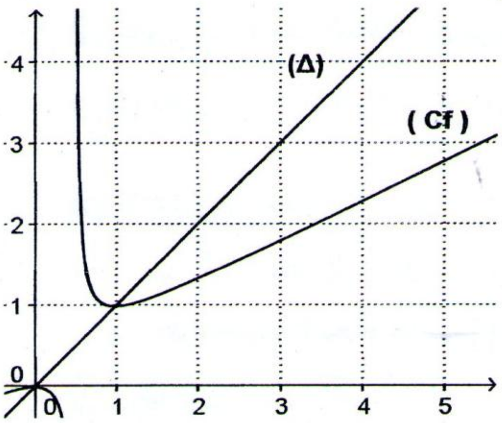
الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (04,5 نقطة) .

الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ ، و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.



1) بين أنه اذا كان $x>1$ فان $f(x)>1$.

2) نعرف (u_n) المتتالية العددية كما يلي : $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=f(u_n)$. $U_{n+1}=\dfrac{U_n^2}{2U_n-1}$

أ) أنقل الشكل المقابل ، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

3) أ) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>1$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=1-\dfrac{1}{u_n}$ و $w_n=\ln(v_n)$.

أ) برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول w_0.

ب) عبر عن الحد العام w_n بدلالة n ، استنتج v_n بدلالة n، ثم بين أن : $u_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5) أحسب الجداء P_n بدلالة n حيث : $P_n=v_0\times v_1\times....\times v_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط) .

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(2;1;-1)$، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$، $D(1;1;-2)$ و المستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$.

المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الخالات التالية :

1) النقط A ، B و C تعين مستويا .

2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P) .

3) $x-2y-z-1=0$ هي معادلة للمستوي (ACD) .

4) المسافة بين النقطة D و المستوي (P) تساوي $\dfrac{3}{2}$.

A(2;1;-1)
C(0;-2;3)

5) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -2+3t \\ z = 3-4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AC) .

6) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ هي مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.

التمرين الثالث : (04,5 نقطة) .

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ، H و I لاحقاتها على الترتيب :
$z_A = i$ ، $z_B = -2+i$ ، $z_C = -3$ ، $z_H = -3+4i$ و $z_I = -1-i$.

1) أ) مثل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

ب) عين النسبة و الزاوية للتشابه المباشر الذي مركزه B و يحول النقطة A إلى النقطة C .

2) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

3) أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ ، ثم استنتج أن المستقيمان (AH) و (BC) متعامدان .

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات الاحقة z حيث : $z+1+i = \sqrt{z_B \overline{z_B}}\, e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ) بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

ب) عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة ، ثم أنشئ المجموعة (Γ) .

التمرين الرابع : (07 نقاط) .

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x + 2 - \ln x$.

أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(-x + e - \dfrac{\ln(x^2)}{x}\right)$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ ، (نأخذ $\|\vec{i}\| = 1cm$) .

1. أثبت من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أن : $f(x)' = -\dfrac{g(x^2)}{2x^2}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة $f(x)$.

2. أ) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. برهن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{e}{2}$ مقارب لـ (C_f) ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

4. أ) أثبت أنه يوجد مماسان لـ (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ، ثم جد معادلة لكل منهما .

ب) بين أن يقطع المنحنى (C_f) محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث : $2 < \alpha < 2{,}1$ و $-0{,}5 < \beta < -0{,}4$

5. أنشئ المماسين و المستقيم (Δ) ، ثم المنحنى (C_f) .

6. باستعمال المنحنى (C_f) ، عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $x(e-2m) = \ln(x^2)$ حلا وحيدا .

7. نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x = -\alpha$ ، $x = 1$ و $x + 2y = e$. تحقق أن : $A(\alpha) = \dfrac{1}{2}(\ln\alpha)^2\, cm^2$.

الموضوع الثاني :

التمرين الأول : (04 نقاط) .

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث : يحتوي الصندوق U_1 على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1 ، 1 ، 2 ، 0 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 1، 1، 0 . كما يحتوي الصندوق U_2 على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1 ، 2 و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 1، 0 ، كل الكرات لا نفرق بينها عند اللمس .

1) نختار عشوائيا أحد الصندوقين ، فاذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع ، و إذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي با لإرجاع .

أ) احسب احتمال الحدثين التاليين :

A" سحب كرتين من نفس اللون " .

B" سحب كرتين تحملان نفس الرقم " .

ب) هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل .

ج) إذا علمت إن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما احتمال أن تكونا من الصندوق U_1 ؟ .

2) نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 و نضعها جميعا في صندوق واحد U_3 ، ثم نسحب منه عشوائيا كرتين في آن واحد و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

ب) احسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني : (04 نقاط) .

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي : $\begin{cases} u_0 = -13 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$.

1) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = v_n - u_n$.

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية معينا أساسها و حدها الأول .

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $w_n > 0$ و أن (w_n) متقاربة .

2) بين أن (u_n) و (v_n) متجاورتان .

3) نعتبر المتتالية (T_n) المعرفة بـ : $T_n = 4u_n + 15v_n$.

أ) بين أن (T_n) متتالية ثابتة .

ب) أوجد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

4) نعتبر المتتالية (X_n) المعرفة بـ : $X_n = \ln(w_n)$.

أ) بين أن (X_n) متتالية حسابية معينا أساسها و حدها الأول .

ب) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = X_0 + X_1 + ... + X_n$.

5) أحسب الجداء P_n بدلالة n حيث : $P_n = (v_0 - u_0)\times(v_1 - u_1)\times....\times(v_n - u_n)$ ، ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

التمرين الثالث : (05 نقاط) .

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $z_A = 1+i$ و $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2z_B$ و $z_D = 3$.

1) أ) أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي .

ب)عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\dfrac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$ عددا حقيقيا موجبا .

2) أ) بين ان النقط A ، B و C تنتمي الى الدائرة (γ) ذات المركز D ، يطلب تعيين نصف قطرها .

ب)أحسب $\arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_A - z_D}\right)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) عين z_E لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $AECD$ متوازي أضلاع ، ثم استنتج نوعه .

3) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M\left(Z\right)$ النقطة $M'\left(Z'\right)$ حيث : $Z' = i\,Z - 2i$.

أ) حدد طبيعة التحويل T معينا عناصره المميزة .

ب) عين لاحقة النقطة F صورة النقطة O بالتحويل T ، ثم بين أن المستقيمين $\left(AB\right)$ و $\left(CF\right)$ متعامدان .

4) $\left(\Gamma\right)$مجموعة النقط M من المستوي ذات الاحقة z حيث : $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{\overline{\overline{z} - \frac{1}{2}z_C}}\right) = 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

عين طبيعة المجموعة $\left(\Gamma\right)$.

<u>التمرين الرابع :</u> (07 نقاط) .

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g\left(x\right) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-x}$.

1. احسب نهاية الدالة g عند كل من $+\infty$ و $-\infty$.

2. أدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أثبت أن المعادلة $g\left(x\right) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجموعة $\mathbb{R}$ حيث : $0,35 < \alpha < 0,36$.

4. استنتج إشارة $g\left(x\right)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\left(x\right) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right)e^{-x}$ ، و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(o;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، (نأخذ $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$)

1. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right)$.

2. أثبت من أجل كل عدد حقيقي x أن : $f'\left(x\right) = g\left(x\right)$.

3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4. اثبت أن $f\left(\alpha\right) = \alpha\left(1 + 2e^{-\alpha}\right)$ ، ثم أعطي حصرا للعدد $f\left(\alpha\right)$.

5. برهن أن المستقيم$\left(\Delta\right)$ ذو المعادلة$y = x - 1$ مقارب لـ$\left(C_f\right)$بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعية $\left(C_f\right)$بالنسبة لـ $\left(\Delta\right)$.

6. أكتب معادلة المماس $\left(T\right)$ للمنحني $\left(C_f\right)$ عند النقطة A ذات الفاصلة 0 .

7. أنشئ $\left(\Delta\right)$ ، $\left(T\right)$ و $\left(C_f\right)$ في المعلم السابق .

III) L و P دالتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ : $L\left(x\right) = \left(x^2 + 2\right)e^{-x}$ و $P\left(x\right) = 1 - \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$

1. عين الأعداد الحقيقية a , b و c حتى تكون الدالة P دالة أصلية للدالة L على $\mathbb{R}$.

2. أحسب بدلالة α (حيث α هو العدد المصرح به سابقا) المساحة $A\left(\alpha\right)$ بـ cm^2 للحيز من المستوي المحدد بالمنحني $\left(C_f\right)$ و$\left(\Delta\right)$ و المستقيمين الذين معادلتهما $x = -\alpha$ ، $x = 0$.

3. أثبت أن : $A\left(\alpha\right) = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

أستاذ المادة يتمنى لكم التوفيق و النجاح في امتحان شهادة الباكالوريا .

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط.

الموضوع الأول

الجواب الأول: .... 4 نقاط

① أ/ دراسة تغيرات الدالة f على المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على المجال $]\frac{1}{2},+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}$$

إشارة المشتقة:

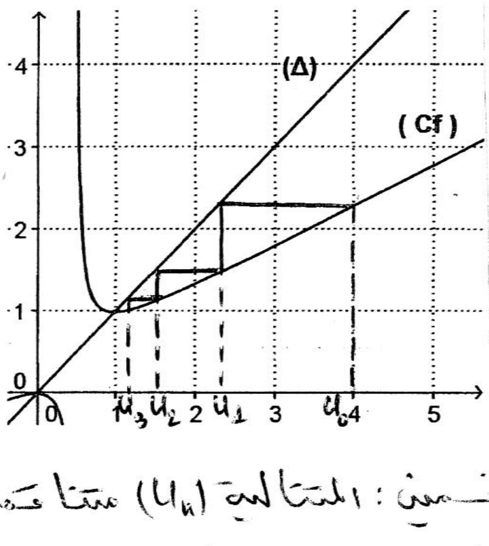
x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

0,25 أي أن: f متناقصة تماما على المجال $]\frac{1}{2},1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$.

ب/ بما أن f متزايدة على المجال $[1,+\infty[$ فهي تحافظ على ترتيبها معناه من أجل كل $x\geq 1$ فإن: $f(x)>f(1)$

أي أن: $f(x)>1$

② أ/ 0,5



ب/ التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ومتقاربة نحو 1. 0,25 0,25

③ أ/ نبين $P(n)$ الخاصية: $u_n>1$

من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=4$ أي $4>1$

ومنه $P(0)$ محققة.

نفرض أن $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n أي: $u_n>1$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$

لدينا: $1<u_n$ (من فرضية التراجع)

ومنه: $f(u_n)>f(1)$ (لأن f متزايدة تماما على $[1,+\infty[$) وعليه: 0,5

$u_{n+1}>1$ أي أن $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. 0,25

ب/ لدينا من أجل كل n: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n$

$$=\frac{u_n^2-2u_n^2+u_n}{2u_n-1}=\frac{-u_n^2+u_n}{2u_n-1}$$ 0,25

$$=\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$$

• استنتاج اتجاه تغير (u_n):

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>1$

ومنه $1-u_n<0$ و $2u_n-1>0$ 0,25

وبالتالي: $u_n(1-u_n)<0$ وعليه: $\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}<0$ إذن (u_n) متناقصة تماما

• بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة. 0,25

④ 4/ . $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(1 - \frac{2u_n - 1}{u_n^2}\right)$$

0,5

$$= \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right)$$

$$= 2\ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right) = 2\ln(v_n) = 2w_n$$

إذن (w_n) م.هـ أساسها $\boxed{q = 2}$

0,25 وحدها الأول: $w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

ب/ لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

0,25 $$w_n = w_0 \times q^n = \boxed{2^n \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

• استنتاج v_n بدلالة n:

لدينا: $w_n = \ln(v_n)$ تكافئ: $\boxed{v_n = e^{w_n}}$

ومنه: $v_n = e^{2^n \ln\left(\frac{3}{4}\right)} = e^{\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right]^{2^n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

0,25 إذن: $\boxed{v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

• إثبات أن: $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

لدينا: $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$ تكافئ: $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

0,25 ومنه: $\boxed{u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}}$

ص ②

حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: بما أن $0 < \frac{3}{4} < 1$

0,25 فإن: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = 0$ ومنه: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

⑤ $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$= e^{w_0} \times e^{w_1} \times \dots \times e^{w_n}$$

$$= e^{w_0 + w_1 + \dots + w_n}$$

$$= e^{w_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}}$$

0,25

$$= e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}}$$

$$= e^{\ln\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(2^{n+1} - 1\right)}$$

$$= \left(e^{\ln\frac{3}{4}}\right)^{2^{n+1} - 1}$$

$$\boxed{P_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1} - 1}}$$

04 الجواب الثاني: ---------------

① صحيح لأن: $\overrightarrow{AB}(-3, 1, 5)$، $\overrightarrow{AC}(-2, -3, 4)$ ولدينا: $\frac{-2}{-3} \neq \frac{-3}{1} \neq \frac{4}{5}$

0,75 وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا، إذن النقط A، B، C تعين مستويا.

0,5 ② خطأ: لأن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P).

③ صحيح لأن: إحداثيات كل من النقط A، C، D تحقق المعادلة المعطاة.

0,75 أو: طريقة 2: $\vec{n}'(1, -2, -1)$ شعاع ناظمي لـ (ACD).

ق: $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;-3;4)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 1(-2)-2(-3)-1\times4 = 4-4 = 0$

أي أن: $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD} = 1\times(-1)-2\times0-1\times(-1) = -1+1 = 0$

وعليه: $\vec{n}\perp\overrightarrow{AD}$.

ق: $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ أي أن $\frac{-2}{-1}\neq\frac{-3}{0}\neq\frac{4}{-1}$

غير مرتبطين خطيا و $\vec{n}$ عمودي عليهما. إذن فالمعادلة المعطاة هي معادلة لـ (ACD) .

④ خطأ لأن: $d(D,(P)) = \frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$ 0,75

⑤ صحيح: لأن إحداثيات A و C تحقق الجملة.

$$\begin{cases} x_A = 2t \\ y_A = -2+3t \\ z_A = 3-4t \end{cases}$$ معناه: $A\in(AC)$

0,75 ومنه: $\begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = -2+3t \\ -1 = 3-4t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$

بما أن t وحيدة فإن: $A\in(AC)$.

بنفس الطريقة نثبت أن: $C\in(AC)$

⑥ خطأ: لأن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$ هي كرة قطرها $[AC]$، لكن D ليست منتصف القطعة $[AC]$ أي أن D ليس بمركز لهذه الكرة. 0,5

الجواب الثالث: .... 4,5 نقطة

① أ/ تمثيل النقط A، B، C، H و I . 0,75

ص ③

ب/ لدينا: $z' = az+b$ العبارة المركبة للتشابه المباشر حيث:

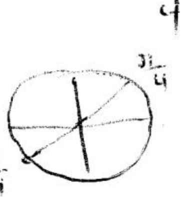
0,25 $a = \frac{z_C-z_B}{z_A-z_B} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

وعليه نسبة التشابه المباشر هي:

0,25 $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته هي: $\arg(a)$

$\cos\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$

$\sin\theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



0,25 إذن زاوية التشابه المباشر هي: $\frac{5\pi}{4}$

0,25 ② $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = -\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$

③ أ/

0,25 $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A} = -\frac{1}{3}i$

ومنه العدد $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$ تخيلي صرف

وعليه المستقيمان (AH) و (BC) متعامدان

0,25 أي: $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}\right) = \frac{-\pi}{2}$ أي أن $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}) = \frac{-\pi}{2}$

وهذا ما يؤكد أن $(AH)\perp(BC)$.

④ أ/ لدينا: $\sqrt{z_B\cdot\overline{z_B}} = \sqrt{|z_B|^2} = |z_B| = \sqrt{5}$

وعليه المجموعة (Γ) تكافئ:

0,25 $(\Gamma):\ z+1+i = \sqrt{5}e^{i\theta}\ /\ \theta\in\mathbb{R}$

ولدينا: $z_A+1+i = 1+2i$ و $|z_A+1+i| = \sqrt{5}$

0,25 أي أن: $A\in(\Gamma)$.

وكذلك: $|z_C+1+i| = |z_B+1+i| = \sqrt{5}$

0,25×2 إذن: $B\in(\Gamma)$ و $C\in(\Gamma)$.

ب/ $z+1+i=\sqrt{5}\,e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$

تكافئ: $|z+1+i|=\sqrt{5}$ معناه $|z-(-1-i)|=\sqrt{5}$

0,5 ومنه: $|z-z_I|=\sqrt{5}$ أي: $IM=\sqrt{5}$

0,25 وبالتالي: (Γ) هي دائرة مركزها I

0,25 ونصف قطرها $\sqrt{5}$ cm.

0,25 * إنشاء (Γ): الدائرة ذات المركز I وتمر بالنقط: A ، B و C.

الجواب الرابع: .... 07 نقاط

الجزء I:

$g(x)=x+2-\ln x$ ، $D_g=]0,+\infty[$

دراسة اتجاه تغير g:

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-2-\ln x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

g ق ا على D_g ولدينا: من أجل كل x من $]0,+\infty[$

0,25 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط $x-1$

لأن $x>0$ على D_g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

0,25 ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0,1]$ ومتزايدة تماما على $[1,+\infty[$

جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

0,25 ومنه من أجل $x\in]0,+\infty[$ ، $g(x)\geq 3$

ومنه: $g(x)>0$ أي أنها موجبة تماما على D_g

الجزء II: $f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$

1/ لدينا f ق ا على $\mathbb{R}^*$ ولدينا: من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{\frac{2x}{x^2}x-\ln(x^2)}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-1-\frac{2-\ln(x^2)}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-x^2-2+\ln(x^2)}{x^2}\right)$$

$$=\frac{-(x^2+2-\ln(x^2))}{2x^2}$$

0,25 $$=-\frac{g(x^2)}{2x^2}.$$

* استنتاج إتجاه تغير الدالة f:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x^2)$

0,25 ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ ، $f'(x)<0$

وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

2/ لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$:

$f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}e-\frac{\ln((-x)^2)}{-2x}$

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}e-\frac{\ln(x^2)}{2x}$

0,25 $=\cancel{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}e+\cancel{\frac{\ln(x^2)}{2x}}-\cancel{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}e-\cancel{\frac{\ln(x^2)}{2x}}$

$=e$.

* تفسير النتيجة بيانيا: المنحنى (C_f)

0,25 يقبل النقطة $\Omega\left(0,\frac{e}{2}\right)$ مركز تناظر له

ب/ حساب النهايات:

0,25 . $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}(-x+e)\right) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x^2)}{x} = 0$

0,25 . $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x\overset{>}{\to}0} -\frac{\ln(x^2)}{x} = +\infty$

. استنتاج: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x)$

0,25 . $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{-x\to+\infty}\left[e - f(-x)\right] = +\infty$

0,25 . $\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{-x\overset{>}{\to}0}\left[e - f(-x)\right] = -\infty$

. جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

0,25

3/ لدينا:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}\right)\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[-\frac{\ln(x^2)}{x}\right]$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} -2\frac{\ln|x|}{x} = 0$$

0,25 إذن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

. دراسة الوضع النسبي:

يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x) - y = -\frac{\ln x^2}{x}$$

$-\frac{\ln x^2}{x} = 0$ يكافئ $-\ln x^2 = 0$ و $x \neq 0$

نجد: $\ln x^2 = 0$ ومنه $e^{\ln x^2} = e^0$

ومنه $x^2 = 1$ أي أن $x = 1$ أو $x = -1$

نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$\ln(x^2)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-\ln(x^2)$	$-$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)-y$	$+$	$-$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

عند $x=-1$: (C_f) يقطع (Δ) في $A\left(-1; \frac{e+1}{2}\right)$ ؛ عند $x=1$: (C_f) يقطع (Δ) في $B\left(1; \frac{e-1}{2}\right)$

1,5

ملاحظة: $\ln(x^2) = 2\ln|x|$

$$= \begin{cases} 2\ln x, & x\in]0,+\infty[\\ 2\ln(-x), & x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

4) أ/ يكافئ حل المعادلة: $f'(x) = -\frac{1}{2}$

وهي تكافئ: $-\frac{g(x^2)}{2x^2} = -\frac{1}{2}$ ومنه نجد:

$g(x^2) = x^2$ وعليه: $\cancel{x^2} + 2 - \ln x^2 = \cancel{x^2}$

ومنه: $\ln x^2 = 2$ وعليه: $x^2 = e^2$

0,5 إذن: $x = e$ أو $x = -e$

بما أن للمعادلة حلين إذن يوجد مماسين لـ (C_f) معامل توجيههما $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

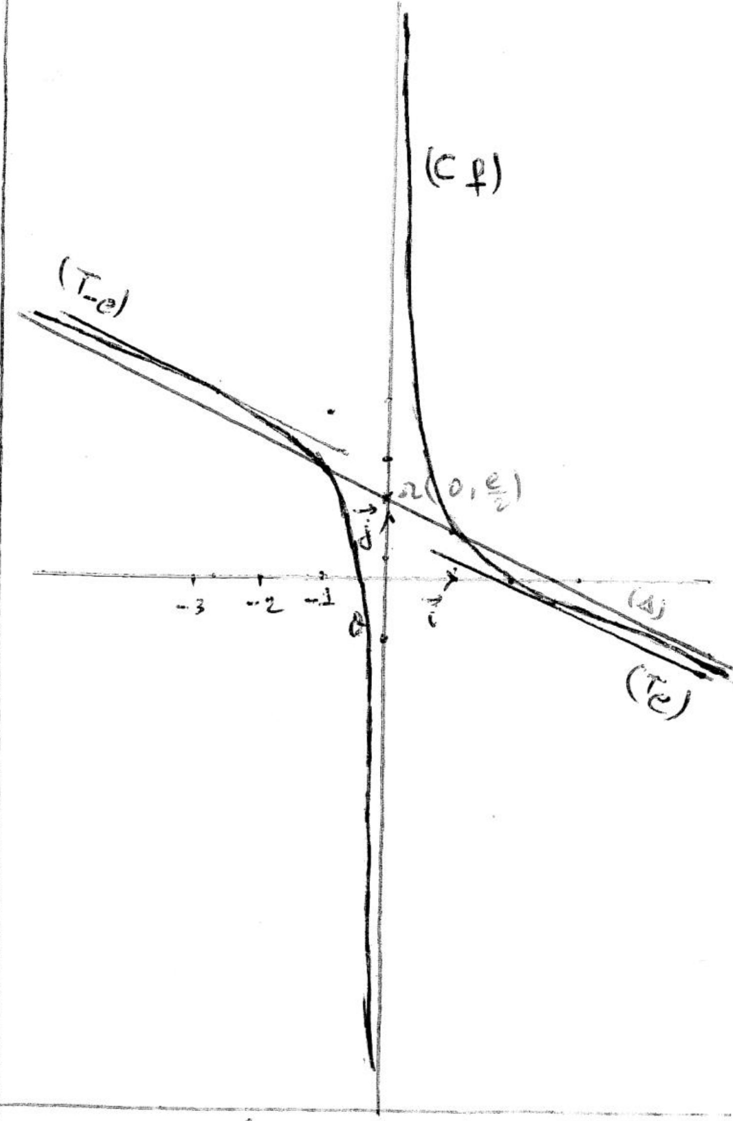
معادلة لكل مماس: نجد:

0,25 $(T_e): y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} - \frac{1}{e}$

0,25 $(T_{-e}): y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} + \frac{1}{e}$

0,5 ب/ نستعمل مبرهنة القيم المتوسطة.

0,75 5/ إنشاء المماسين (Δ) و (C_f)



6/ $x(e-2m)=\ln(x^2)$ تكافئ $f(x)=-\frac{1}{2}x+m$ ، وعليه مجموعة قيم m حتى تقبل المعادلة حلين وحيدين هي :

0,25

$$m\in\left]-\infty,\frac{e}{2}-\frac{1}{e}\right[\cup\left]\frac{e}{2}+\frac{1}{e},+\infty\right[$$

0,25

7) حساب $A(\alpha)$:

$$A(\alpha)=\int_1^\alpha [f(x)-y]\,dx$$

$$=\int_1^\alpha\left(-\frac{\ln x^2}{2x}\right)dx$$

0,25

$$=\int_1^\alpha \frac{\ln x^2}{2x}\,dx$$

$$A(\alpha)=\int_1^\alpha \frac{\cancel{2}\ln|x|}{\cancel{2}x}\,dx$$

$$=\int_1^\alpha \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$\ln|x|=\ln x$ لأن $x\in[1,\alpha]$

$$=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2$$

0,25

إذن :

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2\,cm^2$$

ملاحظة : $\frac{\ln x}{x}$ هي من الشكل $u'.u$ حيث : $u(x)=\ln x$ ، فدالة الأصلية من الشكل : $\frac{1}{2}[u(x)]^2$ نجد : $\frac{1}{2}(\ln x)^2$ دالة أصلية للدالة $\frac{\ln x}{x}$.

ملاحظة 02 : تصحيح : خطأ مطبعي في السؤال رقم 07 : نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (Cf) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$ و $x=1$ و $x+2y=e$ أي معادلة (Δ)

الموضوع الثاني

الجواب الأول : .... 04 تقا.ل

1) أ/ نختار عشوائيا أحد الصندوقين

$$\frac{1}{2} \to U_1$$
$$\frac{1}{2} \to U_2$$

. عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق U_1 : لدينا السحب بدون إرجاع ومنه ترتيبة وعليه نجد:

0,25 $A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = 56$.

. عدد الحالات الممكنة للسحب من الصندوق U_2 : السحب بالإرجاع وعليه لدينا قائمة: n^p نجد:

0,25 $5^2 = 25$.

حساب $P(A)$ حيث:

A "سحب كرتين من نفس اللون"

معناه" كرتان حمراوان من U_1 أو كرتان خضراوان من U_1 (ترتيبة).

أو: كرتان حمراوان من U_2 أو كرتان خضراوان من U_2 (قائمة)

وعليه نجد:

0,25 $$P(A) = \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{A_5^2+A_3^2}{56}}_{U_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{3^2+2^2}{25}}_{U_2}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{20+6}{56} + \frac{1}{2}\times\frac{9+4}{25}$$

0,25 $P(A) = \frac{689}{1400}$.

حساب $P(B)$ حيث:

B "سحب كرتان تحملان نفس الرقم".

معناه: كرتان تحملان الرقم 0 من U_1

أو كرتان تحملان الرقم 1 من U_1.

أو: كرتان تحملان الرقم 0 من U_2 أو تحملان الرقم 1 من U_2 أو تحملان الرقم 2 من U_2

ملاحظة: في الصندوق U_1 توجد كرة واحدة فقط تحمل الرقم 2 (بدون إرجاع) أما في الصندوق U_2 يمكن الحصول على كرتين بالرقم 0 والرقم 2 (بالإرجاع). وعليه يكون:

0,25 $$P(B) = \frac{1}{2}\times\frac{A_2^2+A_5^2}{56} + \frac{1}{2}\times\frac{1^2+3^2+1^2}{25}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2+20}{56} + \frac{1}{2}\times\frac{1+9+1}{25}$$

0,25 نجد: $P(B) = \frac{583}{1400}$.

ب/ نقول أن الحدثين A و B مستقلان إذا وفقط إذا كان: $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ وعليه: يجب حساب $P(A\cap B)$:

ليكن الحدث:

0,5 $A\cap B$ "سحب كرتين من نفس اللون وتحملان نفس الرقم".

معناه: كرتين حمراوين من U_1 تحملان الرقم 1

أو: كرتين خضراوين من U_1 تحملان الرقم 1.

أو: // // U_2 // // 0

أو: // // U_2 // // 1

أو: // حمراوين // U_2 // // 2

أو: // // U_2 // // 1

(1)

وعليه:

$$P(A\cap B) = \frac{1}{2}\times\frac{A_3^2+A_2^2}{56}+\frac{1}{2}\times\frac{2^2+1^2+1^2+1^2}{25}$$

$$= \frac{4}{56}+\frac{7}{50}$$

نجد: $P(A\cap B) = \frac{37}{175} \simeq 0,211$

ومن جهة أخرى:

$$P(A)\times P(B) = \frac{689}{1400}\times\frac{583}{1400} \simeq 0,205$$

ومنه: $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$

أي أن: A و B غير مستقلين.

ج/ إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين.

حساب احتمال أن تكونا من الصندوق U_1:

معناه: حساب $P_{\bar{A}}(U_1)$.

حيث: $\bar{A}$ الحدث العكسي لـ A.

نعلم أن: $P(A)+P(\bar{A}) = 1$.

0,25 ومنه: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$$= 1-\frac{689}{1400} = \frac{711}{1400}.$$

ولدينا: $P_{\bar{A}}(U_1) = \frac{P(\bar{A}\cap U_1)}{P(\bar{A})}$.

حيث:

$U_1\cap\bar{A}$ "سحب كرتين مختلفتين في اللون من U_1" معناه: سحب كرة حمراء وكرة خضراء من U_1 (مع مراعاة الترتيب)

$$P(U_1\cap\bar{A}) = \frac{1}{2}\times\frac{A_5^1\times A_3^1+A_3^1\times A_5^1}{56}$$

نجد: $P(U_1\cap\bar{A}) = \frac{15}{56}$.

ومنه: $P_{\bar{A}}(U_1) = \dfrac{\frac{15}{56}}{\frac{711}{1400}} = \frac{15}{56}\times\frac{1400}{711}$ 0,25

نجد: $P_{\bar{A}}(U_1) = \frac{125}{237}$.

2) عدد الحالات الممكنة للسحب من U_3: لدينا توفيقة.

0,25 $C_{13}^2 = \frac{13!}{2!\times 11!} = 78$.

أ/ قيم المتغير العشوائي X:

$(0,0)$; $(0,1)$, $(0,2)$; $(1,1)$; $(1,2)$; $(2,2)$

0 1 2 3 4

إذن:

0,5 $X = \{0,1,2,3,4\}$.

ومنه:

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{78} = \frac{3}{78}.$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1\times C_8^1}{78} = \frac{24}{78}.$$

0,5 $$P(X=2) = \frac{C_3^1\times C_2^1+C_8^2}{78} = \frac{34}{78}$$

$$P(X=3) = \frac{C_8^1\times C_2^1}{78} = \frac{16}{78}.$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^2}{78} = \frac{1}{78}.$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

ب/ $E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P(X=x_i)$

$$= 0\times\frac{3}{78}+1\times\frac{24}{78}+2\times\frac{34}{78}+3\times\frac{16}{78}+4\times\frac{1}{78}$$

0,25 $$= \frac{24+68+48+4}{78} = \frac{144}{78} \simeq 1,84$$

الجواب الثاني:

1) أ/

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$$
$$= \frac{u_n+4v_n}{5} - \frac{u_n+3v_n}{4}$$
$$= \frac{4(u_n+4v_n) - 5(u_n+3v_n)}{20}$$
$$= \frac{4u_n+16v_n-5u_n-15v_n}{20}$$
$$= \frac{-u_n+v_n}{20} = \frac{v_n-u_n}{20}$$
$$= \frac{1}{20} w_n$$

0,5 إذن (w_n) م-هـ أساسها $\boxed{q=\frac{1}{20}}$

0,25 وحدها الأول: $w_0 = v_0 - u_0 = 6+13 = 19$

ب/ بما أن $q=\frac{1}{20}>0$ و $u_0=19>0$

0,25 فإن من أجل كل $n\in IN$: $w_n>0$

0,25 و $-1 < q=\frac{1}{20} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

وعليه (w_n) متقاربة.

2/ أ، ب: ندرس اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n).

$$u_{n+1}-u_n = \frac{u_n+3v_n}{4} - u_n$$
$$= \frac{-3u_n+3v_n}{4}$$
$$= +\frac{3}{4}(v_n-u_n) = +\frac{3}{4} w_n >0$$

0,25 وعليه (u_n) ~~[illegible]~~ متزايدة تماما على IN

$$v_{n+1}-v_n = \frac{u_n+4v_n}{5} - v_n = \frac{u_n-v_n}{5}$$
$$= -\frac{(v_n-u_n)}{5}$$
$$= -\frac{1}{5} w_n <0$$

0,25 وعليه: (v_n) متناقصة تماما على IN.

0,25 و: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

إذن: (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان.

3) $T_{n+1}-T_n = 4u_{n+1}+15v_{n+1}-4u_n-15v_n$
$$= 4(u_{n+1}-u_n)+15(v_{n+1}-v_n)$$
$$= 4\cdot\frac{3}{4} w_n + 15\cdot\left(-\frac{1}{5} w_n\right)$$

0,25 $= 3w_n - 3w_n = 0$

إذن (T_n) متتالية ثابتة.

ب/ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

وعليه:
$$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 4\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 15\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$$
$$= 4\ell+15\ell = T_0$$

0,25 ومنه: $19\ell = 38$ ومنه $\boxed{\ell=2}$

$T_0 = 4u_0+15v_0 = 4(-13)+15\times 6 = 38$

4) $x_n = \ln(w_n)$

$$x_{n+1}-x_n = \ln(w_{n+1}) - \ln(w_n)$$
$$= \ln\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right) = \ln\frac{1}{20}$$

0,5 $= -\ln 20$

إذن (x_n) م-ح أساسها $(r=-\ln 20)$ وحدها الأول

0,25 $x_0 = \ln(w_0)$
$x_0 = \ln 19$.

③

ب/ $S_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n$

$= \frac{(X_0 + X_n)(n+1)}{2}$

0,25 $= \frac{(\ln 19 + \ln 19 - n\ln 20)(n+1)}{2}$

$= \frac{(2\ln 19 - n\ln 20)(n+1)}{2}$

$P_n = (v_0 - u_0)\times(v_1 - u_1)\times \dots \times(v_n - u_n)$

$= w_0 \times w_1 \times \dots \times w_n$

$= e^{x_0}\times e^{x_1}\times \dots \times e^{x_n}$

$= e^{x_0 + x_1 + \dots + x_n}$ | $x_n = \ln(w_n)$ ومنه: $w_n = e^{x_n}$

0,25 $= e^{S_n}$

$P_n = e^{\frac{(n+1)(2\ln 19 - n\ln 20)}{2}}$

0,25 نجد: $\lim_{n\to+\infty} P_n = 0$

الجواب الثالث: .... 05 نقاط

① أ/ كتابة z_A على الشكل الأسي:

$|z_A| = \sqrt{2}$

لتكن θ عمدة لـ z_A:

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

0,5 إذن: $\boxed{z_A = \sqrt2 e^{i\frac{\pi}{4}}}$

• z_C على الشكل الأسي:

0,25 $z_C = 2z_B = 2\sqrt2 e^{-i\pi/4}$

④

ج/ $\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sqrt2 e^{i\pi/4}}{\sqrt2}\right)^{2n} = e^{i2n\pi/4}$

حتى يكون $\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^{2n}$ عددا حقيقيا

موجبا يجب أن يكون: $Arg\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^{2n} = 2k\pi$

مع $k\in\mathbb{Z}$.

0,5 ومن جهة أخرى: $Arg\left[\left(\frac{z_A}{\sqrt2}\right)^{2n}\right] = \frac{2n\pi}{4}$

ومنه: $\frac{2n\pi}{4} = 2k\pi$ وعليه

نجد: $\frac{n}{4} = k$ ، $n = 4k$

حيث: $k\in\mathbb{N}$ لأن n طبيعي

$n\in\{0, 4, 8, \dots\}$.

2) أ/

0,25 $AD = |z_D - z_A| = |2 - i| = \sqrt5$

0,25 $BD = |z_D - z_B| = |2 + i| = \sqrt5$

0,25 $CD = |z_D - z_C| = |1 + 2i| = \sqrt5$

بما أن: $AD = BD = CD$ فإن

النقط A، B و C تنتمي إلى

الدائرة (γ) ذات المركز D

0,25 ونصف القطر $\boxed{r = \sqrt5\ cm}$.

ب/ حساب: $Arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}\right)$

أولا نحسب:

$\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D} = \frac{-1-2i}{-2+i} = \frac{1+2i}{2-i}$

0,25 $= \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{\cancel{2}+i+4i-\cancel{2}}{5}$

$= \frac{5i}{5} = i$

ومنه: $\arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

0,25 المستقيمان متعامدان أي: $(AD)\perp(CD)$

إذا المثلث ACD قائم ومتساوي الساقين لأن $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})=\frac{\pi}{2}$ و $AD=CD$.

ج/ AECD متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DC}$

ومنه: $z_E-z_A=z_C-z_D$ وعليه نجد:

0.25 $z_E=-1-2i+1+i=-i$

* استنتاج نوعه: لدينا مما سبق $AD=CD$

0.25 و $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC})=\frac{\pi}{2}$ وعليه فالرباعي AECD عبارة عن مربع.

3) أ/ $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$ إذن T دوران 0.25

0.25 زاويته $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$.

نعين لاحقة المركز:

$\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-2i}{1-i}=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1-i=z_B$

0.25 إذن مركز الدوران هو: النقطة B.

ب/ F صورة O بالتحويل T معناه:

0.25 $z_F=i\cancel{z_O}-2i=-2i$

لدينا: $\overrightarrow{AB}=z_B-z_A=1-i-1-i=-2i$؛ أي $\overrightarrow{AB}\binom{0}{-2}$

0,25 $\overrightarrow{CF}=z_F-z_C=-2i-2+2i=-2$ ؛ $\overrightarrow{CF}\binom{-2}{0}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}=0\times(-2)+0\times(-2)=0$ وعليه $(AB)\perp(CF)$

4) $\arg\left(\frac{z-z_B}{\bar{z}-\frac{1}{2}\bar{z}_C}\right)=2k\pi \ / k\in\mathbb{Z}$

تكافئ: $\arg\left(\frac{z-z_B}{\bar{z}-\bar{z}_B}\right)=2k\pi$

ومنه، $\arg\left(\frac{z-z_B}{\overline{z-z_B}}\right)=2k\pi$

0,25 $\arg(z-z_B)-\arg(\overline{z-z_B})=2k\pi$

ومنه: $2\arg(z-z_B)=2k\pi$ وعليه

$\arg(z-z_B)=k\pi$ أي: $(\vec{u},\overrightarrow{BM})=k\pi$

مع $k\in\mathbb{Z}$، وعليه طبيعة (Γ) هي

المستقيم (BM) الموازي لحامل محور الفواصل ماعدا النقطة B.

التمرين الرابع. 07 نقاط.

الجزء الأول:

0,25 + 0,25 1) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

2) g معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

0,75 $g'(x)=(x^2-4x+4)e^{-x}=(x-2)^2e^{-x}\geq 0$

وعليه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

* جدول التغيرات.

0,25

x	$-\infty$	$0,35$ α $0,36$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+		0	+
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	$1-2e^{-2}\simeq 0,7$	↗ 1

0,5 3) باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة نجد $g(\alpha)=0$ حيث $0,35<\alpha<0,36$

4) لما $x\in]-\infty,\alpha[$ ، $g(x)<0$.

لما $x\in]\alpha,+\infty[$ ، $g(x)>0$ ، ولما $x=\alpha$ ، $g(x)=0$.

ونلخص جدول الإشارة:

0,25

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

الجزء الثاني :

0,25 + 0,25 1/ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2/ f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

0,25 $f'(x)=1+2xe^{-x}-e^{-x}(x^2+2)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}=g(x)$

3/ بما أن $f'(x)=g(x)$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

0,25 وعليه لما $x\in]-\infty,\alpha]$ ، f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,\alpha]$.

لما $x\in[\alpha,+\infty[$ ، f متزايدة تماما على $[\alpha,+\infty[$.

• جدول التغيرات

0,25

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4/ $f(\alpha)=\alpha-1+(\alpha^2+2)e^{-\alpha}$ ، $g(\alpha)=0$ معناه $1-(\alpha^2-2\alpha+2)e^{-\alpha}=0$

0,25 ومنه $(\alpha^2+2)e^{-\alpha}=1+2\alpha e^{-\alpha}$ بالتعويض في $f(\alpha)$ نجد :

$f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$.

• حصر العدد $f(\alpha)$.

0,25 $0,35<\alpha<0,36$ ومنه $-0,36<-\alpha<-0,35$ وعليه $e^{-0,36}<e^{-\alpha}<e^{-0,35}$

ومنه $0,35(1+2e^{-0,36})<f(\alpha)<0,36(1+2e^{-0,35})$

نجد : $0,83<f(\alpha)<0,86$.

5/ $\lim_{x\to+\infty} f(x)-y=0$ وعليه $(\Delta): y=x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

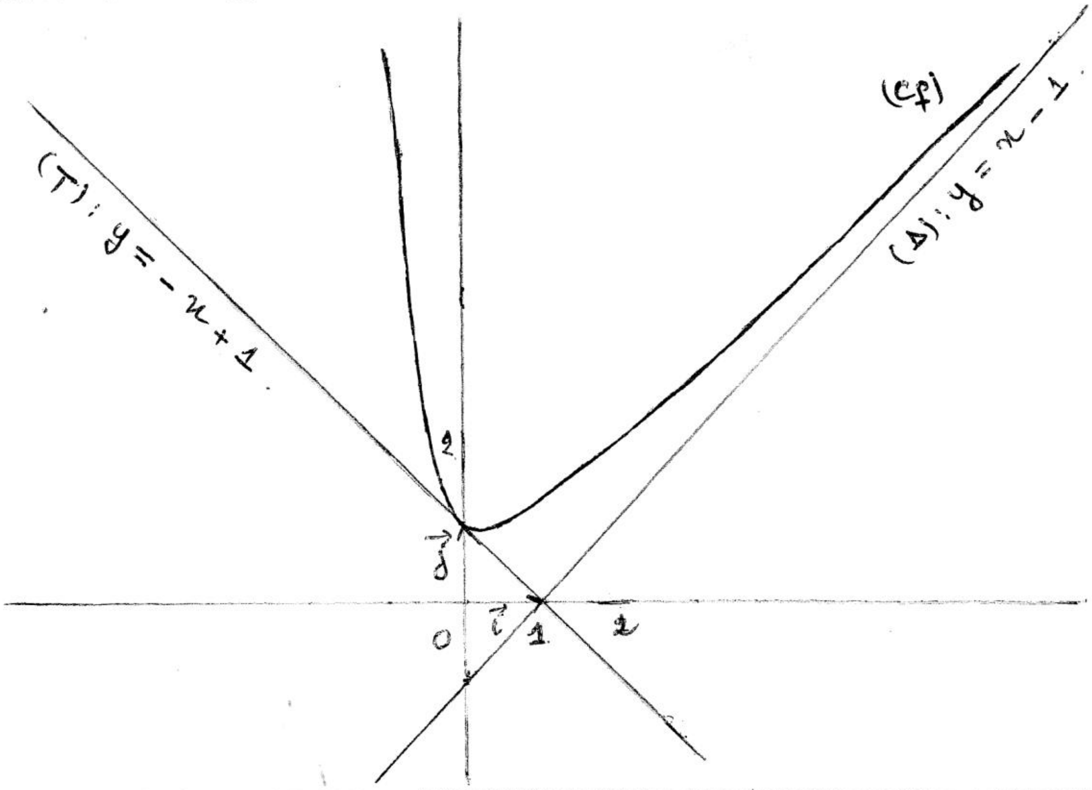
0,5 • الوضع النسبي : يكفي دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$.

$f(x)-y=(x^2+2)e^{-x}>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ وعليه

(C_f) يقع فوق (Δ) .

0,25 6/ $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)=-x+1$.

0,75 07/ إنشاء (Δ) ، (T) و (C_f) .



الجزء الثالث :

1/ حتى تكون P دالة أصلية لـ L يجب أن يكون : $P'(x) = L(x)$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $P'(x) = \left(ax^2 + (b-2a)x + (c-b)\right)e^{-x}$.

بالمطابقة مع عبارة $L(x)$ نجد :

0,75 $\begin{cases} a = 1. \\ b - 2a = 0 \\ c - b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1. \\ b = 2 \\ c = 4. \end{cases}$, $P(x) = 1 - (x^2 + 2x + 4)e^{-x}$.

/2

$$A(\alpha) = \int_{-\alpha}^{0} (f(x) - y)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} (x^2 + 2)e^{-x}\,dx.$$

0,25 $$= \left[1 - (x^2 + 2x + 4)e^{-x}\right]_{-\alpha}^{0} = -3 - (\alpha^2 - 2\alpha + 4)e^{\alpha}.$$

$$A(\alpha) = -4 + (\alpha^2 - 2\alpha + 4)e^{-\alpha}.$$

3/ إثبات أن : $A(\alpha) = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

$A(\alpha) = 4\left(-4 + (\alpha^2 - 2\alpha + 4)\right)e^{+\alpha}$

$= -16 + 4\left[(\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{\alpha} + 2e^{\alpha}\right]$

نعلم أن : $g(\alpha) = 0$

ومنه $1 - (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = 0$

0,25 $= -16 + 4\left(e^{\alpha} \cdot e^{\alpha} + 2e^{\alpha}\right)$

ومنه $(\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = 1$.

$$\boxed{A(\alpha) = (4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16)\,cm^2}$$

إذن : $e^{\alpha} = (\alpha^2 - 2\alpha + 2)$