الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — الأستاذة قميري سميرة

الشعبة: تقني رياضي — دورة ماي 2022

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 7$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 8}{u_n + 5}$.

1) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{7}{u_n + 5}$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد عدد طبيعي n : $u_n > 2$

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ يطلب حساب حدها الأول وكتابة عبارة حدها العام.

ب- اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (u_n)

جـ- احسب $\lim v_n$ ثم استنتج $\lim u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = \ln\left(1 - \frac{6}{u_0 + 4}\right) + \ln\left(1 - \frac{6}{u_1 + 4}\right) + \ldots \ln\left(1 - \frac{6}{u_n + 4}\right)$

- احسب S_n بدلالة n

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + \frac{4}{1 + e^x}$.

من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) + f(-x) = 4$.

2) الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x\left[\ln(x)\right]^2$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y'' = \frac{2\ln x}{x}$

3) الدالة العددية h المعرفة على المجال $]-\infty;-1[$ بـ: $h(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ،

منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا حيث $y = 3x$ معادلة له.

4) n عدد طبيعي غير معدوم. العددان الطبيعيان A و B حيث: $A = 4n + 1$ و $B = 6n + 1$ هما أوليان فيما بينهما.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $5^{6k} \equiv 1[7]$

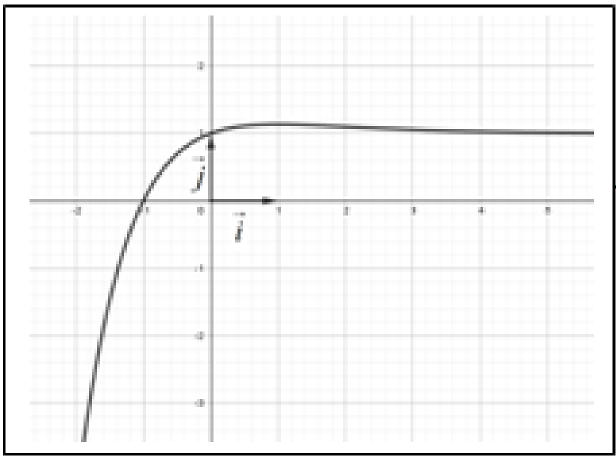
2) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد الطبيعي 5^n على 7

3) بين أن العدد الطبيعي $2022^{1443}+1443^{2022}$ مضاعف للعدد 7

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد الصحيح $5^{2022n}-25^{1443n}$ مضاعف للعدد 7

5) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $1954^{2022}+1945^{1443}+n-9$ مضاعفا للعدد 7

التمرين الرابع: (7 نقاط)



الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{-(x+1)}$.

(Cg) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

1) أ) احسب $g(-1)$

ب) بقراءة بيانية حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

ج) احسب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x-(x+1)e^{-(x+1)}$، (C_f) تمثيلها البياني المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm)$

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x)=x\left[1-(1+\frac{1}{x})e^{-(x+1)}\right]$

ب) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

ج) استنتج معادلة للمستقيم المقارب المائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) بين أن (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 1 يطلب كتابة معادلة له.

5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث: $0,3<\alpha<0.4$ و $-1,9<\beta<-1,8$

6) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$ مع المنحني (C_f).

7) ارسم (C_f) والمستقيم (D).

8) تحقق أن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x\mapsto(x+2)e^{-(x+1)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto-(x+1)e^{-(x+1)}$ على $\mathbb{R}$

9) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) ومحور التراتيب والمستقيم الذي له المعادلة $x=3$

انتهى الموضوع الأول

تصحيح مختصر

التمرين الأول:

المتتالية (u_n) معرفة بـ : $u_0 = 7$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 8}{u_n + 5}$.

التحقق أنه من أجل كل عدد عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \frac{7}{u_n + 5}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 8}{u_n + 5} = \frac{3(u_n + 5) - 7}{u_n + 5} = 3 - \frac{7}{u_n + 5}$

إثبات أنه من أجل كل عدد عدد طبيعي n : $u_n > 2$: بالتراجع

نتحقق من صحة الخاصية من أجل 0 :

$u_0 = 7$ إذن $u_0 > 2$ فالخاصية محققة من أجل 0

نبرهن صحة الاستلزام: "$u_n > 2$ يستلزم $u_{n+1} > 2$"

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - 2$: $u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n + 8}{u_n + 5} - 2 = \frac{3u_n + 8 - 2u_n - 10}{u_n + 5} = \frac{u_n - 2}{u_n + 5}$

لدينا : $u_n > 2$ يستلزم: $u_{n+1} - 2 > 0$ يستلزم: $u_{n+1} > 2$

اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتاج تقاربها:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 8}{u_n + 5} - u_n = \frac{3u_n + 8 - u_n^2 - 5u_n}{u_n + 5} = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 8}{u_n + 5} = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 4)}{u_n + 5}$$

$u_{n+1} - u_n \le 0$ فالمتتالية (u_n) متناقصة. وبما أنها محدودة من الأسفل فهي متقاربة.

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}$.

إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

من أجل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{3u_n + 8}{u_n + 5} - 2}{\frac{3u_n + 8}{u_n + 5} + 4} = \frac{\frac{3u_n + 8 - 2u_n - 10}{u_n + 5}}{\frac{3u_n + 8 + 4u_n + 20}{u_n + 5}} = \frac{u_n - 2}{7u_n + 28} = \frac{u_n - 2}{7(u_n + 4)}$

يعني من أجل عدد طبيعي n: $v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n$. فالمتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{7}$

عبارة الحد العام

من أجل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 q^n$ مع $v_0 = \frac{5}{11}$ و $q = \frac{1}{7}$ أي: من أجل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{5}{11}\right)\left(\frac{1}{7}\right)^n$

ومن أجل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 4}$ يكافئ : $u_n = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$ إذن: $u_n = \frac{\left(\frac{5}{11(7)^n}\right) + 2}{1 - \left(\frac{5}{11(7)^n}\right)} = \frac{5 + 22(7)^n}{11(7)^n - 5}$

النهايات:

$$\lim v_n = 0$$

استنتاج: $\lim u_n = 2$

حساب S_n بدلالة n

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\ln\left(1 - \frac{6}{u_n + 4}\right) = \ln\left(\frac{u_n - 2}{u_n + 4}\right) = \ln(v_n) = \ln\left(\frac{5}{11}\left(\frac{1}{7}\right)^n\right) = \ln\left(\frac{5}{11}\right) + n\ln\left(\frac{1}{7}\right)$$

إذن S_n مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية حدها الأول $\ln(\frac{5}{11})$ وأساسها $\ln(\frac{1}{7})$

$$S_n = \ln\left(1 - \frac{6}{u_0 + 4}\right) + \ln\left(1 - \frac{6}{u_1 + 4}\right) + \ldots \ln\left(1 - \frac{6}{u_n + 4}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\ln(\frac{5}{11}) + \ln(\frac{5}{11}) + n\ln(\frac{1}{7})\right)$$

$$= (n+1)\left(\ln(\frac{5}{11}) + \frac{n}{2}\ln(\frac{1}{7})\right)$$

التمرين الثاني:

1) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+\dfrac{4}{1+e^{x}}$.

من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x)+f(-x)=4$. صحيح

تبرير: من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)+f(-x)=2x+\frac{4}{1+e^{x}}+2(-x)+\frac{4}{1+e^{-x}}=\frac{4}{1+e^{x}}+\frac{4e^{x}}{e^{x}+1}=\frac{4(e^{x}+1)}{e^{x}+1}=4$$

2) الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x\left[\ln(x)\right]^{2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y''=\dfrac{2\ln x}{x}$ خطأ.

تبرير:

الدالة g قابلة للاشتقاق مرتين على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة الثانية معرفة بـ: $g''(x)=\dfrac{2+2\ln x}{x}$

3) الدالة العددية h المعرفة على المجال $]-\infty;-1[$ بـ: $h(x)=\dfrac{3x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}$ ،

منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم يقبل مستقيما مقاربا مائلا حيث $y=3x$ معادلة له. خطأ

تبرير:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)-3x=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^{2}-3x\sqrt{x^{2}-1}}{\sqrt{x^{2}-1}}=\lim_{x\to-\infty}3x\left(\frac{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}\right)=\lim_{x\to-\infty}3x\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}\right)=+\infty$$

4) n عدد طبيعي غير معدوم. العددان الطبيعيان A وB حيث: $A=4n+1$ و $B=6n+1$ هما أوليان فيما بينهما. صحيح.

تبرير: لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$3A-2B=3(4n+1)-2(6n+1)=1$$

حسب مبرهنة بيزو العددان A وB أوليان فيما بينهما

التمرين الثالث:

1) إثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $5^{6k} \equiv 1[7]$

نتحقق من صحة الخاصية من أجل 0:

لدينا: $5^0 = 1$ فالموافقة صحيحة من أجل 0

نثبت صحة الاستلزام: $5^{6k} \equiv 1[7]$ يستلزم $5^{6(k+1)} \equiv 1[7]$

لدينا: $5^{6(k+1)} = 5^{6k}.5^6 = 15625.5^{6k}$

$15625 \equiv 1[7]$ و $5^{6k} \equiv 1[7]$ يستلزم $5^{6(k+1)} \equiv 1[7]$

2) دراسة بواقي قسمة العدد الطبيعي 5^n على 7 تبعا لقيم العدد الطبيعي n

$n = 6k$ يستلزم $5^n \equiv 1[7]$ ، $n = 6k+1$ يستلزم $5^n \equiv 5[7]$

$n = 6k+2$ يستلزم $5^n \equiv 4[7]$ ، $n = 6k+3$ يستلزم $5^n \equiv 6[7]$

$n = 6k+4$ يستلزم $5^n \equiv 2[7]$ ، $n = 6k+5$ يستلزم $5^n \equiv 3[7]$

3) إثبات أن العدد الطبيعي $2022^{1443} + 1443^{2022}$ مضاعف للعدد 7:

لدينا $2022 \equiv 6[7]$ إذن $2022 \equiv -1[7]$ ومنه: $2022^{1443} \equiv -1[7]$

ولدينا $1443 \equiv 1[7]$ إذن $1443^{2022} \equiv 1[7]$

وبالتالي: $2022^{1443} + 1443^{2022} \equiv 0[7]$ فالعدد الطبيعي $2022^{1443} + 1443^{2022}$ مضاعف للعدد 7.

4) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد الصحيح $5^{2022n} - 25^{1443n}$ مضاعف للعدد 7

لدينا: $2022n = 6(337n)$ إذن $5^{2022n} \equiv 1[7]$

و لدينا: $25^{1443n} = 5^{2(1443n)} = 5^{481n}$ إذن $25^{1443n} \equiv 1[7]$

فالعدد $5^{2022n} - 25^{1443n}$ مضاعف للعدد 7

5) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $1954^{2022} + 1945^{1443} + n - 9$ مضاعفا للعدد 7:

لدينا $1954 \equiv 1[7]$ إذن $1954^{2022} \equiv 1[7]$

ولدينا $1945 \equiv 6[7]$ إذن $1945 \equiv -1[7]$ ومنه $1945^{1443} \equiv -1[7]$

فالعدد $1954^{2022} + 1945^{1443}$ مضاعف للعدد 7

إذن من أجل أن يكون العدد $1954^{2022} + 1945^{1443} + n - 9$ مضاعفا للعدد 7يكفي أن يكون العدد $n-9$ مضاعفا للعدد 7 أي: $\lambda \in \mathbb{Z}$; $n = 7\lambda + 2$

التمرين الرابع:

حساب $g(-1)$: $g(-1)=1-e^{0}=0$

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

حساب نهايتي الدالة g عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

إثبات أن : $f(x)=x\left[1-(1+\frac{1}{x})e^{-(x+1)}\right]$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x:

$$f(x)=x-(x+1)e^{-(x+1)}=x-x(1+\frac{1}{x})e^{-(x+1)}=x\left[1-(1+\frac{1}{x})e^{-(x+1)}\right]$$

حساب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

استنتاج معادلة للمستقيم المقارب المائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$ فالمستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحني (Cf) عند $+\infty$:

إثبات أن: $f'(x)=g(x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=1+xe^{-(x+1)}=g(x)$

اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$

ومتزايدة تماما على $[-1;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

إثبات وجود مماس معامل توجيهه 1 :

فاصلة نقطة التماس (إن وجدت) هي حل للمعادلة $f'(x)=1$

$1+xe^{-(x+1)}=1$ تكافئ: $xe^{-(x+1)}=0$ تكافئ: $x=0$

معادلة المماس: $y = x - e^{-1}$

إثبات أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β :

(بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة)

دراسة الوضع النسبي للمستقيم (D) مع المنحني (C_f)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$

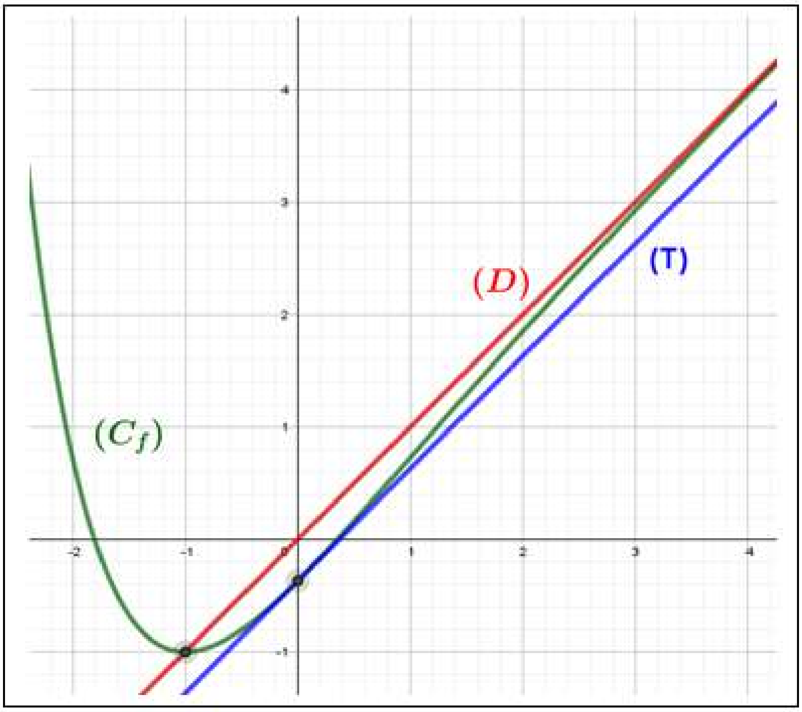
إشارة الفرق $-(x+1)e^{-(x+1)}$ من إشارة $-(x+1)$

المنحني (C_f) يقطع المستقيم (D) في النقطة A(-1 ;-1)

المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty; -1[$

المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (D) على المجال $]-1; +\infty[$

الرسم:



إثبات أن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto (x+2)e^{-(x+1)}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto -(x+1)e^{-(x+1)}$ على $\mathbb{R}$

الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto (x+2)e^{-(x+1)}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة معرفة بـ:

$x \mapsto -(x+1)e^{-(x+1)}$

حساب المساحة:

$$\int_0^3 [x - f(x)]\,dx = \int_0^3 (x+1)e^{-(x+1)}\,dx = \left[-(x+2)e^{-(x+1)}\right]_0^3 = 2e^{-1} - 5e^{-4}$$

مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) ومحور التراتيب والمستقيم الذي له المعادلة $x = 3$

$$S = 4\left(2e^{-1} - 5e^{-4}\right) cm^2$$