرية سوداء" ، F : "الكريات المسحوبة من نفس اللون" .

ب- سحبنا ثلاث كريات من نفس اللون ، ما هو إحتمال أن لا يوجد اللون الأسود في السحب ؟ .

جـ- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الصندوق .

☜ اكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نفرض في هذا السؤال أن : $1\le n\le 9$.

✍ نسمي p_n إحتمال الحادثة H : "الكريات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى" .

أ- بين أن : $p_n=\dfrac{-6n^3+54n^2}{2925}$.

ب- عين قيمة n التي من أجلها يكون p_n أكبر ما يمكن .

جـ- احسب حينئذ p_n مكتوبا على شكل كسر غير قابل للإختزال .

حل التمرين 01 : المتتاليات العددية

1) نستعمل البرهان بالتراجع من اجل إثبات الخاصية : $u_n > 0$ $P(n)$.

- نتحقق من صحة $P(n)$ من أجل $n=0$: لدينا $\ln 2 > 0$ أي : $u_0 > 0$ (محققة).

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $u_n > 0$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1} > 0$.

لدينا فرضا : $u_n > 0$ أي : $e^{u_n} > 1$ أي : $\frac{e^{u_n}+1}{2} > 1$ و منه : $\ln\left(\frac{e^{u_n}+1}{2}\right) > 0$ أي : $u_{n+1} > 0$.

إذن : من أجل كل عدد طبيعي $\boxed{u_n > 0}$.

2) أ- لدينا : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{1+e^{u_n}}{2} - e^{u_n}$ أي : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{1+e^{u_n}-2e^{u_n}}{2}$ و منه : $\boxed{e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{1-e^{u_n}}{2}}$ هـ.م

ب- لدينا : $u_n > 0$ أي : $e^{u_n} > 1$ أي : $-e^{u_n} < -1$ أي : $1-e^{u_n} < 0$ و منه : $\frac{1-e^{u_n}}{2} < 0$.

لدينا : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{1-e^{u_n}}{2}$ أي : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} < 0$ و منه : $e^{u_{n+1}} < e^{u_n}$ و هذا يدل على أن : $u_{n+1} < u_n$ (رتابة الدالة الأسية)

أي : $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

جـ- لدينا المتتالية (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق : $f(l) = l$ حيث : f هي الدالة المرفقة للمتتالية (u_n)

و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، أي أن : $f(l) = l$ تكافئ : $\ln\left(\frac{1+e^l}{2}\right) = l$ أي : $1+e^l = 2e^l$ أي : $e^l = 1$ و منه : $\boxed{l=0}$.

3) لدينا : $v_n = \frac{1}{e^{u_n}-1}$.

أ- نحسب : $v_{n+1} = \frac{1}{e^{u_{n+1}}-1}$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{\frac{1+e^{u_n}}{2}-1}$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{\frac{e^{u_n}-1}{2}}$ و منه : $v_{n+1} = \frac{2}{e^{u_n}-1}$ أي : $v_{n+1} = 2\left(\frac{1}{e^{u_n}-1}\right)$

و منه : $v_{n+1} = 2v_n$ ، و بالتالي فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\boxed{q=2}$ و حدها الأول $\boxed{v_0 = 1}$.

ب- نجد : $\boxed{v_n = 2^n}$.

- لدينا : $v_n = \frac{1}{e^{u_n}-1}$ أي : $\frac{1}{v_n} = e^{u_n} - 1$ أي : $e^{u_n} = \frac{1}{v_n} + 1$ و منه : $u_n = \ln\left(\frac{1}{v_n}+1\right)$ ، إذن : $\boxed{u_n = \ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}$ هـ.م

جـ- نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{2^n}+1\right) = 0$ ، لأن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ و $\ln 1 = 0$.

4) لدينا : $S_n = e^{u_0} + e^{u_1} + ... + e^{u_n}$.

نعلم أن : $e^{u_n} = \frac{1}{v_n} + 1$ و $\frac{1}{v_n} = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، أي يصبح : $S_n = \left(\frac{1}{v_0}+1\right) + \left(\frac{1}{v_1}+1\right) + ... + \left(\frac{1}{v_n}+1\right)$

أي : $S_n = \left(\frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + ... + \frac{1}{v_n}\right) + (1+1+....+1)$ و منه : $S_n = \left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right] + (n+1)$

إذن نجد : $\boxed{S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + n+1}$.

حــل التمرين 02 : الإحتمــالات

1) نعلم أنه من أجل $1\le n\le 9$ يكون : $27\ge 3n$ و بالتالي : $\boxed{1\le n\le 9}$.

2) لدينا : $n=5$.

أ ـ حساب إحتمال الأحداث :

$P(A)=\dfrac{C_{12}^{3}}{C_{27}^{3}}=\dfrac{220}{2925}=\boxed{\dfrac{44}{585}}$ ، $P(B)=\dfrac{C_{12}^{1}\times C_{15}^{2}}{C_{27}^{3}}=\dfrac{1260}{2925}=\boxed{\dfrac{28}{65}}$ ، $P(C)=\dfrac{C_{15}^{3}}{C_{27}^{3}}=\dfrac{455}{2925}=\boxed{\dfrac{91}{585}}$.

$P(D)=\dfrac{\left(C_{12}^{1}\times C_{15}^{2}\right)+\left(C_{12}^{2}\times C_{15}^{1}\right)+C_{12}^{3}}{C_{27}^{3}}=\dfrac{2470}{2925}=\boxed{\dfrac{494}{585}}$ ، $P(E)=\dfrac{\left(C_{12}^{1}\times C_{15}^{2}\right)+C_{15}^{3}}{C_{27}^{3}}=\dfrac{1715}{2925}=\boxed{\dfrac{343}{585}}$.

$P(F)=\dfrac{C_{5}^{3}+C_{10}^{3}+C_{12}^{3}}{C_{27}^{3}}=\dfrac{350}{2925}=\boxed{\dfrac{14}{117}}$.

ب ـ نحسب الإحتمال الشرطي $P_F(C)$:

لدينا : $P_F(C)=\dfrac{P(C\cap F)}{F}$ و نعلم أن : $P(C\cap F)=\dfrac{C_{5}^{3}+C_{10}^{3}}{2925}=\dfrac{130}{2925}=\dfrac{26}{585}$

أي : $P_F(C)=\dfrac{\frac{26}{585}}{\frac{70}{585}}$ و منه : $P_F(C)=\dfrac{26}{70}=\boxed{\dfrac{13}{35}}$.

جـ ـ قيم المتغير العشوائي X هي : 12 ، 11 ، 10 و 9 .

$P(X=12)=P(C)=\dfrac{455}{2925}$ ، $P(X=11)=P(B)=\dfrac{1260}{2925}$ ، $P(X=10)=\dfrac{C_{12}^{2}\times C_{15}^{1}}{2925}=\dfrac{990}{2925}$

$P(X=9)=P(A)=\dfrac{220}{2925}$.

ـ حساب $E(X)$: $E(X)=\dfrac{(12\times 455)+(11\times 1260)+(10\times 990)+(9\times 220)}{2925}$ و منه : $\boxed{E(X)\approx 10,66}$.

3) لدينا : $1\le n\le 9$.

أ ـ نجد : $p_n=\dfrac{C_{n}^{1}\times C_{2n}^{1}\times C_{27-3n}^{1}}{C_{27}^{3}}$ أي : $p_n=\dfrac{n\times 2n\times(27-3n)}{2925}$ و منه : $\boxed{p_n=\dfrac{-6n^3+54n^2}{2925}}$ هـ.م.

ب ـ لدينا : $p_n=\dfrac{-6n^3+54n^2}{2925}$ أي : $p_n=\dfrac{-2n^3+18n^2}{975}$ و منه : $p_n=-\dfrac{2}{975}n^3+\dfrac{6}{325}n^2$.

ندرس على $\mathbb{R}$ اتجاه تغير الدالة $f:x\mapsto -\dfrac{2}{975}x^3+\dfrac{6}{325}x^2$.

لدينا : $f'(x)=-\dfrac{2}{325}x^2+\dfrac{12}{325}x$ ، أي : $f'(x)=0$ تكافئ $-\dfrac{2}{325}x^2+\dfrac{12}{325}x=0$ أي : $x\left(-\dfrac{2}{325}x+\dfrac{12}{325}\right)=0$

و منه : $\begin{cases}x=0\\x=6\end{cases}$ و جدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(6)$	$\searrow$	$-\infty$

إذن من أجل $1\le n\le 9$ لدينا قيمة n التي من أجلها يكون p_n أكبر ما يمكن هي : 6 .

جـ ـ من أجل $n=6$ نجد : $p_n=\dfrac{648}{2925}$ و منه : $\boxed{p_n=\dfrac{72}{325}}$.

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق