تجميعة البكالوريات التجريبية

لشعبتي الرياضي و التقني رياضي

لمختلف ثانويات الوطن

التحضير الجيد لبكالوريا 2017

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية ميلة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2015

الشعبة : رياضيات — مقاطعة : ميلة 1

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 4 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

☜ الموضوع الأول

✓**التمرين الأول:(03.5 نقاط)**

1) جد جميع الثنائيات المرتبة (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث: $x^3-y^3=631$

2) ا- ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد 111 على 7 .

ب- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 7

3) α عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كمايلي: $\alpha=\overline{999888777666555444333222111}$

ا- بيّن أنّ α يكتب بدلالة العدد 111.

ب- ما هو باقي قسمة العدد α على 7.

✓**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطة $A(-1;1;0)$ والمستوى (P) ذو المعادلة $x-2y+2z-6=0$.

والمستقيم (D) حيث : $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=3t-2 \\ z=2t-2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي له.

1) أ- أحسب المسافة بين النقطة A والمستوى (P) و استنتج أن A لا تنتمي إلى (P).

ب- أثبت أن المستقيم (D) يشمل النقطة A و يوازي المستوى (P).

2) أ- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) ؛ الذي يشمل النقطة A و يعامد المستوى (P) .

ب- عين إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (P) .

جـ- عين تمثيلا وسيطي للمستقيم (Δ_0) الذي يشمل النقطة B ويوازي (D) .

ثم اثبت أنّ (Δ_0) محتوى في المستوى (P) .

3) تعطى النقطة $C(2;-1;2)$. أحسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D).

✓**التمرين الثالث : (06 نقاط)**

في كل يلي المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A_2, A_1, A_0 لواحقها على الترتيب: z_2, z_1, z_0 حيث $z_2 = -4-i, z_1 = -1-4i, z_0 = 5-4i$.

1) ا- بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث: $S\left(A_0\right) = A_1$ و $S\left(A_1\right) = A_2$.

ب- اثبت أنّ العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)z + \frac{-3+i}{2}$.

ج- استنتج النّسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S .

د- نعتبر النقطة M لاحقتها z حيث $z \neq \omega$ و صورتها $M'(z')$ بواسطة S .

تحقق من أنّ $\omega - z' = i\left(z - z'\right)$.واستنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n . نعرف متتالية النقط $\left(A_n\right)$ كما يلي: $A_{n+1} = S\left(A_n\right)$ و نضع $v_n = A_nA_{n+1}$

ا) مثل النقط A_2, A_1, A_0 وأنشئ هندسيا النقط A_6, A_5, A_4, A_3 .

ب) برهن أنّ المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $\frac{\sqrt{2}}{2}$.عيّن حدها الأوّل v_0

3) المتتالية $\left(U_n\right)$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

ا) عبر عن v_n بدلالة n .

ب) هل المتتالية $\left(U_n\right)$ متقاربة؟

4) احسب بدلالة n الطول ℓ_n حيث: $\ell_n = \Omega A_n$ ثمّ عيّن أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$.

✓**التمرين الرابع : (06.5 نقاط)**

الدالتان العدديتان f و g معرفتان على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي:

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1-\ln x}{x} \quad \text{و} \quad g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) أثبت أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) أحسب $g(1)$ ثم استنتج ،حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

2) أ) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$. ثم فسّر هندسيا النتيجة .

ب) أثبت أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x + 1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

جـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f).

5) نضع ،من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - (2x+1))dx$

أ) أحسب U_n ، بدلالة n، ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n) .

ب) لتكن A مساحة حيز المستوى ؛المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيم (Δ) وبالمستقيمين الذين معادلتان لهما: $x=1$, $x=e^2$. تحقق من أن : $A=(U_0-U_1)\ ua$

6) نعتبر الدالة h،المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، بالعلاقة : $h(x)=x^2(1+\ln x)-3x+2$

أ) أثبت أنه ،من أجل كل x من $]0;+\infty[$، فإن : $\frac{h(x)}{x}=f(\frac{1}{x})-4$.ثم استنتج أن $h(x)\geq 0$

ب) عين xبحيث يكون $h(x)=0$.

☜الموضوع الثاني

✓التمرين الأول:(03.5 نقاط)

1– حل ،في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0$.

2– المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب، z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_c=1-i\sqrt{3}$

أ – اكتب شكلا أسيا لكل من z_B و z_C .

ب– أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}$.

ج–عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $z_B{}^n$ عددا حقيقيا سالبا .

3– أ– اكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب– استنتج أن C هي صورة B بتحويل نقطي ، يطلب تعيينه بدقة ثمّ عيّن عناصره المميزة .

4– حدد مع التعليل طبيعة الرباعي $OBAC$.

✓التمرين الثاني:(03.5 نقطة)

1) حلل العدد 320 إلى جداء عوامله الأوّلية ثمّ عيّن مجموعة قواسمه الطبيعية.

2) x و y عددان طبيعيان أوّليان فيما بينهما. اثبت أنّ xy و $(x+y)$ أوّليان فيما بينهما.

3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث: $7(a+b)^2=320m$ حيث $m=PPCM(a;b)$

عيّن القيم الممكنة لكلّ من العددين a و b.

✓التمرين الثالث: (06 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(2;1;1)$, $I(3;-1;0)$ و (P) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$MA^2-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}=0$$

1) بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (P) وأنّ (P) هي المستوي ذو المعادلة: $x-2y-z+1=0$.

2) جد معادلة لسطح الكرة (S) ذات المركز I وتشمل النقطة A .

3) ليكن المستوي (P') المعرف بالمعادلة: $2x-y+z-4=0$.

أ) بيّن أنّ (P') يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r.

ب) لتكن النقطة $B(2;-2;-2)$, تحقق من أنّ AB هو أحد أقطار الدائرة (C).

ت) جد معادلة ديكارتيه للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B .

4) عيّن المجموعة (Σ) للنقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$$(x-2y-z+1)^2+(2x-y+z-4)^2=0.$$

✓التمرين الرابع : (07 نقاط)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(x-1)e^x+1$

1) ادرس تغيرات g .

2) عين ،تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$ واستنتج أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، فإن : $xe^x+1>0$

3) تحقق أنه ،من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $g(x)-g'(x)=1-e^x$ (g' هي الدالة المشتقة للدالة g)

استنتج $\int_0^1 g(x)dx$ وفسره هندسيا.

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{xe^x}{xe^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجتين.

2) بين أنه ،من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2}$ واستنتج جدول تغيرات f

3) بين أن $y=x$ هي معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في المبدأ.

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x)-x=\dfrac{-x.g(x)}{xe^x+1}$ واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (T)

5) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f)

III. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ،فإن: $u_n>0$

2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

❀بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا 2015 ❀

متقن الشهيد سرار عبد الحميد - زغاية 2015 - 2014

الأستاذ : ش- أ

تصحيح البكالوريا التجريبي دورة ماي 2015 الشعبة : رياضيات

الإجابة	العلامة

الموضوع الأول

التمرين الأول

❶ إيجاد جميع الثنائيات المرتبة (x,y) من الاعداد الطبيعية والتي تحقق المعادلة $x^3-y^3=631.....(E)$

بالقسمة الإقليدية للعدد x^3-y^3 على $x-y$ نجد : $x^3-y^3=(x-y).(x^2+y^2+xy)$

المعادلة (E) تصبح $(x-y).(x^2+y^2+xy)=631$

بما أن 631 عدد أولي أي 1 . 631 =631 فإن $\begin{cases}(x-y)=1\\(x^2+y^2+xy)=631\end{cases}$ لأن $(x^2+y^2+xy)\succ(x-y)$

و x , y عددان طبيعيان .

إذن $y=x-1$ وبالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة نجد $x^2-x-210=0$ ولدينا $\Delta=841$ ومنه $\sqrt{\Delta}=29$

لدينا إذن $x_1=\frac{1-29}{2}=-14$ (حل مرفوض) و $x_2=\frac{1+29}{2}=15$ بالتعويض نجد $y=14$

ومنه توجد ثنائية وحيدة هي حلول المعادلة ومنه $S=\{(15,14)\}$

❷ أ / **إيجاد باقي قسمة 111 على 7 :** 111=15.7+6 ومنه : $111\equiv 6[7]$

ب / تعيين حسب قيم n بواقي قسمة 10^n

$10^0\equiv 1[7]$, $10^1\equiv 3[7]$, $10^2\equiv 2[7]$, $10^3\equiv 6[7]$, $10^4\equiv 4[7]$, $10^5\equiv 5[7]$, $10^6\equiv 1[7]$

ومنه جدول البواقي كما يلي

قيم n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
البواقي	1	3	2	6	4	5

❸ α عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كما يلي $\alpha=999888777666555444333222111$

أ- كتابة α بدلالة العدد 111 :

بقسمة العدد α على 111 نجد : $\alpha=111.(900800700600500400300 2001)$

ب – باقي قسمة α على 111 : باستعمال السؤال ❷ أ / و ❷ب/ لدينا

$$111.(900800700600500400300 2001)\equiv 6.(1.10^0+2.10^3+3.10^6+4.10^9+5.10^{12}+6.10^{15}+7.10^{18}+8.10^{21}+9.10^{24})$$

ومنه $\alpha\equiv 111.(900800700600500400300 2001)\equiv 6.(1.+2.6+3.1+4.6+5.1+6.6+7.1+8.6+9.1)$

لدينا إذن $\alpha\equiv 870[7]$ لكن $870\equiv 2[7]$ ومنه لدينا $\alpha\equiv 2[7]$

التمرين الثاني

لدينا $A(-1,1,0)$, $(p):x-2y+2z-6=0$ و $(D):\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-2\\z=2t-2\end{cases}$

❶ أ – **المسافة بين A و (p)** هي : $d(A,p)=\frac{|-1-2.(1)+2.(0)-6|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(2)^2}}\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$

$d(A,p)=3\succ 0$ ومنه $A\notin(p)$

ب – إثبات أن (D) يشمل A ويوازي (p) :

لدينا $\begin{cases} -1 = 2t - 3 \\ 1 = 3t - 2 \\ 0 = 2t - 2 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$ أي $A \in (D)$

- اثبات أن $(D)//(p)$:

$\vec{u}(2,3,2)$ شعاع توجيه ل (D) , $\vec{n}(1,-2,2)$ شعاع ناظمي ل (p) ولدينا $\vec{u}.\vec{n} = 2.1 + 3.(-2) + 2.3 = 0$

ومنه $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدان ومنه $(D)//(p)$.

❷ **أ – تمثيل وسيطي ل (Δ) الذي يشمل A ويعامد (p) :**

(Δ) يعامد (p) ومنه $\vec{n}(1,-2,2)$ هو شعاع توجيه ل (Δ) ومنه : $(\Delta): \begin{cases} x = t' - 1 \\ y = -2t' + 1 \\ z = 2t' \end{cases}$

ب/ إحداثيات B نقطة تقاطع (Δ) و (p) :

$\begin{cases} x = t' - 1 \\ y = -2t' + 1 \\ z = 2t' \\ x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$ ومنه لدينا : $(t'-1) - 2(-2t'+1) + 2(2t') - 6 = 0$ ومنه $t' = 1$ بالتعويض بقيمة t' في

الجملة نجد $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$ أي $B(0,-1,2)$ نقطة تقاطع (Δ) و (p).

ج – تمثيل وسيطي ل (Δ_0) الذي يشمل B ويوازي (D) :

$(\Delta_0)//(D)$ ومنه شعاع توجيه (D) **هو شعاع توجيه ل** (Δ_0) **أي** $\vec{u}(2,3,2)$ شعاع توجيه ل (Δ_0) .

ومنه $(\Delta_0): \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$.

- **إثبات أن** $(\Delta_0) \subset (p)$ **:** يكفي إيجاد نقطتين من (Δ_0) **تنتميان إلى** (p)

لدينا $B(0,-1,2)$ تنتمي إلى (Δ_0) و $B(0,-1,2)$ تحقق معادلة (p) فهي تنتمي إلى (p) .

بوضع $t = 1$ في التمثيل الوسيطي ل (Δ_0) **نجد نقطة أخرى** $B(2,2,4)$ من (Δ_0) وتحقق معادلة (p) أيضا .

بما أنه توجد نقطتان من المستقيم (Δ_0) **تنتميان إلى** (p) فإن $(\Delta_0) \subset (p)$

❸ **حساب المسافة بين النقطة $C(2-1,2)$ والمستقيم (D):**

المسافة بين النقطة $C(2,-1,2)$ والمستقيم (D) هي الطول CH حيث H هي المسقط العمودي ل C على (D)

يكفي إيجاد إحداثيات النقطة H ثم حساب $\|\overrightarrow{CH}\|$.

H تنتمي إلى (D) ومنه فإن $\begin{cases} x_H = 2t - 3 \\ y_H = 3t - 2 \\ z_H = 2t - 2 \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} x_H - x_C \\ y_H - y_C \\ z_H - z_C \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 2t - 5 \\ 3t - 1 \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$

وشعاع توجيه (D) هو $\vec{u}(2,3,2)$ و $\overrightarrow{CH}\vec{u} = 0$ وهذا يعني أن $2.(2t-5) + 3.(3t-1) + 2.(2t-4) = 0$

ومنه $t=\frac{21}{17}$ وبالتعويض بقيمة t نجد $\begin{cases} x_H=\frac{-9}{17} \\ y_H=\frac{29}{17} \\ z_H=\frac{8}{17} \end{cases}$ ومنه $CH=\sqrt{\left(-\frac{9}{17}-2\right)^2+\left(\frac{29}{17}+1\right)^2+\left(\frac{8}{17}-2\right)^2}$

التمرين الثالث

لدينا النقط A_0, A_1, A_2 لواحقها على الترتيب: z_0, z_1, z_2 حيث $z_0=5-4i, z_1=-1-4i, z_2=-4-i$.

❶ ا- بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث: $S(A_0)=A_1$ و $S(A_1)=A_2$:

بما أن $A_0 \neq A_1$ و $A_1 \neq A_2$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A_0 إلى A_1 ويحول A_1 إلى A_2

ب – اثبات أنّ العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$:

لدينا $\begin{cases} S(A_0)=A_1 \\ S(A_1)=A_2 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} z_1=az_0+b....(1) \\ z_2=az_1+b....(2) \end{cases}$ وبطرح العبارتين نجد $z_2-z_1=a(z_1-z_0)$ ومنه

$a=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0}=\frac{1-i}{2}$ بالتعويض بقيمة a في المعادلة (1) أو (2) نجد $b=\frac{-3+i}{2}$

ومنه العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$

ج – استنتاج النسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S :

- نسبة التشابه هي $|a|=\left|\frac{1-i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- زاوية التشابه S هي $\arg(a)=\arg\left(\frac{1-i}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$
- لاحقة المركز Ω هو w حيث $w=\frac{b}{1-a}=\frac{\frac{-3+i}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{-3+i}{1+i}$ وبالضرب في مرافق المقام نجد

$w=-1+2i$

د - النقطة M لاحقتها z حيث $z \neq \omega$ و صورتها $M'(z')$ بواسطة S

- التحقق أن $\omega-z'=i(z-z')$.واستنتاج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

$$\frac{w-z'}{z-z'}=\frac{-1+2i-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}{z-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}=i$$

- لدينا $\left|\frac{w-z'}{z-z'}\right|=|i|=1$ معناه المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين ..... (1)

لدينا أيضا $\arg\left(\frac{w-z'}{z-z'}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ معناه المثلث $\Omega MM'$ قائم في M' .....(2) (لاحقة M' موجودة في البسط والمقام).

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين و قائم في M' .

❷ من أجل كل عدد طبيعي n , نعرف متتالية النقط (A_n) كما يلي: $A_{n+1}=S(A_n)$ و نضع $v_n=A_nA_{n+1}$

ا) **تمثيل النقط** A_0, A_1, A_2 **وانشاء هندسيا النقط** A_3, A_4, A_5, A_6 .

- لدينا $A_0(5,-4), A_1(-1,-4), A_2(-4,-1)$
- من جهة أخرى لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $S(A_0)=A_1$, $S(A_1)=A_2$, $S(A_2)=A_3$ .....الخ

ومنه نستنتج أن $(S0S)(A_0)=A_2$, $(S0S)(A_1)=A_3$ و $(S0S)(A_2)=A_4$.....الخ

أي التشابه $S0S$ يحول A_0 إلى A_2 و يحول A_1 إلى A_3 ويحول A_2 إلى A_4 ...الخ

حيث $S0S$ هو مركب تشابهين نسبته جداء النسبتين وزاويته هي مجموع الزاويتين .

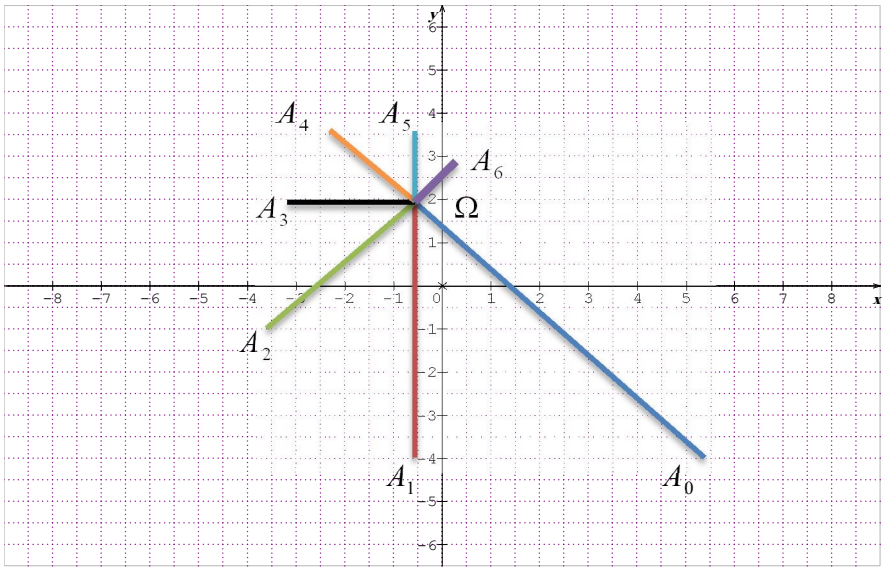
بما ان نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن نسبة التشابه $S0S$ هي $\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

بما ان زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$ فإن زاوية التشابه $S0S$ هي $\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$

لدينا مثلا : $\Omega A_2=\frac{1}{2}\Omega A_0$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_0},\overrightarrow{\Omega A_2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_2 صورة A_0 بالتشابه $S0S$

$\Omega A_3=\frac{1}{2}\Omega A_1$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_1},\overrightarrow{\Omega A_3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_3 صورة A_1 بالتشابه $S0S$ ..... الخ

<u>الإنشاء :</u>



ب) **اثبات أنّ المتتالية** (v_n) **هندسية أساسها** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **.وتعيين حدها الأوّل** v_0

لدينا $v_n=A_nA_{n+1}$, ومنه $v_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}$ ومنه $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{A_{n+1}A_{n+2}}{A_nA_{n+1}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}}{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

لأن $\begin{cases}S(A_n)=A_{n+1}\\S(A_{n+1})=A_{n+2}\end{cases}$ أي $A_{n+1}A_{n+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها الأول $v_0=A_0A_1=\sqrt{(-1-5)^2+(-4+4)^2}=6$

❸ المتتالية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n=v_0+v_1+...+v_n$

ا) التعبير عن v_n بدلالة n: $v_n = v_0.q^n$ ومنه $v_n = 6.\dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ أي $v_n = 12.\dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2-\sqrt{2}}$

ب) بما أن $-1 \prec q = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \prec 1$ فإن (v_n) متقاربة وبما أن U_n هي مجموع حدود متتابعة لحدود (v_n) المتقاربة فإن (U_n) متقاربة.

❹ **حساب بدلالة n الطول ℓ_n حيث: $\ell_n = \Omega A_n$ ثمّ تعيين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$**

لدينا $\ell_n = \Omega A_n$ ومنه $\ell_{n+1} = \Omega A_{n+1}$ ومنه لدينا $\dfrac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \dfrac{\Omega A_{n+1}}{\Omega A_n} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n}{\Omega A_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

أي (ℓ_n) متتالية هندسية أساسها $q' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها العام هو $\ell_n = \ell_0.(q')^n$ أي $\ell_n = \Omega A_0.(q')^n$

وبالتالي $\ell_n = \sqrt{(5+1)^2 + (-4-2)^2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ومنه $\ell_n = 6\sqrt{2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$

- **أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$:**

$\ell_n \langle 0.06$ معناه $6\sqrt{2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec 0,06$ ومنه $\ln 6\sqrt{2}.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec \ln(0,06)$ ومنه

$\ln 6\sqrt{2} + n\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \prec -2\ln 6$ وبالتالي $n \prec \dfrac{-2\ln 6 - \ln 6\sqrt{2}}{\ln\sqrt{2} - \ln 2}$

التمرين الرابع

f و g معرفتان على المجال $]0;+\infty[$ ب : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1-\ln x}{x}$ و $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$

❶ أ) **اثبات أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$** :

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x) = 4x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2+1}{x}$ وبما أن $x \in]0,+\infty[$ فإن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب)

$g(1) = 0$ ومنه اشارة g تكون كما يلي :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	

❷ أ) **حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$. وتفسير النتيجة هندسيا :**

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left[(2x+1) + \frac{1-\ln x}{x}\right] = +\infty$$

لأن
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(2x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} +\infty}\left(y - y\ln\dfrac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} +\infty}(y + y\ln y) = +\infty \end{cases}$$

- التفسير الهندسي : $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) اثبات أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f):

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)=0$ ومنه (Δ) ذي المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ج) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ): ندرس اشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$

لدينا $f(x)-(2x+1)=\frac{1-\ln x}{x}$ ومنه $\frac{1-\ln x}{x}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e$ ومنه $x=e$

ومنه وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ملخصة في الجدول كما يلي :

x	0		e		$+\infty$
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	0	(C_f) يقع تحت (Δ)	

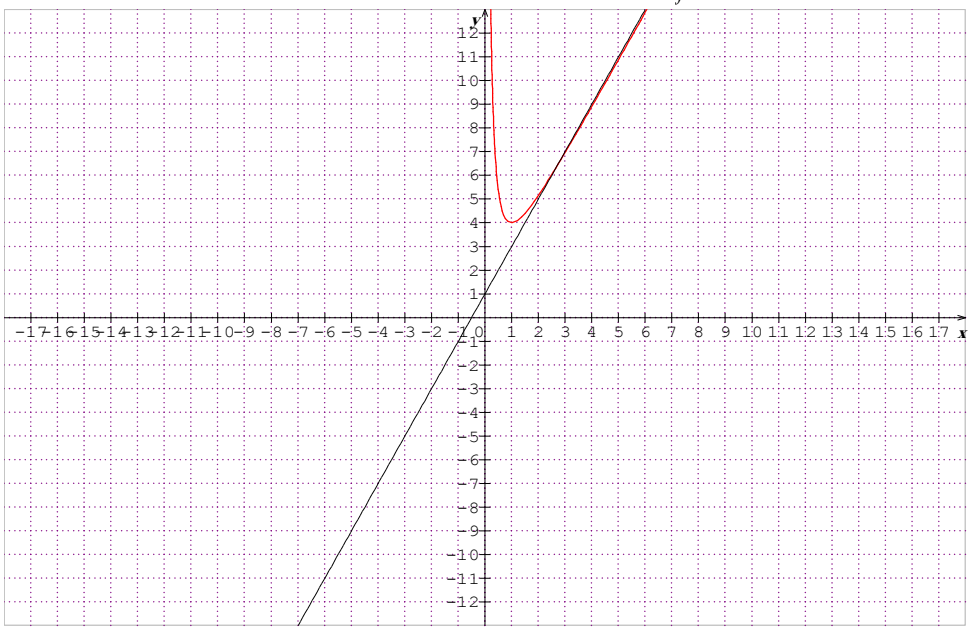
❸ **اثبات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،فإن :** $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=2+\frac{-2\ln x}{x^2}=\frac{2x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

- إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وجدول تغيرات f يكون كما يلي

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

❹ انشاء كلا من (Δ) و (C_f):



❺ من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-(2x+1))dx$

ا) حساب U_n ، بدلالة n ، ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n):

$$\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left[f(x)-2x+1\right]dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{1-\ln x}{x}dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{1}{x}dx-\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln}{x}dx$$

$$=\left[\ln x\right]_{e^n}^{e^{n+1}}-\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{e^n}^{e^{n+1}}=\left[(n+1)\ln e-n\ln e\right]-\left[\frac{((n+1)\ln e)^2}{2}-\frac{(n\ln e)^2}{2}\right]$$

$$=[n+1-n]-\left[\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{n^2}{2}\right]=1-\left[\frac{n^2+2n+1-n^2}{2}\right]=1-\frac{2n-1}{2}=-n+\frac{1}{2}$$

وبالتالي $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)-2x+1]dx=-n+\frac{1}{2}$ ومنه (U_n) حسابية أساسها $r=-1$ وحدها الاول $U_0=\frac{1}{2}$.

ب) A مساحة حيز المستوى ؛المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيم (Δ) وبالمستقيمين الذين معادلتان لهما: $x=1$, $x=e^2$. التحقق من أن : $A=(U_0-U_1)\ ua$

$U_0-U_1=\left[\int_1^e[f(x)-2x+1]dx\right]-\left[\int_e^{e^2}[f(x)-2x+1]dx\right]=\int_1^{e^2}[f(x)-2x+1]dx=A$ (باستعمال علاقةشال)

❻ الدالة h ،معرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، بالعلاقة : $h(x)=x^2(1+\ln x)-3x+2$

أ) اثبات أنه ،من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، **فإن :** $\frac{h(x)}{x}=f(\frac{1}{x})-4$ **.ثم استنتاج أن** $h(x)\geq 0$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-4=2.\frac{1}{x}+1+\frac{1-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-4=\frac{x+2}{x}+x+x\ln x-4$$

$$=\frac{x+2+x^2+x^2\ln x-4x}{x}=\frac{x^2(1+\ln x)-3x+2}{x}=\frac{h(x)}{x}$$

- لدينا من جدول تغيرات f $f(x)\geq 4$ تكافيء $f(x)\geq f(1)$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 4$ أي $f\left(\frac{1}{x}\right)-4\geq 0$

ومنه $\frac{h(x)}{x}\geq 0$ وبالتالي $h(x)\geq 0$

ب) **تعيين xبحيث يكون** $h(x)=0$

$h(x)=0$ تكافيء $f\left(\frac{1}{x}\right)-4=0$ تكافيء $f\left(\frac{1}{x}\right)=4$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)$ ومنه $\frac{1}{x}=1$ وبالتالي $x=1$

انتهى تصحيح الموضوع الأول

❀بالتوفيق في بكالوريا 2015❀

متقن الشهيد سرار عبد الحميد - زغاية

تصحيح البكالوريا التجريبي دورة ماي 2015 الشعبة : رياضيات إعداد : شايبي أمين

الإجابة	العلامة

الموضوع الثاني

التمرين الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0.....(E)$:

لدينا $(z-2)(z^2-2z+4)=0$ تكافيء $\begin{cases} z=2.....(1) \\ z^2-2z+4=0.....(2) \end{cases}$

- حل المعادلة (2) : لدينا $\Delta'=b'^2-a.c=(-1)^2-1.4=-3=i^2.3$ ومنه $\sqrt{\Delta'}=i\sqrt{3}$

ومنه نجد $z_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1}=1-i\sqrt{3}$, $z_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1}=1+i\sqrt{3}$

ومنه المعادلة (E) لها ثلاثة حلول في $\mathbb{C}$ وهي : $z_C=1-i\sqrt{3}, z_B=1+i\sqrt{3}, z_A=2$

❷ أ) كتابة شكلا أسيا لكل من z_B و z_C :

* $|z_B|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$, $\arg z_B=\arg(1+i\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

* $|z_C|=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$, $\arg z_C=\arg(1-i\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب) الشكل الجبري للعدد $\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2015}$:

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}=\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{2015}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2015}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2015}=\cos\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)$$

وبالتالي $\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2015}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ج) قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $z_B^{\,n}$ عددا حقيقيا سالبا :

$(z_B)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg(z_B)^n=k\pi$

$$\arg(z_B)^n=\arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=\arg\left(2^n.e^{i\frac{n\pi}{3}}\right)=\frac{n\pi}{3}$$

ومنه $\arg(z_B)^n=k\pi$ معناه أن $\dfrac{n\pi}{3}=k\pi$ وبالتالي $k\in\mathbb{N}\ /\ n=3k$

❸ أ- كتابة على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1-i\sqrt{3}-2}{1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=-\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4}=-\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{4}=-\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=e^{i\pi}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

وبالتالي $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$

ب – استنتاج أن C هي صورة B بتحويل نقطي :

لدينا $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|e^{i\frac{5\pi}{3}}\right| = 1$ ولدينا $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{5\pi}{3}[2\pi]$ ومنه C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $z_A = 2$ وزاويته $\frac{5\pi}{3}$.

❹ **تحديد مع التعليل طبيعة الرباعي $OBAC$:**

لدينا $AC = AB$, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{3}$ و لدينا أيضا B و C متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل ومنه الرباعي $OBAC$ **معين** .

التمرين الثاني

❶ **تحليل العدد** 320 **إلى جداء عوامله الأوّلية ثمّ تعيين مجموعة قواسمه الطبيعية :**

$320 = 32.10 = 2^6.5$ ومجموعة قواسمه هي : $320,16,80,64,40,32,20,16,10,8,5,4,2,1$.

❷ **x و y عددان طبيعيان أوّليان فيما بينهما. اثبات أنّ xy و $(x+y)$ أوّليان فيما بينهما:**

لدينا $p\gcd(x,y)=1$ ونبرهن أن $p\gcd(xy,x+y)=1$

نضع $p\gcd(xy,x+y)=d$

لدينا إذن : $d/x+y$ و d/xy ومنه فإن d سيقسم كل مزج خطي بينهما ومنه $d/x(x+y)$ و d/xy

وبالتالي $d/x(x+y)-xy$ أي d/x^2 .....(1) .

من جهة أخرى $d/y(x+y)$ و d/xy ومنه $d/y(x+y)-xy$ وبالتالي d/y^2 .....(2)

من (1) و(2) لدينا d يقسم $p\gcd(x^2,y^2)$ ولكن $p\gcd(x^2,y^2)=1$ لأن $p\gcd(x,y)=1$ ومنه $d=1$

❸ a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث: $7(a+b)^2 = 320m$ حيث $m = PPCM(a;b)$

- **تعيين كل القيم الممكنة لكلّ من العددين a و b:**

لدينا $p\gcd(a,b)=d$ وبوضع $a=a'.d$, $b=b'.d$ حيث $p\gcd(a',b')=1$.

بالتعويض في العبارة $ab=m.d$ نجد $a'.d\,b'.d=m.d$ أي $a'b'.d^2=m.d$ ومنه $a'b'.d=m$

وبالتعويض بقيمة m في العبارة $7(a+b)^2=320m$ نجد $7d(a'+b')^2=320a'b'$

$(a'+b')^2$ يقسم $320a'b'$ وبما أن $(a'+b')^2$ و $a'b'$ أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص $(a'+b')^2$ يقسم 320

ومنه $(a'+b')^2 \in \{1,4,16,64\}$ وبالتالي $(a'+b') \in \{1,2,4,8\}$

ومنه $(a',b') \in \{(1,3),(1,7),(7,1)\}$

وبالتالي $(a,b) \in \{(7,1),(1,7)\}$.

انتهى تصحيح الموضوع الثاني

❀بالتوفيق في بكالوريا 2015❀

ثـــا/ اول نوفمبـــر54 + ثا/أبو بكر الصديق بالعطاف — الشعبـــة 3 تقني ريـــاضي +3 ريـــاضي

امتحان البكالوريـــا التجريبي — دورة مـــــاي :2015

اختبـــار في مـــادة الرياضيـــات — المـــدة4 ساعـــات

على التـــلميذ أن يعـــالج أحد الموضـــوعين على الخيـــار

الموضـــــوع الأول

التمرين الأول : (4 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ و ليكن (D)

المستقيم الذي تمثيله الوسيطي هو : $\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=-2t \end{cases}$

1. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)
2. بين أن المستقيمين (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي
3. ليكن المستوي (P) الذي يوازي (D) و يشمل (AB)
   أ. بين أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
   ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (P)
   ج. بين أن المسافة بين نقطة كيفية من (D) و (P) ثابتة ، حدد هذا الثابت
   د. أعط تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) المعرف بتقاطع (P) و المستوي (Oxy)
   ه. عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث : $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$
   و. لتكن (S) سطح كرة التي تمس (P) في النقطة $C(10;1;6)$ حيث مركزها ω يبعد عن (P) بمسافة $d=6$ و يقع من جهة O ، عين معادلة ديكارتية لـ (S)
4. أ/ عين تمثيل الوسيطي للمستوي (OAB) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له
   ب/ بين أن المستوي (OAB) و سطح الكرة (S) يتقاطعان و فق دائرة (Γ) يطلب تحديد عناصرها المميزة

التمرين الثاني : (6 نقط)

1. عين العددين الحقيقين a و b بحيث : $(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ و $(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$
2. أ/ حل في مجموعة الاعداد المركبة $(\mathbb{C})$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $z^2-4z+16=0$
   ب/ استنتج في المجموعة $(\mathbb{C})$ ، حلول المعادلة : $z^4-4z^2+16=0$
3. نعتبر العدد المركب y_k المعرف كمايلي : $y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ ، حيث : k عدد صحيح
   - بين أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$ ، ثم استنتج أن $y_{2013}=0$ و أكتب العدد $2^{2015}y_{2015}$ على الشكل $\sqrt{\alpha}i$ حيث α عدد طبيعي يطلب تحديده
4. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين على الترتيب : $Z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $Z_B=2-2i\sqrt{3}$ و لتكن C النقطة ذات اللاحقة : $Z_C=5+2^{2015}y_{2015}$
   أ. تحقق أن : $Z_C=\frac{3}{2}Z_A+Z_B$

ب/ بين أن $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = 2^{2015} y_{2015}$ ، ثم عين طبيعة التحويل النقطي f الذي يحول النقطة A إلى B معينا عناصره المميزة ، ثم جد العبارة المركبة له

5. لتكن A_0 النقطة ذات اللاحقة $Z_0 = \sqrt{3} - i$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = f(A_n)$ حيث: Z_n لاحقة A_n

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كمايلي : $U_0 = A_0A_1$ و $U_n = A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ. بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الاول U_0 و أساسها q

ب. استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 ..... + U_n$

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_0 \times U_1 \times U_2 .... \times U_n = \left(\left(128 - 32\sqrt{3}\right)^4 \times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}$

التمرين الثالث : (3نقط)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E).....5x - 6y = 3$

1. أ/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف للعدد 3

ب/ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج/ استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

د/ حل الجملة (S) بطريقة أخرى ليست استنتاجية

2. عين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق : $x^2 - y^2 \leq 56$

3. a و b عددان طبيعيان حيث : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

- عين α و β حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الرابع (6 نقط)

I. نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D)

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = -x + \ln\left(2 + e^{2x}\right)$

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم $\left(D'\right)$ الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم $\left(D'\right)$

3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ، و شكل جدول تغيراتها

4. أرسم (D) ، $\left(D'\right)$ و (C)

5. ليكن (Δ_m) المستقيم الذي معادلته $y = mx + \frac{\ln 2}{2}(1 - m)$ حيث m وسيط حقيقي

أ/ بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{1}{2}\ln 2; \frac{1}{2}\ln 2\right)$

ب/ ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد نقاط تقاطع المستقيم (Δ_m) و المنحنى (C)

II. نضع : $I=\int_2^3\left[f(x)-x\right]dx$

1. فسر هندسيا العدد I
2. بين أنه من كل x من $[0;+\infty[$ ، $\ln(1+X)\le X$
3. استنتج أن: $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$ و أعط حصرا للعدد I سعته $0,02$

الموضـــــوع الثاني

التمرين الأول : (5 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B ، C ، D و H التي لواحقها على الترتيب : $z_A=a$ ، $z_B=1+\frac{a-1}{a}i$ ، $z_C=ia$ ، $z_D=-\frac{1}{a}i$ ، $z_H=z_D+1$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1

1. أ/ تحقق أن : $z_B-z_D=\overline{z_D}(z_A-z_C)$

   ب/ استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان
2. أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B و يحول C إلى D

   ب/ حدد z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S ، ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل

   ج/ بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ، ثم جد علاقة بين مساحتيهما
3. لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كمايلي : $M_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S(M_n)$

   حيث z_n لاحقة النقطة M_n و نضع : $U_n=|z_n-z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي n

   أ/ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

   ب/ عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة

   ج/ نرمز بـ T_n إلى مجموع الأطوال القطع المستقيمة $[A\Omega],[M_1\Omega].....,[M_n\Omega],[M_{n+1}\Omega]$

   - أحسب المجموع T_n بدلالة n
4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a(1+e^{i\theta})$ حيث : $\theta\in\mathbb{R}$

   - حدد الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة $\mathbb{R}$

التمرين الثاني : (4 نقط)

I. عين قيم العدد الصحيح m بحيث تقبل المعادلة: $2014\alpha=475\beta+m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$

II. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $2014x-475y=-19$.....(1)

1. عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق : $y_0-4x_0=1$
2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1)
3. بين أن العددين x و y أوليان فيمابينهما باعتبار الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (1)
4. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv 4[25]$ و باقي قسمة n على العدد 106 هو 17
5. عين كل الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) بحيث يكون العدد $x+y$ مضاعفا للعدد 10

التمرين الثالث : (4 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-2;0;1)$ ، $B(1;2;-1)$ و $C(-2;2;2)$

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم إستنتج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية $\widehat{ABC}$
2. استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية و أن $2x-y+2z+2=0$ معادلة الديكارتية للمستوي (ABC)
3. أ/ أكتب معادلة الديكارتية للمستوي (P) ، المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

ب/ بين أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $AM = CM$ هي المستوي (P') الذي معادلته الديكارتية $4y+2z-7=0$

ج/ بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4. أ/ بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ استنتج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

5. نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة: $\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2);(C;-2\alpha^2)\}$ حيث α وسيط حقيقي

- عين بدلالة α إحداثيات G_α و استنتج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في $\mathbb{R}$

التمرين الرابع :(7 نقط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كمايلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1, x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

I. 1. أحسب نهاية f عند $+\infty$

1. أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا
2. أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
3. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $\alpha \geq 0$ و $f(\alpha)=0$ ، ثم تحقق أن : $4,6<\alpha<4,7$
4. أكتب معادلة للمستقيم (D) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

II. g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

1. أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g' و استنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$
2. حدد اتجاه تغيرات الدالة g ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)
3. أنشىء (D) و (C_f)

III. 1. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2\ln x dx$

- أحسب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (D) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$ ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}A(n)$

انتهـــــــــــــــــــــى

مع تمانيـــاتنا بالنجاح في شهـــادة البكـــالوريا

أساتـــذة المـــادة

الموضوع الأول

التمرين الأول :

1.تمثيل الوسيطي لـ (AB) :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه ويشمل النقطة $A(8;0;8)$ إذن : $\lambda \in IR$; $(AB):\begin{cases} x=2\lambda+8 \\ y=3\lambda \\ z=2\lambda+8 \end{cases}$

2.تبيان أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ شعاع التوجيه لـ (AB) و $\overrightarrow{u_{(D)}}(3;2;-2)$ شعاع التوجيه لـ (D) ومنه : $\frac{3}{2}\neq\frac{2}{3}\neq\frac{-2}{2}$ ومنه (AB) و (D) غير متوازيين أي متقاطعان

لنبحث عن نقطة التقاطع :

نحل الجملة : $\begin{cases} -5+3t=2\lambda+8...(1) \\ 1+2t=3\lambda....(2) \\ -2t=2\lambda+8....(3) \end{cases}$ بعد التبسيط بين المعادلتين (2) و (3) نجد : $(t;\lambda)=\left(\frac{-13}{5};\frac{-7}{5}\right)$ و الثنائية لا تحقق المعادلة (1) إذن $(AB)\cap(D)=\varnothing$ إذن نستنتج أن (AB) و (D) لاينتميان إلى نفس المستوي

3. (P) المستوي الذي يوازي (D) و يشمل (AB)

أ/ تبيان أن الشعاع $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) :

يكفي أن نبين أن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و على $\overrightarrow{u_{(D)}}$

لدينا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2(2)+3(-2)+1(2)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{u_{(D)}}=2(3)+2(-2)1(-2)=0$

ب. تعيين المعادلة الديكارتية لـ (P) :

$\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ (P) و $A(8;0;8)\in(P)$ ينتج :

$2(8)+0(-2)+1(8)+d=0$ ومنه : $d=-24$

$(P):2x-2y+z-24=0$

ج. تبيان أن المسافة $d((P);(D))$ ثابتة مع تحديد الثابت :

لتكن $M(x;y;z)\in(D)$ معناه : $M(-5+3t;1+2t;-2t)$

ومنه :

$$d((P);(D))=d((P);M)=\frac{|2(-5+3t)-2(1+2t)+(-2t)-24|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

ومنه : $d((P);(D))=\frac{|-36|}{\sqrt{9}}=\frac{36}{3}=12$

د. التمثيل الوسيطي لـ (Δ) المعرف بتقاطع (P) و (Oxy) :

لدينا : $\begin{cases} (P):2x-2y+z-24=0 \\ (Oxy):z=0 \end{cases}$ و بوضع : $y=k$ ينتج :

$\begin{cases} x=y+12 \\ y=k \\ z=0 \end{cases}$ أي : $k\in IR$; $(\Delta):\begin{cases} x=k+12 \\ y=k \\ z=0 \end{cases}$

هـ. تعيين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ هي :

لدينا $(2x-2y+z-24)^2+z^2=0$ يكافىء $\begin{cases} 2x-2y+z-24=0 \\ z=0 \end{cases}$ مما سبق ينتج المستقيم (Δ)

و. تعيين معادلة ديكارتية لـ (S) :

نصف قطر لـ (S) هو $C\omega=6$

لنعين إحداثيات ω : لنفرض $\omega(x;y;z)\in(\Delta')$ حيث (Δ') المستقيم العمودي على (P) في C ينتج :

$(\Delta'):\begin{cases} x=2k'+10 \\ y=1-2k' \\ z=6+k' \end{cases}$; $k'\in IR$ ومنه : $d((P);\omega)=6$ بعد التبسيط نجد : $d((P);\omega)=\frac{|9t|}{3}=6$ ومنه : $t=2$ أو $t=-2$

ومنه : $\omega(14;-3;8)$ أو $\omega(6;5;4)$

بتعويض إحداثيات كل من ω و النقطة O في معادلة (P)

$O(0;0;0):-24<0$

نجد : $\omega(14;-3;8):2(14)-2(-3)+8-24=18>0$ اذن

$\omega(6;5;4):2(6)-2(5)+4-24=-18<0$

$\omega(6;5;4)$ و النقطة O في نفس جهة من المستوي (P) **إذن معادلة لـ (S) هي :** $(x-6)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=36$

4.أ.تعيين تمثيل الوسيطي للمستو (OAB) :

لدينا $\overrightarrow{OA}(8;0;8)$ و $\overrightarrow{OB}(10;3;10)$ أشعة التوجيه لـ (OAB) و يشمل النقطة O إذن :

$$(OAB):\begin{cases} x=8t'+10\lambda' \\ y=3\lambda' \\ z=8t'+10\lambda' \end{cases} ;(t';\lambda')\in IR^2$$

استنتاج المعادلة الديكارتية لـ (OAB) :

$\begin{cases} x=8t'+10\lambda' \\ y=3\lambda' \\ z=8t'+10\lambda' \end{cases}$ تكافىء : $\begin{cases} x=8t'+10\lambda' \\ \lambda'=\frac{y}{3} \\ z=8t'+10\lambda' \end{cases}$ وبوضع : $x=z$ أي

$(OAB):x-z=0$:

ب. تبيان أن (S) و (OAB) متقاطعان وتعيين عناصر المميزة للتقاطع :

لدينا : $d\left((OAB);\omega\right)=\frac{|6-4|}{\sqrt{1+0+1}}=\sqrt{2}<6$ إذن :

$(S)\cap(OAB)$ هو دائرة

المستقيم الذي يشمل ω ويعامد (OAB) هو :

$\begin{cases} x=6+h \\ y=15 \quad ;h\in IR \\ z=4-h \end{cases}$ ومنه مركز الدائرة هو Ω نقطة تقاطع

هذا المستقيم مع (OAB) وبعد الحساب ينتج : $h=-1$ و

$\Omega(5;5;5)$ و نصف قطرها r حيث :

$$r=\sqrt{R^2-d^2\left((OAB);\omega\right)}=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$$

التمرين الثاني :

1.تعيين العددين الحقيقيين a و b :

$(a+i)^2=2+2i\sqrt{3}$ ومنه : $a^2-1+2ai=2+2i\sqrt{3}$

$(b-i)^2=2-2i\sqrt{3}$ بالمطابقة $b^2-1-2bi=2-2i\sqrt{3}$

نجد : $a=\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}$

2.أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+16=0$

لدينا : $\Delta=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$ ومنه الحلول هي : $z_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2=2-2i\sqrt{3}$

ب.استنتاج حلول المعادلة $z^4-4z^2+16=0$

بوضع $z^2=L$ نستنتج أن الحلول هي : $z_1^2=L_1=2+2i\sqrt{3}$ و

$z_2^2=L_2=2-2i\sqrt{3}$ ومنه ينتج :

$$z=\sqrt{3}+i;z=-\sqrt{3}-i;z=\sqrt{3}-i;z=-\sqrt{3}+i$$

3.تبيان أن $y_k=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$:

$$y_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{k\pi}{3}-i\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2^k}2i\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{i}{2^{k-1}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

استنتاج أن $y_{2013}=0$: لدينا

$$y_{2013}=\frac{i}{2^{2012}}\sin\frac{2013\pi}{3}=\frac{i}{2^{2012}}\sin 671\pi=\frac{i}{2^{2012}}\sin(\pi)=0$$

كتابة $-2^{2015}y_{2015}$ **على الشكل** $\sqrt{\alpha}i$:

لدينا :

$$-2^{2015}y_{2015}=-2^{2015}\frac{i}{2^{2014}}\sin\frac{2015\pi}{3}=-2i\sin\frac{3\times671+2}{3}\pi=$$

$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}+671\pi=-2i\sin\frac{-\pi}{3}=\sqrt{3}i$$

4.أ.تحقق أن : $z_C=\frac{3}{2}z_A+z_B$:

لدينا $z_C=5-2^{2015}y_{2015}=5+i\sqrt{3}$

ولدينا $z_C=\frac{2}{3}\left(2+2i\sqrt{3}\right)+2-2i\sqrt{3}=5+i\sqrt{3}$

ب.تبيان : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=-2^{2015}y_{2015}$:

لدينا :

$$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{2-2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}{2+2i\sqrt{3}-5-i\sqrt{3}}=\frac{-3-3i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$$

$$=i\sqrt{3}\frac{-3+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=-2^{2015}y_{2015}$$

تحديد طبيعة التحويل f :

لدينا : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\sqrt{3}$ يكافىء $z_B-z_C=i\sqrt{3}\left(z_A-z_C\right)$

ومنه : $|z_B-z_C|=\sqrt{3}|z_A-z_C|$ و $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$

يكافىء : $CB=\sqrt{3}CA$ ، $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{2}$ اذن f تشابه مباشر مركزه C و

نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ايجاد العبارة المركبة : f تشابه مباشر مركزه C و نسبته

$\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه $\alpha=i\sqrt{3};\beta=z_C(1-\alpha)=8-4i\sqrt{3}$

ومنه : $f:z'=i\sqrt{3}z+8-4i\sqrt{3}$

5.أ.تبيان أن (U_n) متتالية هندسية مع تحديد أساسها q و حدها الأول U_0 :

لدينا :

$$U_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}=|z_{n+2}-z_{n+1}|=\left|i\sqrt{3}z_{n+1}+\beta-i\sqrt{3}z_n-\beta\right|$$

$$=\left|i\sqrt{3}\left(z_{n+1}-z_n\right)\right|=\left|i\sqrt{3}\right|\left|z_{n+1}-z_n\right|=\sqrt{3}U_n$$

ومنه (U_n) هندسية أساسها $q=\sqrt{3}$ و حدها الأول

$$U_0=|z_1-z_0|=\left|i\sqrt{3}z_0+8-4i\sqrt{3}-z_0\right|$$

$$=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$$

ب.استنتاج عبارة U_n بدلالة n :

$$U_n=U_0\times q^n=\sqrt{128-32\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^n$$

حساب المجموع S_n بدلالة n :

$$S_n=U_0+U_1+....+U_n=U_0\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{128-32\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

ج.برهان بالتراجع :

نتحقق من صحة $P(0)$ لدينا : $U_0=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ الطرف1

$\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^0\right)^{\frac{0+1}{4}}=\sqrt{128-32\sqrt{3}}$ الطرف 2 ومنه

$P(0)$ محققة

لدينا

$$U_0\times U_1\times ....\times U_n\times U_{n+1}=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times U_{n+1}$$

$$=\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^n\right)^{\frac{n+1}{4}}\times\left(128-32\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}^{n+1}$$

وبعد التبسيط نجد : $\left(\left(128-32\sqrt{3}\right)^2\times 3^{n+1}\right)^{\frac{n+2}{4}}$

التمرين الثالث :

1.أ.إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3 :

إذا كانت $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $5x-6y=3$ ومنه :

$5x=6y+3=3(y+2)$ ومنه حسب غوص $3/5x$ و 3 و 5 أوليان فيمابينها إذن $3/x$ أي $x=3k$

ب.استنتاج حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)

لدينا : $x_0=3k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ إذن (E) تكافىء : $(x_0;y_0)$ حل للمعادلة (E) معناه : $5x_0-6y_0=3$ إي $5(3k)-6y_0=3$ أي : $5(k)-2y_0=1$

ايجاد الثنائية $(k;y_0)$ باستعمال القسمات المتتابعة لخوارزمية إقليديس لدينا : $5=2\times 2+1$ ومنه $5-2(2)=1$ أي $5(1)-2(2)=1$ إذن $(k;y_0)=(1;2)$ ومنه $(x_0;y_0)=(3;2)$

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) :

لدينا : $\begin{cases}5x-6y=3\\5(3)-6(2)=3\end{cases}$ ومنه $5x-6y=5(3)-6(2)$ أي :

$5(x-3)=6(y-2)$ ومنه حسب غوص لدينا 6 و 5 أوليان فيمابينها و $6/5(x-3)$ أي $6/(x-3)$ ومنه $x=6k+3$

بالتعويض $x=6k+3$ في المعادلة نجد $y=5k+2$ ومنه الحلول هي الثنائيات : $(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$

ج.استنتاج حلول الجملة (S) :

(S) تكافىء : $\begin{cases}x=6\alpha-1\\x=5\beta-4\end{cases}$ ومنه : $6\alpha-1=5\beta-4$ أي :

$5\beta-6\alpha=3$ وحسب السؤال 1.ب. نجد :

$(\alpha;\beta)=(6k+3;5k+2);k\in\mathbb{Z}$ بتعويض قيمة α و β في x نجد: $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

د. حل الجملة (S) بطرق غير استنتاجية :

(S) تكافىء $\begin{cases}5x\equiv -5[30]\\6x\equiv -24[30]\end{cases}$ إذن : $6x-5x\equiv -19[30]$ أي :

$x\equiv -19[30]$ ومنه $x\equiv 11[30]$ اذن : $x=30k+11;k\in\mathbb{Z}$

2.تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) حيث :

$(x;y)$ حلول المعادلة (E) و $x^2-y^2\le 56$ فإن :

$(6k+3)^2-(5k+2)^2\le 56$ تكافىء $11k^2+16k-51\le 0$

دراسة أشارة $11k^2+16k-51$ نجد : $11k^2+16k-51\le 0$ لما $k\in\left[-3;\frac{17}{11}\right]$ ومنه : $k=\{-3;-2;-1;0;1\}$ ومنه الثنائيات $(x;y)$ هي : $(-15;-13);(-9;-8);(-3;-3);(3;2);(9;7)$

4.تعين α و β حتى يكون $(a;b)$ حلا للمعادلة (E) :

لدينا : $a=\overline{1\alpha 0\alpha 00}^3$ فإن : $0\le\alpha<3$ و $b=\overline{\alpha\beta 0\alpha}^5$ فإن : $0\le\beta<5$ ولدينا كذلك :

$a=3^2\times\alpha+3^4\times\alpha+3^5=90\alpha+243$ و

$b=5^0\times\alpha+5^2\times\beta+\alpha\times 5^3=126\alpha+25\beta$

$(a;b)$ حلا للمعادلة (E) يكافىء $5a-6b=3$ ومنه :

$5(90\alpha+243)-6(126\alpha+25\beta)=3$ بعد التبسيط نجد

$51\alpha+25\beta=202$ و بما أن : $0\le\alpha<3$ فإن : $\alpha=\{0;1;2\}$

ينتج : $\beta=\left\{\frac{202}{25};\frac{151}{25};\frac{100}{25}=4\right\}$ إذن $\alpha=2$ و $\beta=4$

التمرين الرابع : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)$

1.أ.إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(\frac{1+2e^{-2x}}{e^{-x}}\right)$

$=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)-\ln e^{-x}=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty$ لإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$ ومنه :

$\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-2x}=1$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$

تبيان أن (D) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=0$ إذن (D) م م لـ (C) عند $+\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ (C) بالنسبة (D) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$

لدينا : $2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $2e^{-2x}+1>1$ من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(2e^{-2x}+1\right)>0$ من اجل كل x من IR و منه $f(x)-x>0$ اذن (C) يقع فوق (D) من اجل كل x من IR

2.أ. إثبات أنه من أجل كل x من IR : $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

لدينا : $f(x)=\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)=\ln\left(e^{x}+\frac{2}{e^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{e^{2x}+2}{e^{x}}\right)$

$=\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln e^{x}=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$

ب.حساب نهاية f عند $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)=+\infty$ لأن:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$

تبيان أن (D') ذو المعادلة $y=-x+\ln 2$ مستقيم مقارب م بجوار $-\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+\ln 2)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)+x-\ln 2\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(2+e^{2x}\right)-\ln 2=0$

إذن (D') م م لـ (C) عند $-\infty$

ج.دراسة الوضعية النسبية لـ(C) بالنسبة (D') :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

لدينا : $\frac{1}{2}e^{2x}>0$ من أجل كل x من IR ومنه : $\frac{1}{2}e^{2x}+1>1$

من أجل كل x من IR ومنه $\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+1\right)>0$ من اجل كل

x من IR و منه $f(x)-(-x+\ln 2)>0$ اذن (C) يقع فوق

(D') من اجل كل x من IR

3.**دراسة إتجاه تغير f** : f ق إ على IR حيث :

$$f'(x)=\frac{e^{x}-2e^{-x}}{e^{x}+2e^{-x}}=\frac{e^{2x}-2}{e^{x}\left(e^{x}+2e^{-x}\right)}$$

إشارة $f'(x)$: تتعلق باشارة $e^{2x}-2$ لان $e^{x}\left(e^{x}+2e^{-x}\right)>0$

$e^{2x}-2\geq 0$ معناه : $e^{2x}\geq 2$ معناه $2x\geq\ln 2$ أي $x\geq\frac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

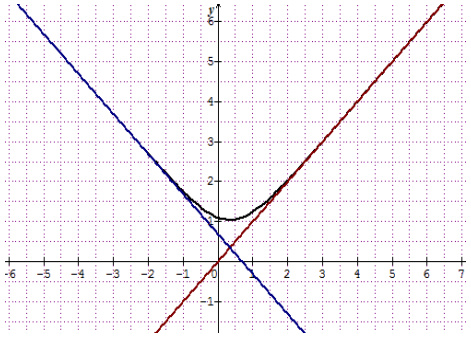
الدالة f متناقصة تماما على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$

ومتزايدة تماما على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗ $+\infty$

4.**الرسم :**



5.**أ.تبيان أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة**

من أجل كل عدد حقيقي m : لدينا : $y=mx+\frac{\ln 2}{2}(1-m)$

تكافىء $y-mx-\frac{\ln 2}{2}+m\frac{\ln 2}{2}=0$ ومنه :

$y-\frac{\ln 2}{2}+m\left(x-\frac{\ln 2}{2}\right)=0$ يكافىء : $\begin{cases} y-\frac{\ln 2}{2}=0 \\ x-\frac{\ln 2}{2}=0 \end{cases}$ أي :

$x=\frac{\ln 2}{2};\ y=\frac{\ln 2}{2}$

ب. المناقشة البيانية:

إذا كان $m=1$ فإن (Δ_m) هو (D)

إذا كان $m=-1$ فإن (Δ_m) هو (D')

(D) و (D') يتقاطعان في نقطة الثابتة A

إذا كان $m\in[-1;1]$ فإن (Δ_m) لايقطع المنحنى (C)

إذا كان $m\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ فإن (Δ_m) يقطع المنحنى (C) في نقطة وحيدة

II. 1. تفسير الهندسي للعد I : I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات ذات المعادلات : $y=x$ و $x=2$ و $x=3$

2.**تبيان من أجل كل x من $[0;+\infty[$:** $\ln(1+X)\leq X$

نضع : $h(x)=\ln(1+X)-X$ ندرس تغيرات الدالة h

لدينا h ق.إ على $[0;+\infty[$ حيث :

$h'(x)=\frac{1}{1+X}-1=\frac{-X}{1+X}<0$ ومنه h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

لدينا $h(0)=0$ و h متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ اذن فإن إشارة الدلة h سالبة على المجال $[0;+\infty[$ معناه

$\ln(1+X)-X\leq 0$ أي $\ln(1+X)\leq X$

3.**استنتاج أن** : $0\leq I\leq\int_{2}^{3}2e^{-2x}dx$

لدينا : $I=\int_{2}^{3}\left(f(x)-x\right)dx=\int_{2}^{3}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx$ و بما أن :

$2e^{-2x}>0$ من أجل كل x من IR $([2;3])$

فإن : حسب السؤال السابق : $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \leq 2e^{-2x}$ ومنه :

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$ أي $I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

ونعلم أن $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \geq 0$ و بما أن $2 < 3$ فإن

$\int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \geq 0$ أي $I \geq 0$ ومنه : $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx$

الموضوع الثاني

التمرين الاول :

1ـأ/ تحقق أن : $z_B - z_D = \overline{z_D}\left(z_A - z_C\right)$

لدينا: $z_B - z_D = 1 + \frac{a-1}{a}i + \frac{1}{a}i$

$= 1 + \frac{a-1+1}{a}i = 1 + i$

و لدينا من جهة أخرى : $\overline{z_D}\left(z_A - z_C\right) = \frac{1}{a}i\left(a - ai\right) = i + 1$

ومنه : $z_B - z_D = \overline{z_D}\left(z_A - z_C\right)$

ب/ استنتاج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان :

من السؤال ـأـ لدينا : $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D} = \frac{1}{a}i$ و منه :

$\arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{a}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ لان $\frac{1}{a} > 0$ وبالتالي :

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : (AC) و (BD) متعامدان

2ـ أ/ تعيين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$

لدينا $S(A) = B$ معناه : $z_B = \alpha z_A + \beta$....(1)

$S(C) = D$ معناه : $z_D = \alpha z_C + \beta$....(2) ومنه بطرح (1) من

(2) نجد : $z_B - z_D = \alpha\left(z_A - z_C\right)$ ومنه : $\alpha = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \overline{z_D}$

ومنه : $\alpha = \frac{1}{a}i$

لدينا : $z_D = \alpha z_C + \beta$ ومنه : $\beta = z_D - \alpha z_C$ اي :

$\beta = -\frac{1}{a}i - \frac{1}{a}i(ai)$ ومنه : $\beta = 1 - \frac{1}{a}i$

الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = \frac{1}{a}iz + 1 - \frac{1}{a}i$

ب/ تحديد z_Ω لاحقة المركز Ω للتشابه S :

نعلم أن : $z_\Omega = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ومنه : $z_\Omega = \frac{1 - \frac{1}{a}i}{1 - \frac{1}{a}i} = 1$ ومنه $z_\Omega = 1$

- تحديد العناصر المميزة للتشابه S :

S تشابه مباشر مركزه Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 1$ و نسبته $\frac{1}{a}$

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ (لاحظ أن : $\frac{1}{a} > 0$)

ج/ تبيان أن المثلثين OAC و BHD متشابهان :

لدينا $S(A) = B$ و $S(C) = D$

لنحدد لاحقة النقطة O بالتشابه S

$z' = \frac{1}{a}i(0) + 1 - \frac{1}{a}i = 1 - \frac{1}{a}i = z_H$ لأن $z_H = 1 + z_D = 1 - \frac{1}{a}i$

وهكذا $S(O) = H$

إذن صورة المثلث OAC بالتشابه S هو المثلث BHD ومنه المثلثان OAC و BHD متشابهان

- ايجاد علاقة بين مساحتي المثلثين :

$A(BHD) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 A(OAC)$ ومنه $A(BHD) = \frac{A(OAC)}{a^2}$

3ـ أ/تبيان أن (U_n) متتالية هندسية :

لدينا : $U_{n+1} = \left|z_{n+1} - z_n\right| = \Omega M_{n+1}$

بما أن : $M_{n+1} = S(M_n)$ فإن : $\Omega M_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n$ ومنه :

$U_{n+1} = \frac{1}{a}\Omega M_n = \frac{1}{a}\left|z_n - z_\Omega\right| = \frac{1}{a}U_n$ ومنه من أجل كل

عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{a}U_n$ ومنه (U_n) متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{a}$ و حدها الأول

$U_0 = \left|z_A - z_\Omega\right| = \left|z_0 - z_\Omega\right| = \left|a - 1\right|$ أي : $U_0 = \left|a - 1\right|$

ب/ تعيين قيم a بحيث تكون (U_n) متقاربة :

(U_n) متقاربة يعني : $-1 < q \le 1$ أي : $-1 < \frac{1}{a} \le 1$ و بما أن

$\frac{1}{a} > 0$ ينتج : $0 < \frac{1}{a} \le 1$ أي $a \ge 1$ و بما أن $a \ne 1$ فإن : $a > 1$

أي : $a \in]1;+\infty[$

ج/ حساب المجموع T_n بدلالة n :

$T_n = M_{n+1}\Omega + M_n\Omega + ... + M_0\Omega$ (نلاحظ أن :

$U_n = \left|z_n - z_\Omega\right| = U_n$) ومنه : $T_n = U_{n+1} + U_n ..... + U_0$ ومنه

$T_n = U_0\left(\frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}\right)$ ومنه : $T_n = \left|a - 1\right|\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)}\right)$ ومنه :

$T_n = a \times \frac{\left|a - 1\right|}{a - 1}\left(1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right)$

4ـ لدينا $Z = a\left(1 + e^{i\theta}\right)$ و $\theta \in IR$:

- تحديد طبيعة مجموعة النقط (Γ) :

$Z = a\left(1 + e^{i\theta}\right)$ يكافىء :

$Z = a + ae^{i\theta}$ يكافىء $Z - a = ae^{i\theta}$ و بما أن $\theta \in IR$

يكون لدينا $\left|Z - a\right| = \left|a\right| = a$ لان $a > 0$ أي (Γ) هي دائرة

مركزها A ذات اللاحقة a و نصف قطرها $r = a$

التمرين الثاني :

I.تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة

$2014\alpha = 475\beta + m$ حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

$2014\alpha = 475\beta + m$ تكافىء $2014\alpha - 475\beta = m$

لدينا : $PGCD(2014;475)=19$ وهكذا

$2014\alpha=475\beta+m$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يكافىء

$19(106\alpha-25\beta)=m$ ومنه $19/m$ أي $m=19h$ مع $h\in IR$

II. لدينا المعادلة $2014x-475y=-19$....(1) :

1.تعيين الحل $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $y_0-4x_0=1$:

المعادلة (1) تكافىء $19(106x-25)=-19$ وتكافىء

$106x-25y=-1$...(*) و لدينا $y_0-4x_0=1$ بالتعويض في

المعادلة (*) نجد : $106x_0-25(4x_0+1)=-1$ بعد الحل

نجد : $x_0=4$ إذن $y_0=17$ أي $(x_0;y_0)=(4;17)$

2.حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) :

المعادلة (1) و المعادلة (*) متكافئتان لهما نفس مجوعة

الحلول إذن نحل المعادلة $106x-25y=-1$...(*)

بما أن الثنائية $(4;17)$ حل للمعادلة (*) فإن :

$106(4)-25(17)=-1$...(E)

من (*) و (E) نجد : $106x-25y=106(4)-25(17)$ أي :

$106(x-4)=25(y-17)$

لدينا : $25/106(x-4)$ و 25 و 106 أوليان فيمابينهما

حسب غوص $25/(x-4)$ إذن : $x=25k+4$

بتعويض x نجد : $y=106k+17$ إذن مجموعة حلول

المعادلة (1) هي الثنائيات الصحيحة $(25k+4;106k+17)$

مع $k\in\mathbb{Z}$

3.تبيان أن x و y أوليان فيمابينهما حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (1) :

لدينا d قاسم مشترك لـ x و y أي $\begin{matrix}d/x\\d/y\end{matrix}$ ومنه $\begin{matrix}d/106x\\d/25y\end{matrix}$ إذن

: $d/106x-25y$ أي $d/-1$ و $d\in\mathbb{N}$ ينتج $d/1$ أي $d=1$

إذن : $PGCD(x;y)=1$ ومنه x و y أوليان فيمابينهما

4. تعين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $n\equiv 4[25]$ وباقي قسمة n على 106 هو 17 :

أي نحل الجملة : $\begin{cases}n\equiv 4[25]\\n\equiv 17[106]\end{cases}$ إذن : $\begin{matrix}n=25\alpha+4\\n=106\beta+17\end{matrix}$ ومنه

: $106\beta+17=25\alpha+4$ ومنه $106\beta-25\alpha=-13$

لدينا الثنائية $(4;17)$ حل خاص للمعادلة

$106\beta-25\alpha=-1$ ومنه الثنائية $(4\times13;17\times13)$ حل

خاص للمعادلة $106\beta-25\alpha=-13$ بعد ذلك نحل المعادلة

$106\beta-25\alpha=-13$ باتباع نفس الطريقة في السؤال 2.

نجد : $\begin{cases}\beta=25p+52\\\alpha=106p+221\end{cases};p\in\mathbb{N}$ لكن

$n=106\beta+17$ بالتعويض نجد

$n=106(25p+52)+17$ ومنه :

$n=2650p+5529;\ p\in\mathbb{N}$

5.تعيين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة (1) حيث : $x+y$ مضاعف لـ 10 :

لدينا $x+y=25k+4+106k+17=131k+21$

و لدينا $x+y$ مضاعف لـ 10 معناه $x+y\equiv 0[10]$ أي :

$131k+21\equiv 0[10]$ أي : $k+1\equiv 0[10]$ أي $k\equiv -1[10]$ أي

$k\equiv 9[10]$ ومنه $k=10t+9$ ومنه :

$(x;y)=\{(250t+229;1060t+971);t\in\mathbb{Z}\}$

التمرين الثالث :

1.حساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(0;2;1)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة بالدرجات للزاوية : $\widehat{BAC}$:

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ومنه :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2$

$COS(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times\sqrt{5}}=0,21$ ومنه

$\widehat{BAC}=77^0$

2.استنتاج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية :

بما أن : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=77^0$ فإن A ، B و C ليست في استقامية

استنتاج أن معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

$A(-2;0;1):2(-2)-0+2(1)+2=-2+2=0$

لدينا : $B(1;2;-1):2(1)-2+2(-1)+2=4-4=0$

$C(-2;2;2):2(-2)-2+2(2)+2=-6+6=0$

ومنه معادلة المستوي (ABC) هي $2x-y+2z+2=0$

3.أ. كتابة معادلة الديكارتية للمستوي (P) المستوي المحوري لـ $[AB]$:

(P) المستوي المحوري لـ $[AB]$ معناه : $AM=BM$ يكافىء :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2}$

ومنه بعد التبسيط نجد : $6x+4y-4z-1=0$

ب. تبيان أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق $AM=CM$ هي المستوي (P') معادلته $4y+2z-7=0$:

$AM=CM$ معناه :

$\sqrt{(x+2)^2+y^2+(z-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$

و بعد التبسيط نجد : $4y+2z-7=0$ (و.هـ.م)

ج. تبيان أن (P) و (P') متقاطعان : لدينا : $\overrightarrow{n_{(P)}}(6;4;-4)$

و $\overrightarrow{n_{(P')}}(0;4;2)$ و منه $\dfrac{0}{6}\neq\dfrac{4}{4}\neq\dfrac{2}{-4}$ إذن (P) و (P')

متقاطعان وفق مستقيم

تعيين التمثيل الوسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (P')

لدينا : $\begin{cases}6x+4y-4z-1=0\\4y+2z-7=0\end{cases}$ ومنه :

$\begin{cases}6x-2z+7-4z-1=0\\4y=-2z+7\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}6x-6z=-6\\4y=-2z+7\end{cases}$ و منه

$\begin{cases}x=z-1\\y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4}\end{cases}$ ومنه : $\begin{cases}x=z-1\\y=-\frac{1}{2}z+\frac{7}{4}\\z=z\end{cases}$ إذن :

$\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ إذن : $(\Delta):\begin{cases}x=t-1\\y=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4};t\in IR\\z=t\end{cases}$

4.أ/ تبيان أن (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها:

لدينا : $\vec{u}_{(\Delta)}\left(1;-\frac{1}{2};1\right)$ ومنه : $\frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{1}{2}$ إذن

$\overrightarrow{n_{(ABC)}}(2;-1;2)$

$\vec{u}_{(\Delta)}//\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ إذن (Δ) و (ABC) متعامدان ويتقاطعان في نقطة هي ω

لدينا : $2(t-1)-\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}\right)+2t+2=0$ ومنه : $t=\frac{7}{18}$

ومنه : $\omega\left(-\frac{11}{18};\frac{14}{9};\frac{7}{18}\right)$

ب/ استنتاج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :

لتبيان أن ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC يكفي أن نبين : $\omega A=\omega B=\omega C$

ولدينا $\omega A=\omega B=\omega C=\frac{3\sqrt{170}}{18}$

5. النقطة G_α مرجح الجملة

$\{(A;\alpha^2-1);(B;\alpha^2+2)(C;-2\alpha^2)\}$ حيث : α عدد حقيقي

- تعين احداثيات النقطة G_α :

$x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4$ ، $y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2$ و $z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2$

-استنتاج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في IR :

لدينا : $\begin{cases}x_{G_\alpha}=3\alpha^2+4\\y_{G_\alpha}=4-2\alpha^2\\z_{G_\alpha}=-3-4\alpha^2\end{cases};\alpha^2\in IR$ بوضع : $\alpha^2=\lambda$ نجد :

$\begin{cases}x_{G_\alpha}=3\lambda+4\\y_{G_\alpha}=4-2\lambda\\z_{G_\alpha}=-3-4\lambda\end{cases};\lambda\in IR$ ومنه تمثل النقط G_α مستقيم

التمرين الرابع :

I.لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1, x>0$ و $f(0)=1$

1.حساب نهاية f عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1=-\infty$$

2.دراسة قابلية إشتقاق f عند 0 :

من الواضح أن f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لانها ليست معرفة على يسار 0

لندرس قابلية إشتقاق f على يمين 0 :

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left(3-\ln x^2\right)+1-1}{x}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{2}x\left(3-\ln x^2\right)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{2}x(3-2\ln x)$$

ومنه الدالة f

$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{3}{2}x-x\ln x=0$$

قابلة للاشتقاق على يمين 0 و المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0;1)$

3.دراسة إتجاه تغير الدالة f :

حساب المشتق:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$$f'(x)=x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x^2\left(\frac{-2}{x}\right)=x(3-2\ln x)-x$$

ومنه : $f'(x)=2x(1-\ln x)$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(1-\ln x)$ لأن $2x>0$

$f'(x)\geq 0$ يكافىء $(1-\ln x)\geq 0$ يكافىء $\ln x\leq 1$ أي $x\leq e$ أي $x\in]0;e]$ إذن :

$x\in]0;e]$ يكافىء $f'(x)\geq 0$ و منه الدالة f متزايدة تماما ونستنتج $x\in[e;+\infty[$ يكافىء $f'(x)\leq 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	$-\infty$

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$

تبيان انه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث : $\alpha\geq 0$ و $f(\alpha)=0$: من جدول التغيرات نجد الدالة f متناقصة تماما على $[e;+\infty[$ و مستمرة على هذا المجال و لدينا :

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+1$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبلا وحيدا α في المجال

$[e;+\infty[$ (نلاحظ على المجال $[0;e]$ أن $f(x)\geq 1$) وهكذا

يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $\alpha\geq 0$ و $f(\alpha)=0$

التحقق أن $4,6<\alpha<4,7$:

لدينا : $f(4,6)=$ و $f(4,7)=$ أي : $f(4,7)\times f(4,6)<0$

5ـكتابة معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$(D): y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه : $(D): y=2x+\frac{1}{2}$

II.لدينا : $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$:

1. حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g'(x)=f'(x)-2$ أي $g'(x)=2x(1-\ln x)-2$

الدالة g' قابلة للإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ حيث :

$g''(x)=2(1-\ln x)+2x\left(\frac{-1}{x}\right)$ أي $g''(x)=-2\ln x$

- **دراسة إتجاه تغير g' :**

$g''(x)\geq 0$ يكافىء $-2\ln x\geq 0$ يكافىء

$\ln x\leq 0$ يكافىء $0<x\leq 1$ إذن الدالة g' متزايدة تماما على $]0;1]$

$g''(x)<0$ يكافىء $-2\ln x<0$ يكافىء

$\ln x>0$ يكافىء $x<1$ إذن الدالة g' متناقصة تماما على $[1;+\infty[$

- **جدول تغيرات g' :**

x	0		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	-2	↗	0	↘	$-\infty$

- **إشارة الدالة g' على المجال $]0;+\infty[$:**

من جدول التغيرات الدالة g' نجد من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)\leq 0$

2ـتحديد إتجاه تغير الدالة g :

لدينا من السؤال ـ1ـ $g'(x)\leq 0$ و منه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

ـجدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$	1	↘	0	↘	$-\infty$

$g(1)=0$

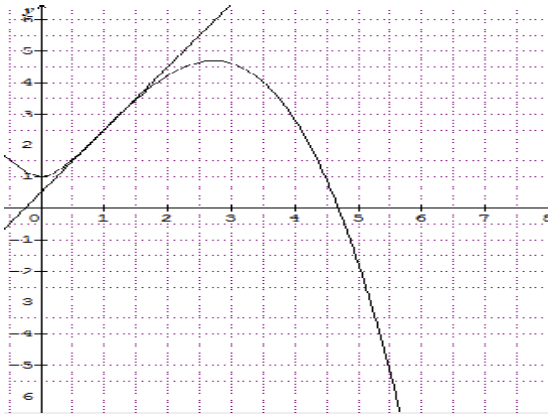
من جدول تغيرات الدالة g نجد : $g(x)\geq 0$ من أجل $x\in]0;1]$

$g(x)\leq 0$ من أجل $x\in[1;+\infty[$

استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) : يعود إلى دراسة إشارة الفرق $f(x)-2x-\frac{1}{2}$ أي إشارة $g(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)	

3ـإنشاء (C_f) و (D) :



III.1. حساب I_n بدلالة n باستعمال المكاملة بالتجزئة :

لدينا : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$ ، نضع : $u'(x)=x^2$ ، $v(x)=\ln x$ ومنه :

$u(x)=\frac{x^3}{3}$ ، $v'(x)=\frac{1}{x}$ اذن : $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}dx$

ومنه:

$I_n=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$ أي

$I_n=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{n^3}\ln\left(\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\times\frac{1}{n^3}\right)$ بعد التبسيط نجد :

$I_n=\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)-\frac{1}{9}$

2ـاستنتاج بدلالة n المساحة $A(n)$:

بما أن $0<\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ أي $0<x<1$ فإن $f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$

حسب السؤال ـ2ـ من الجزء ـII ـ أي من أجل $\frac{1}{n}\leq x\leq 1$ فإن :

$f(x)-2x-\frac{1}{2}>0$ و بالتالي

$A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right)dx$ و لدينا :

$$f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x^2(3-\ln x)+1-2x-\frac{1}{2}$$

ومنه :

$$=\frac{3}{2}x^2-x^2\ln x-2x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x$$

$$A(n)=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\ln x\right)dx$$

ومنه

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$$

$A(n)=\left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-I_n$ بعد التبسيط نجد :

$$A(n)=-\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-I_n$$

وبعد التبسيط

$$=-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3}+\ln(n)\right)+\frac{1}{9}$$

نجد:

$$A(n)=\left(-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right)+\frac{1}{9}\right)\times 4cm^2$$

حساب $\lim_{n\to+\infty}A(n)$:

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n^3}=0$ ومنه نجد $\lim_{n\to+\infty}A(n)=\frac{1}{9}\times 4=\frac{4}{9}$

ملاحظة هامة: تضرب قيمة المساحة بمربع وحدة الطول أي بالعدد $2\times 2=4$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

اختبار الباكالوريا التجريبي — دورة : ماي 2013
الشعبة : رياضيات + تقني رياضي — ثانوية بلحاج قاسم نور الدين

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 04ساعات ونصف

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول :(04 نقاط)

في الفضاء المزود بمعلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ تعطى النقط $A(1\,,\,2\,,\,2)$, $B(-1\,,\,0\,,\,1)$, $C(3\,,\,2\,,\,1)$

1. بين أن المستوي (Q) الذي يشمل النقط A ، B ، C معادلته : $x - 2y + 2z - 1 = 0$
2. (P) مستو معادلته $z = 1$.
   أ) تحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).
   ب) استنتج تقاطع المستويين (P) و (Q)
   جـ) عين تمثيلاً وسيطيا للمستقيم (BC).
3. اثبت أن النقطة $H(1,2,1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).
   هل المستقيمان (BC) و (AH) متقاطعان؟ برر إجابتك .
4. G مرجح الجملة المثقلة $\{(A\,,1)\,,(B\,,1)\,,(C\,,-1)\}$.
   أ) عين إحداثيات النقطة G .
   ب) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

التمرين الثاني :(05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B حيث :

$$z_B = \sqrt{3} - i \quad , \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

1. اكتب العددين z_A , z_B على الشكل الأسي ، ثم أنشئ النقطتين A و B .
2. r دوران مركزه O ، وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
   - عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r .
   - اكتب $z_{A'}$ على الشكل الجبري ، ثم أنشئ النقطة A' .
3. h تحاك مركزه O ، ونسبته $\frac{-3}{2}$.
   - اكتب على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h ، ثم أنشئ النقطة B' .
4. μ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OA'B' ، و R نصف قطرها و z_μ لاحقة النقطة μ.
   أ) باستعمال الخاصية : $z\overline{z} = |z|^2$ تحقق من صحة العبارات التالية :

$$(z_\mu - 2i)\left(\overline{z_\mu} + 2i\right) = R^2 \quad , \quad z_\mu\,\overline{z_\mu} = \left(z_\mu + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\mu} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$$

   ب) استنتج أن : $z_\mu - \overline{z_\mu} = 2i$ و $z_\mu + \overline{z_\mu} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$
   جـ) استنتج z_μ لاحقة النقطة μ وقيمة R.

التمرين الثالث :(04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : من اجل كل عدد طبيعي n لدينا $u_0 = 8$ و $u_{n+1} = 2u_n + 5n - 5$

1. احسب u_1 ، u_2 و u_3.
2. نضع من اجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n + 5n$

- برهن أن (v_n) متتالية هندسية ، ثم اكتب عبارة كل من v_n و u_n بدلالة n ماهي نهاية المتتالية (u_n)؟
- عين العدد الطبيعي n حيث: $2^n = 2048$ استنتج أن 2008 حد من حدود المتتالية (u_n).
- اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي k : $2^{4k+1} \equiv 2[10]$
- بين أن u_n عدد طبيعي .
- عين حسب قيم n رقم آحاد العدد u_n.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + x + e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α.
   . تحقق أن α من المجال $]-1.3 ; -1.2[$.
3. حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x\,e^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها .

1. ا) ادرس تغيرات الدالة f (نلاحظ أن $f'(x)$ و $g(x)$ من نفس الإشارة).
   - برهن أن $f(\alpha) = 1 + \alpha$
   - برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) حيث y = x معادلة له .
   - اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم .
   - ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T).
2. H نقطة فاصلتها x وترتيبها معدوم ،المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\psi(x) = \overline{MN}$.

   ا) بين أن $\psi(x) = \frac{x}{1+e^x}$

   ب) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا: $\psi'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}.g(-x)$

   استنتج أن $\overline{MN}$ يكون أكبر ما يمكن عند $(-\alpha)$

   جـ) برهن أن $f(-\alpha) = 1$

   د) برهن ان المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ).

   هـ) ارسم في المعلم المتعامد $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المنحني (Γ) و (Δ) و (T) (تؤخذ 5cm كوحدة)
3. ا) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ لدينا : $\frac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

   ب) استنتج باستعمال المتباينة السابقة حصرا لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (Γ) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ و $x = 1$ و $x = -\alpha$

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

~ عدد حقيقي من المجال $[0;®]$ ، z عدد مركب و $f(z)$ كثير حدود معرف بـ:

$$f(z) = z^3 - (1-2\sin\sim)z^2 + (1-2\sin\sim)z - 1$$

أ) تحقق أن العدد 1 جذر لـ $f(z)$.

ب) عين العددين الحقيقين a و b بحيث : $f(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=0$.

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ ، ولتكن النقط A ، B و C لواحقها z_1 , z_2 , z_3 على الترتيب حيث : $z_1=1$, $z_2=-\sin\sim+i\cos\sim$, $z_3=-\sin\sim-i\cos\sim$

أ) اكتب على الشكل الأسي كل من z_1 , z_2 , z_3 .

ب) حدد طبيعة المثلث ABC ، ثم عين قيمة ~ حتى يكون قائم في A .

ج) G مركز ثقل المثلث ABC، ماهي لاحقتها ؟

- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MO}\right\|$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1,2,2)$, $B(1,0,1)$, $C(3,2,1)$

و المستوي (P) ذي المعادلة $z=1$ ، النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

(Δ) هو المستقيم المعرف بـ: $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-4-t \ ; \ (t\in\mathbb{R}) \\ z=1 \end{cases}$

(S) سطح الكرة المعرفة بالمعادلة $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0$

من بين الأجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير

	أ)	ب)	جـ)	د)
1. المستقيم (BC)	محتوى في المستو (P)	يقطع المستوي (P)	يوازي المستوي (P)	عمودي على المستو (P)
2. إحداثيات D هي	(1 ,2,-1)	(1,1,2)	(1,2,1)	(1,2,0)
3. تمثيل الوسيطي لـ(BC)	$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=-3t \end{cases}$	$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=3 \end{cases}$
4. المستقيمان (Δ) و (BC)	متوازيان تماما	منطبقان	متقاطعان	ليسا من نفس المستوي
5. سطح الكرة (S)	تمس (P)	يقطعها (P)	لا يقطعها (P)	مركزها ينتمي إلى (P)

التمرين الثالث :(04 نقاط)

نعتبر المعادلة $4x - 13y = 7$ حيث x و y عددان صحيحان.

1. عين الحل الخاص (x_0 , y_0) للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0 - y_0 = 4$
2. حل المعادلة (1) .
3. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y .
   - ماهي القيم الممكنة للعدد d إذا كان $(x ، y)$ حلا للمعادلة (1)؟
   - عين الثنائيات $(x ، y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون d=7.
   - عين الثنائيات $(x ، y)$ من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) التي تحقق $\begin{cases} d = 7 \\ x + y \prec 400 \end{cases}$

التمرين الرابع : (6 نقاط)

في كل ما سيأتي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة 2cm

الجزء الأول : نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ و (Γ) تمثيلها البياني .

- حدد نهاية u عند $-\infty$.
- برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$
- استنتج نهاية u عند $+\infty$.

2. أ) برهن أن : $(u(x)+2x)$ تنتهي إلى الصفر عندما تنتهي x إلى $-\infty$.

ب) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا :. $u(x) > 0$

ج) استنتج إشارة $(u(x)+2x)$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة .

3. أ) برهن أن : $u'(x) = \dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

ب) ادرس تغيرات الدالة u .

ج) ارسم المنحنى (Γ) و المستقيم المقارب له .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \int_0^x \dfrac{-1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ و (Γ) تمثيله البياني .

1- تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f(x) = \ln(u(x))$

2- عين نهايات f عند $-\infty$ ثم $+\infty$ وادرس تغيرات الدالة f .

3- عين معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) + x$.

برهن أن g متزايدة على $\mathbb{R}$ ولن $g(0) = 0$ ، استنتج وضعية المنحني (Γ) بالنسبة للمماس (T).

4- ارسم في نفس المعلم المنحني (Γ) و المماس (T).

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (Γ) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$ $(\alpha \succ 0)$

التصحيح

الموضوع الاول

التمرين الاول : (04 نقاط)

$A(1,2,2)$ $B(-1\ ,\ 0,1)$ و $C(3,2,1)$

1) **إثبات أن المستوي** (Q) الذي يشمل النقط A و B و C معادلته $x-2y+2z-1=0$

لدينا $1-2\times2+2\times2-1=0$ أي $A\in(Q)$ و $-1-2\times0+2\times1-1=0$ أي $B\in(Q)$ و $3-2\times2+2\times1-1=0$ أي $C\in(Q)$

إذن (Q) هو المستوي (ABC) ---------- 0.5

2) (P) مستو حيث $z=1$ معادلة له

ا) **التحقق أن المستقيم** (BC) **محتوى في المستوى** (P).

لدينا $B\in(P)$ و $C\in(P)$ ومنه (BC) محتوي في المستوي (P) ---------- 0.5

ب) **استنتاج تقاطع المستوي (P) و** (Q)

بما أن $(BC)\subset(P)$ و $(BC)\subset(Q)$ فإن $(P)\cap(Q)=\{(BC)\}$ ---------- 0.5

جـ) **تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم** (BC)

لدينا $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x-2y+2z-1=0\\y=t\\z=1\end{cases}$ معناه $\begin{cases}x=2t-1\\y=t\\z=1\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$ ---------- 0.5

3) **إثبات أن النقطة** $H(1,2,1)$ **هو المسقط العمودي للنقطة** A **على** (P)

لدينا من جهة $\overrightarrow{HA}(0,0,1)$ و $\overrightarrow{n_p}(0,0,1)$ أي $\overrightarrow{HA}$ و $\overrightarrow{n_p}$ مرتبطان خطيا ومن جهة أخرى $H\in(P)$

إذن H هي مسقط النقطة A على (P) ---------- 0.5

(BC) و (AH) غير متقاطعان لأنهما ليسا من نفس المستوي

التبرير $H\notin(BC)$ لان $\begin{cases}1=2t-1\\2=t\\1=1\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\t=2\end{cases}$ ---------- 0.5

4) G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1),(B,1),(C-1)\}$

ا) $x_G=\dfrac{1\times1+1\times(-1)-1\times3}{1}=-3$, $y_G=\dfrac{1\times2+1\times0-1\times2}{1}=0$, $z_G=\dfrac{1\times2+1\times1-1\times1}{1}=2$

إذن G(-3,0,2) ---------- 0.5

ب) **تعيين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث** $3\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|\rightarrow(*)$

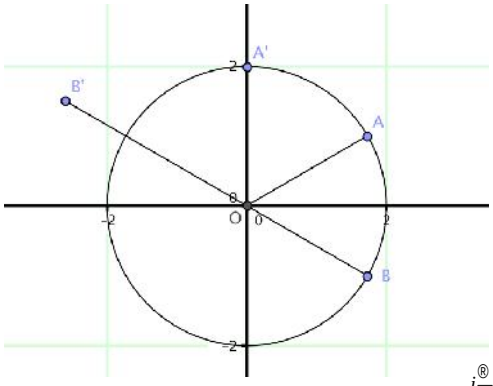
لتكن النقطة k مركز ثقل المثلث ABC اذن (*) تكافئ 3MG =3MK أي MG=MK

إذن المجموع (E) هو مجموع نقط المستوي المحوري للقطعة $[GK]$ ---------- 0.5

التمرين الثاني :(05نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B حيث: $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_B=\sqrt{3}-i$

1/ **كتابة** z_A **و** z_B **على الشكل الأسي** .



لدينا $z_A=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\left[2,\dfrac{®}{6}\right]$ أي $z_A=2e^{i\frac{®}{6}}$

و $z_B=\overline{z_A}=\left[2,-\dfrac{®}{6}\right]$ أي $z_B=2e^{-i\frac{®}{6}}$ ------- 0.5

2) r دوران مركزه o وزاويته $\dfrac{®}{3}$ معناه $z'=e^{i\frac{®}{3}}z$ ------- 0.5

تعيين $z_{A'}$ لاحقة A' صورة A بالدوران r لدينا $z_{A'}=e^{i\frac{®}{3}}\times2e^{i\frac{®}{6}}=2e^{i\frac{®}{2}}=2i$ إنشاء النقطة A' ---------- 0.5

3) h التحاكي الذي مركزه o ونسبته $-\frac{3}{2}$ معناه $z' = -\frac{3}{2}z$

الكتابة على الشكل المثلثي $z_{B'}$ لاحقة B' صورة B بالتحاكي h.

$$z_{B'} = -\frac{3}{2}\times 2e^{i\left(-\frac{®}{6}\right)} = -\frac{3}{2}\times 2\left(\cos\left(-\frac{®}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{®}{6}\right)\right)$$

لدينا $= 3\left(-\cos\left(-\frac{®}{6}\right)-i\sin\left(-\frac{®}{6}\right)\right)$ أي $z_{B'} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ الإنشاء ------- 0.5

$$= 3\left(\cos\left(® - \frac{®}{6}\right)+i\sin\left(® - \frac{®}{6}\right)\right) = \left[3\,,\,\frac{5®}{6}\right]$$

4) μ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث OA'B' و R نصف قطرها و z_μ لاحقة النقطة μ

ا) باستعمال الخاصية $z\bar{z} = |z|^2$

لدينا $(z_\mu - 2i)(\overline{z_\mu}+2i) = (z_\mu - 2i)(\overline{z_\mu - 2i}) = |z_\mu - 2i|^2 = \mu A'^2 = R^2$ ---------- 0.5

و $\left(z_\mu + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\mu} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \left(z_\mu + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\mu + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}\right) = \left|z_\mu - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)\right|^2 = \mu B'^2 = R^2$ ----- 0.5

ب) لنستنتج أن $z_\mu - \overline{z_\mu} = 2i$

لدينا $(z_\mu - 2i)(\overline{z_\mu}+2i) = R^2$ معناه $\cancel{z_\mu\overline{z_\mu}} + 2i\,z_\mu - 2i\,\overline{z_\mu} + 4 = \cancel{R^2}$ لأن $(z_\mu\overline{z_\mu} = R^2)$

معناه $2i\left(z_\mu - \overline{z_\mu}\right) = -4$

معناه $z_\mu - \overline{z_\mu} = -\frac{4}{2i} = 2i$ ---------- 0.5

ولدينا من جهة أخرى $\left(z_\mu + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\overline{z_\mu} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$ يكافئ $\cancel{z_\mu\overline{z_\mu}} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)z_\mu + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\overline{z_\mu} + 9 = \cancel{R^2}$

يكافئ $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(z_\mu + \overline{z_\mu}\right) + \frac{3}{2}i\left(z_\mu - \overline{z_\mu}\right) + 9 = 0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(z_\mu + \overline{z_\mu}\right) + \frac{1}{2}i\,(2i) + 3 = 0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(z_\mu + \overline{z_\mu}\right) - 1 + 3 = 0$

يكافئ $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(z_\mu + \overline{z_\mu}\right) = -2$

يكافئ $z_\mu + \overline{z_\mu} = \frac{-4\sqrt{3}}{3}$ ---------- 0.5

جـ) لنستنتج لاحقة النقطة μ وقيمة R

لدينا $z_\mu + \overline{z_\mu} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ بالجمع نجد $2z_\mu = -\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2i$

$z_\mu - \overline{z_\mu} = 2i$

ومنه $z_\mu = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + i$ ---------- 0.5

و بالتالي $R = |z_\mu| = \frac{\sqrt{7}}{3}$ ---------- 0.5

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=8$ و $u_{n+1}=2u_n+5n-5$

1) $u_1=2u_0-5=11$, $u_2=2u_1+0=22$, $u_3=2u_2+5\times2-5=49$ ---------- 0.5

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+5n$

- **إثبات أن (v_n) متتالية هندسية مع تعين أساسها وحدها الأول .**

لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}+5(n+1)=2u_n+5n-5+5n+5=2u_n+10=2(u_n+5)=2v_n$

أي (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0=u_0=8$ ---------- 0.5

عبارة v_n بدلالة n : $v_n=8\times2^n=2^{n+3}$

عبارة u_n بدلالة n : $u_n=v_n-5n=2^{n+3}-5n$ 0.5

$\lim u_n=\lim(8\times2^n-5n)=\lim n\left(8\frac{2^n}{n}-5\right)=+8$ 0.5

-**تعيين العدد الطبيعي n حيث** $2^n=2048$

لدينا $2^n=2048$ ومنه $n\ln2=\ln2048$ ومنه $n=\frac{\ln2048}{\ln2}=11$ ---------- 0.5

استنتاج أن 2008 حد من حدود المتتالية (u_n).

لدينا $u_8=2008$ لان $u_8=2^{8+3}-5\times8=2^{11}-40=2048-40=2008$ ---------- 0.5

إثبات انه من اجل كل عدد طبيعي k : $2^{4k+1}\equiv2[10]$

باستعمال البرهان بالتراجع : نسمي P(k) هذه الخاصية .

ا) نتحقق من صحة P(0) : لدينا $2^{4\times0+1}=2$ و $2\equiv2[10]$

ب) نفرض أن P(k) صحيحة أي $2^{4k+1}\equiv2[10]$ من اجل أي عدد طبيعي k

و نبرهن أن P(k+1) صحيحة أي $2^{4(k+1)+1}\equiv2[10]$ من اجل أي عدد طبيعي k؟

لدينا $2^{4(k+1)+1}=2^4\times2^{4k+1}$ مع $(2^4\equiv6[10];2^{4k+1}\equiv2[10])$ ومنه $2^4\times2^{4k+1}\equiv6\times2[10]$ ومنه $2^{4k+5}\equiv2[10]$

أي P(k+1) صحيحة

نتيجة : من أ) و ب) وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $2^{4k+1}\equiv2[10]$ ---------- 01

- **إثبات أن u_n عدد طبيعي** $(u_n=8\times2^n-5n)$

- لإثبات أن $(8\times2^n-5n)\in\mathbb{N}$ يكفي أن نثبت أن $8\times2^n\geq5n$ (لان $5n\in\mathbb{N}$; $8\times2^n\in\mathbb{N}$)

لدينا من اجل أي عدد طبيعي n : $(8>5 \quad ; \quad 2^n>n)$ ومنه $8\times2^n>5n$ ومنه $8\times2^n-5n>0$ ومنه $u_n\in\mathbb{N}$ ---- 0.5

($2^n>n$ من اجل أي عدد طبيعي n يمكن إثباتها بالتراجع)

- تعيين حسب قيم n رقم آحاد العدد u_n.

أي ندرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة u_n على 10 لدينا:

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	[10]
$2^n\equiv$	1	2	4	8	6	2	4	8	6	2	[10]
$8\times2^n\equiv$	8	6	2	4	8	6	2	4	8	6	[10]
$5n\equiv$	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	[10]
u_n	8	1	2	9	8	1	2	9	8	1	[10]

من اجل n=4P $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 8

من اجل n=4P+1 $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 1

من اجل n=4P+2 $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 2

من اجل n=4P+3 $P\in\mathbb{N}$ رقم الآحاد هو 9

0.5

التمرين الرابع :

I . لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+x+e^{x}$

1) دراسة تغيرات الدالة g

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=1+e^{x}$ أي $g'(x)>0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	~	$+\infty$
f'(x)		+	
1 + x + e (x)	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

2) إثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد ~ حيث $-1,3<\sim<-1,2$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد ~ في $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-1,3)\simeq-0.02$ و $g(-1,2)\simeq0.1$ أي $g(-1,3)\times g(-1,2)<0$ ومنه $-1,3<\sim<-1,2$ ---------- 0.5

3) تحديد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$

$g(x)=0;x=\sim$ و $g(x)<0;x<\sim$ و $g(x)>0;x>\sim$ -------- 0.25

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{1+e^{x}}$ ، (Γ) تمثيلها البياني .

1) دراسة تغيرات الدالة f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+e^{x}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)=+\infty$ 0.25

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{\left(1+e^{x}\right)(1+x)e^{x}-xe^{2x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{x}+xe^{x}+e^{2x}+2e^{2x}-xe^{2x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{\left(1+x+e^{x}\right)e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\frac{e^{x}\times g(x)}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$$ ---------- 0.25

علما انه من اجل أي عدد حقيقي x : $\dfrac{e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي

x	$-\infty$	~	$+\infty$
f'(x)	−	0	+
f(x)	0 ↘	~ +1	↗ $+\infty$

- إذا كان $x=\sim$ فإن $f'(x)=0$
- إذا كان $x<\sim$ فإن $f'(x)<0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty,\sim[$
- إذا كان $x>\sim$ فإن $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]\sim,+\infty[$

إثبات أن $f(\sim)=1+\sim$

لدينا $g(x)=0$ معناه $1+\sim+e^{\sim}=0$ أي $e^{\sim}=-(1+\sim)=-1-\sim$

ولدينا $f(x)=\dfrac{\sim e^{\sim}}{1+e^{\sim}}=\dfrac{\sim(-1-\sim)}{1-1-\sim}=1+\sim$ ---------- 0.5

إثبات أن (Γ) يقبل مستقيم مقارب (Δ) حيث $y=x$ معادلة له

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^{x}}{1+e^{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^{x}-x-xe^{x}}{1+e^{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{1+e^{x}}\right)=0$$ ---------- 0.5

- كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O : $y=\dfrac{1}{2}x$ ---------- 0.5

- دراسة وضعية (Γ) بالنسبة إلى (T).

ندرس إشارة الفرق $\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)$ أي إشارة $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)$

من اجل $x<0$ فان $e^{x}<1$ ومنه $e^{x}-1<0$ ومنه $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\succ0$ أي (Γ) فوق (T)

من اجل $x>0$ فان $e^{x}>1$ ومنه $e^{x}-1>0$ ومنه $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\succ0$ ومنه (Γ) فوق (T) ---------- 0.5

H(2 نقطة فاصلتها x وترتيبها معدوم . المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N.

نضع $\varphi(x)=\overline{MN}$

أ) اثبات ان $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$

لدينا $\varphi(x)=x-f(x)$ أي $\varphi(x)=x-\dfrac{xe^x}{1+e^x}$ أي $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$ ---------- 0.5

البرهان انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\times g(-x)$

لدينا $\varphi'(x)=-\dfrac{1+e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x\left(e^{-x}+1-x\right)}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}\times g(-x)$ ---------- 0.5

$\varphi'(x)=0$ معناه $g(-x)=0$ معناه $-x=\alpha$ و منه $x=-\alpha$

$\varphi'(x)>0$ معناه $g(-x)>0$ معناه $-x>\alpha$ ومنه $x<-\alpha$

$\varphi'(x)<0$ معناه $g(-x)<0$ معناه $-x<\alpha$ ومنه $x>-\alpha$

أي $\varphi(x)$ تقبل قيمة حدية عظمى من اجل $x=-\alpha$

جـ) إثبات أن $f(-\alpha)=1$

لدينا $f(-\alpha)=\dfrac{-\alpha e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}=\dfrac{-\alpha}{1+e^{\alpha}}=\dfrac{-\alpha}{1-1-\alpha}=\dfrac{-\alpha}{-\alpha}=1$ ---------- 0.25

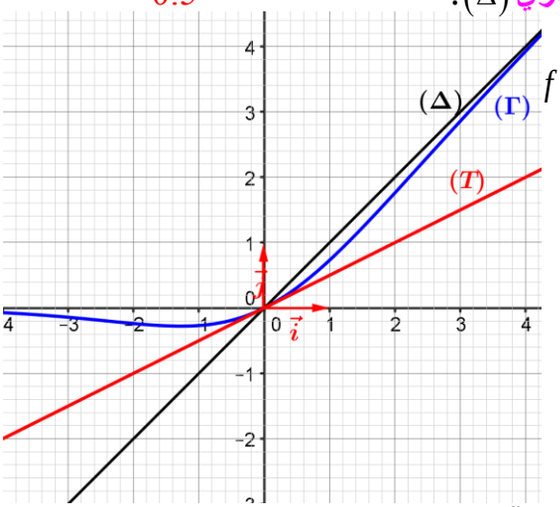
د) البرهان أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $-\alpha$ يوازي (Δ). ---------- 0.5

لدينا $f'(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}\times g(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}\left(1-\alpha+e^{-\alpha}\right)}{(1+e^{-\alpha})^2}=\dfrac{1+e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}}{(1+e^{-\alpha})^2}$

مع $e^{\alpha}=-1-\alpha$ إذن $f'(-\alpha)=\dfrac{1-1-\alpha-\alpha(-1-\alpha)}{(1-1-\alpha)^2}=1$

ومنه المماس في A يوازي (Δ).

هـ) الرسم لكل من (Γ) و (Δ) و (T)



3. أ) البرهان انه من اجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq 1$ لدينا $\dfrac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$

نبرهن من جهة أن $f(x)\leq x$ أي $\dfrac{xe^x}{1+e^x}\leq x$ أي $\dfrac{xe^x}{1+e^x}-x\leq 0$ أي $\dfrac{-x}{1+e^x}\leq 0$ وهذا صحيح من اجل $x\geq 1$

ونبرهن من جهة أخرى أن $f(x)-\dfrac{e^x}{1+e^x}\geq 0$ أي $\underbrace{\dfrac{e^x}{1+e^x}}_{\geq 0}\left(\underbrace{x-1}_{\geq 0}\right)\geq 0$ وهذا صحيح وبالتالي $\dfrac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ ---- 0.5

ب) إيجاد حصر لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) و المستقيمات التي معادلتها y=0 ، x=1 و $x=-\alpha$

بماأن $\dfrac{e^x}{1+e^x}\leq f(x)\leq x$ فإن $\displaystyle\int_1^{-\alpha}\frac{e^x}{1+e^x}dx\leq\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\int_1^{-\alpha}x\,dx$

أي $\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_1^{-\alpha}\leq\displaystyle\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^{-\alpha}$

أي $\ln\left(\dfrac{1+e^{-\alpha}}{1+e}\right)\ u.a\leq\displaystyle\int_1^{-\alpha}f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}\left(\alpha^2-1\right)u.a$ ---------- 0.5

التصحيح

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط) ~ عدد حقيقي من المجال $[0,®]$ و $f(z)$ كثير الحدود حيث :

1) $f(z)=z^3-(1-2\sin\sim)z^2+(1-2\sin\sim)z-1$

أ) التحقيق ان العدد 1 جذر لـ $f(z)$

لدينا $f(1)=1^3-(1-2\sin\sim)\times1^2+(1-2\sin\sim)\times1-1$ 0.5

$=1-1+2\sin\sim+1-2\sin\sim-1=0$

أي 1 هو جذر لـ $f(z)$

ب) تعين العددين الحقيقيين a و b حيث $f(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

باستعمال طريقة هورنر نجد

	1		
1	$-1+2\sin\sim$	$1-2\sin\sim$	-1
	1	$2\sin\sim$	1
1	$2\sin\sim$	1	0

اذن $a=2\sin\sim$ و b=1 0.5

جـ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z)=0$

$f(z)=0$ يكافئ $(z-1)(z^2+2\sin\sim\times z+1)=0$ يكافئ z-1=0 او

$z^2+2\sin\sim\times z+1=0$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2\sin\sim\times z+1=0$

$\Delta=4\sin^2\sim-4=4(\sin^{2a}-1)=-4\cos^2\sim$ اذن $\Delta=4i^2\cos^2\sim$

اما $z=\dfrac{-2\sin\sim-2i\cos\sim}{2}$ او $z=\dfrac{-2\sin\sim+2i\cos\sim}{2}$ 0.5

$=-\sin\sim-i\cos\sim$ $\qquad$ $=-\sin\sim+i\cos\sim$

$A(z_1=1),B(z_2=-\sin\sim+i\cos\sim);C(z_3=-\sin\sim-i\cos\sim)$

2) أ) كتابة كل من z_1 , z_2 ; z_3 على الشكل الأسي.

لدينا $z_1=1=[1,0]=e^{io}$ 0.5

$z_2=-\sin\sim+i\cos\sim=\sin(-\sim)+i\cos(-\sim)=\cos\left(\frac{®}{2}+\sim\right)+i\sin\left(\frac{®}{2}+\sim\right)=\left[1,\frac{®}{2}+\sim\right]=e^{i\left(\frac{®}{2}+\sim\right)}$ 0.5

$z_3=\overline{z_2}=e^{-i\left(\frac{®}{2}+\sim\right)}$ 0.5

ب) المثلث ABC متساوي الساقين لان $|z_1-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{2(1+\sin\sim)}$ 0.5

تعيين قيمة ~ حتى يكون ABC قائم في A .

A(1 ;0) ، $B(-\sin\sim;\cos\sim)$ و $C(-\sin\sim;-\cos\sim)$

$\overrightarrow{BA}(1+\sin\sim;-\cos\sim)$

$\overrightarrow{CA}(1+\sin\sim;\cos\sim)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}=0$ يكافئ $(1+\sin\sim)^2-\cos^2\sim=0$

$2\sin^2\sim+2\sin\sim=0$

$2\sin\sim(\sin\sim+1)=0$ ← 1

يكافئ $\sin\sim=0$ أو $\sin\sim+1=0$ لا تقبل حل في المجال $[0,®]$

يكافئ $\sim=k®$ مع $k\in\mathbb{Z}$

وبما ان $\sim\in[0,®]$ فان $\sim=\{0,®\}$ 0.5

ج) مركز G مركز المثلث ABC نعتبر لاحقة G أي Z_G 0.5

د) مجموع النقط M من المستوي التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MO}\|$ ← (*)

(*) يكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MO}\|$

يكافئ MG=MO

أي مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[GO]$ 0.5

التمرين الثاني :(05نقاط)

1) بما أن $B\in(P)$ و $C\in(P)$ فان المستقيم $(BC)\in(P)$ ---------- 01

2) إحداثيات D هي $(1،2،1)$ ---------- 01

3) $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \\ z=1 \end{cases}$ تمثيل وسيطي لـ (BC) ---------- 01

4) المستقيمان (Δ) و (BC) متقاطعان (متعامدان) فهما من نفس المستوي $\vec{n}_{\Delta}.\overrightarrow{BC}=0$ ---------- 01

5) S سطح كرة مركزها $\mu(1,2,2)$ ونصف قطرها r = 3 $d(\mu,P)=1cm$ ---------- 01

6) إذن S و (P) متقاطعان

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة $4x-13y=7$ ⟵ (1) حيث x و y عددان صحيحان

1) تعيين الحل الخاص (x_0,y_0) للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0-y_0=4$

حل الجملة $\begin{cases} 4x_0-13y_0=7 \\ x_0-y_0=4 \end{cases}$

المحدد $d=\begin{vmatrix} 4 & -13 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=9$ أي $x_0=\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & -13 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{9}=5$; $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{9}=1$ ---------- 01

إذن $(5,1)$ حل خاص للمعادلة (1)

2) تعيين حلول المعادلة (1) لدينا

$$\begin{array}{l} 4x-13y=7 \\ \underline{4\times5-13\times1=7} \\ 4(x-5)-13(y-1)=0 \end{array}$$

أي $4(x-5)=13(y-1)$

لدينا $13 \mid 4(x-5)$ و $13 \wedge 4=1$ إذن $13 \mid x-5$ ومنه $x=13k+5$

$k\in\mathbb{R}$

$4 \mid 13(y-1)$ و $4 \wedge 13=1$ إذن $4 \mid y-1$ ومنه $y=4k+1$

3) ليكن له القاسم المشترك الأكبر للعددين الطبيعيين x و y

* القيم الممكنة للعدد d إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (1)

لدينا $d \mid x$ ومنه $d \mid y$ ومنه $d \mid 4x$ و $d \mid 13y$ ومنه $d \mid 4x-13y$ ومنه $d \mid 7$ إذن $d\in D_7$ أي $d\in\{1,7\}$ ------ 0.5

نعتبر الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية حلول المعادلة (1) بحيث يكون d=7

$\begin{cases} x\equiv0[7] \\ \text{او} \\ y\equiv0[7] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} 13k+5\equiv0[7] \\ 4k+1\equiv0[7] \end{cases}$

$2\times4k\equiv-2[7]$

$4k+1\equiv0[7]$ يكافئ $4k\equiv-1[7]$ يكافئ $k\equiv5[7]$ اي $k=7\sim+5$

$\sim\in\mathbb{N}$

و بالتالي $x=91\sim+70$ و $y=28\sim+21$ $(\sim\in\mathbb{N})$ ---------- 1

نعتبر الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية حلول (1) والتي تحقق $\begin{cases} d=7 \\ x+y<400 \end{cases}$

$91\sim + 70 + 28\sim + 21 < 400$

$119\sim + 91 < 400$

$119\sim < 309$ يكافئ $x + y < 400$

$\sim < \frac{309}{119}$

$\sim < 2,6$

$\sim \in \{0;1,2\}$

إذن $(x, y) \in \{(70,21);(161,49),(252,77)\}$ 0.5

التمرين الرابع :(07نقاط)

نعتبر الدالة U المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $U(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

1) $\lim_{x\to-\infty} U(x) = +\sim$ 0.25

2) أ) نبرهن أن : (U(x)+2x) تؤول إلى ∞ عندما x يؤول الى $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$ 0.25

$$\lim_{x\to-\infty} (U(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

(المستقيم ذو المعادلة y=-2x مستقيم مقارب مائل لـ $(\ddot{\ })$ بجوار $-\infty$)

ب) نبرهن انه من اجل $x \in \mathbb{R}$: $U(x)>0$ أي $\sqrt{x^2+1} - x$

من اجل $x<0$ فان $\sqrt{x^2+1} > x$

$x>0$ فان $\sqrt{x^2+1} > x$ ومنه $x^2+1>x^2$ أي $1>0$ صحيحة 0.5

ج) استنتاج إشارة $(U(x)+2x)$

$$U(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x$$

لدينا $= -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ إذن إشارة $(U(x)+2x)$ من إشارة $\sqrt{x^2+1} - x$ وهو موجب دوما. 0.5

التفسير البياني : المنحنى $(\ddot{\ })$ يقع فوق المستقيم المقارب .

3) نبرهن ان $u'(x) = \frac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

أ) الدالة U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

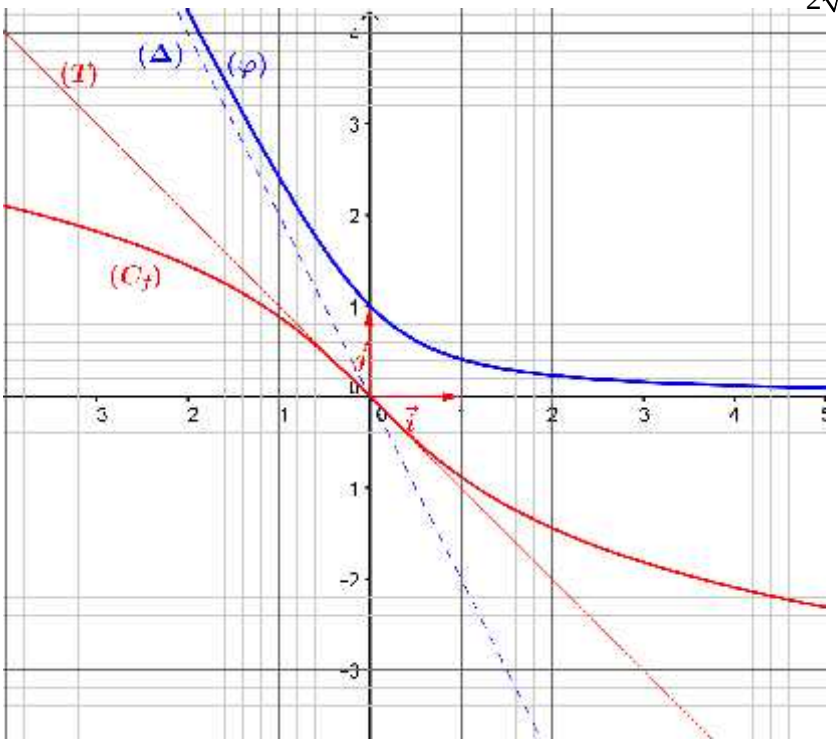
$$U'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$ 0.5

ب) دراسة تغيرات الدالة

إشارة $U'(x)$ عكس إشارة $U(x)$

أي $U'(x)<0$ من اجل كل $x \in \mathbb{R}$

جـ) رسم $(\ddot{\ })$ و المستقيمات المقاربة له .



الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

1/ نتحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=\ln\left(u(x)\right)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}=\dfrac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}\times\dfrac{1}{U(x)}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$ ---------- 0.5

2/ بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}U(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}U(x)=0^+$ فإن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\end{cases}$ 0.5

دراسة تغيرات الدالة f لدينا $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}}<0$ و منه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

3/ كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=-x$ ---------- 0.5

نعتبر الدالة $\ddot{}$ على $\mathbb{R}$ لدينا : $\ddot{}(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}}$

من اجل أي عدد حقيقي x لدينا : $x^2+1>1$ أي $\sqrt{x^2+1}>1$

أي $\sqrt{x^2+1}-1>0$

أي $\ddot{}'(x)>0$

وبالتالي $\ddot{}$ متزايدة

ولدينا $\ddot{}(0)=f(0)+2=0$ ---------- 0.25

أ) رسم (Γ) و المماس (T) ---------- 0.5

5) حساب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (Γ) و المستقيمات التي معادلتها $y=0$ ، $x=0$ و $x=\sim$ $(\sim>0)$

لدينا $A(\sim)=\int_0^{\sim}-f(x)dx=\int_0^{\sim}-\ln\left(U(x)dx\right)$

بلستعمل التكامل بالتجزئة

نضع $S(x)=\ln\left(U(x)\right)$ ، $t'(x)=1$ ومنه $S'(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$

$t(x)zx$

$$A(\sim)=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}+\int_0^{\sim}x\times\frac{U'(x)}{U(x)}dx$$

مع $\dfrac{U'(x)}{U(x)}=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$ من الجواب للسؤال 3) أ)

$$A(\sim)=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}-\int_0^{\sim}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}-\frac{1}{2}\int_0^{\sim}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

إذن $=-\left[x\ln\left(U(x)\right)\right]_0^{\sim}-\frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sim}$ ---------- 0.5

$$=-\left[x\ln\left(U(x)\right)-\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sim}$$

$$=\left(1-\sim\ln\left(U(\sim)\right)-\sqrt{\sim^2+1}+1\right)U.A$$

انتهى

بالتوفيق في البكالوريا

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — ثانوية الشهيد عبد الكريم هالي قمار

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي التجريبية — دورة : مـاي 2014

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : **الرياضيات** — **المدة** : 4 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول :

I- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z والوسيط الحقيقي α التالية :

$$(E)\ldots\ldots z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0$$

1. بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه .

2. عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المعادلة (E) تكافئ المعادلة $(z-\alpha i)(z^2+az+b)=0$.

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

II- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و G التي لواحقها على الترتيب $z_A=\alpha i$ ، $z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}$ و $z_G=5$.

1. بين z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)$.

2. عين z_F لاحقة النقطة F صورة النقطة G بالدوران r الذي مركزه I منتصف $[AB]$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

3. احسب z_G-z_A و z_F-z_E ،ثم اكتب العدد $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}$ على شكله الأسي. ماذا تستنتج ؟

4. أ) بين أن $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$.

ب) عين قيمتي α التي تكون من أجلها النقط A ، E و F في استقامية.

جـ) من أجل قيمتي α المتحصل عليهما سابقا بين أن A تنتمي إلى الدائرة (C) التي قطرها $[BC]$.

د) استنتج في هذه الحالة طبيعة المثلث ABC .

التمرين الثاني :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$.

1. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

2. تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1:-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) . ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3. أ) عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .

جـ) نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي . عين العدد t حتى يكون $AS^2=AB^2$.

د) عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$. ثم احسب حجمه V.

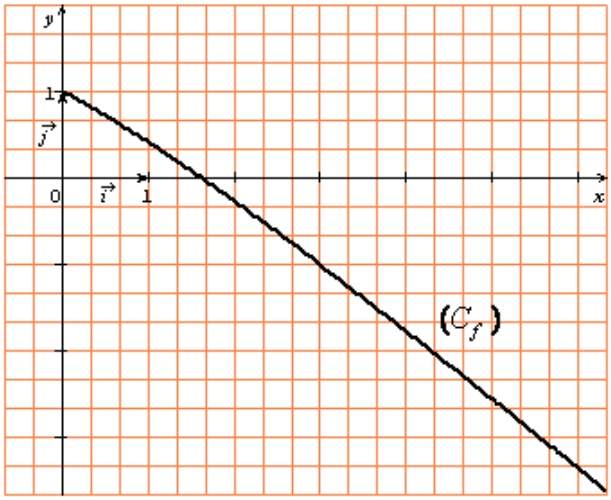
4. بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدين .

5. أ) عين المجموعة (S) للنقط M التي تحقق ، $\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$.

ب) عين الوضع النسبي للمجموعة (S) والمستوي (ABC).

التمرين الثالث :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=-x+\sqrt{x+1}$ و (C_f) منحناها (انظر الشكل)



أ) بقراءة بيانية عين حصرا بين عددين صحيحين للعدد α بحيث $f(\alpha)=0$.

ب) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $[0;+\infty[$.

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

أ) احسب u_1 و u_2 ثم $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le\alpha$.

جـ) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

د) استنتج نهاية المتتالية (u_n) ثم احسبها.

التمرين الرابع :

k عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=x-1+xe^{kx}$.

نرمز بـ (C_k) للمنحنى الممثل للدالة f_k في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I- نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x)=1+(1+kx)e^{kx}$.

1. احسب المشتق $g_k'(x)$ ثم أدرس إشارته.

2. شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g_k(x)>0$.

II- **1.** أ) بين جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها.

ب) احسب نهاية الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$.

جـ) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_k) بجوار $-\infty$.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_k) عند النقطة التي فاصلتها 0.

ب) بين أن النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k};-\frac{2}{k}(1+e^{-2})-1\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_k).

4. أ) بين أن المعادلة $f_k(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0\le\alpha\le1$.

ب) بين أن المسافة بين النقطة $N(\alpha;f_1(\alpha))$ والمستقيم (D) تساوي $\alpha e^{\alpha}/\sqrt{2}$.

5. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_k(x)+f_{-k}(-x)=-2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_k) و (C_{-k})؟

ب) الشكل المرفق يمثل المنحنى (C_1). أرسم على نفس الشكل المنحنى (C_{-1}).

III- λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر التكامل التالي: $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx$.

1. هل العدد I_k يمثل مساحة ؟ علل.

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب I_1 ثم $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة.

3. بين أن $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_k=\frac{1}{k^2}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول :

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$.

II- في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\overline{\sqrt{5}-2i}$.

1. احسب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$ ثم أنشئ النقط A ، B و C.

2. بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

3. أ) عين $z_{C'}$ لاحقة النقطة C' نظيرة النقطة C بالنسبة للنقطة A.

ب) علما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع بين أن لاحقة النقطة B' هي $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$.

جـ) اكتب العدد $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}$ على شكله الأسي.

د) استنتج أن $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$ ، و $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

التمرين الثاني :

I- a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

عين الأعداد a ، b و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$.

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين.

1. أ) عين الثنائية $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) .

ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1) .

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13.

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3. أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب) عين $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$.

التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$. والمستقيم (D) المعرف بتمثيله الوسيطي التالي: $x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$.
مع k عدد حقيقي.

1. احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. استنتج طبيعة المثلث ABC .

2. أ) عين إحداثيات كل من النقطتين G و I حيث G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$ و I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ب) ما طبيعة الرباعي $ABIG$.

3. أ) احسب AG^2 ، BG^2 و CG^2 .

ب) عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$.

4. نعتبر سطح الكرة (S) الذي مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$. والمجموعة (P) للنقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$ حيث $\vec{V}(-6;-6;0)$.

أ) عين معادلة ديكارتية للمجموعة (P).

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد (P)، ثم استنتج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة G على (P).

جـ) عين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

5. بين أن المستويين (P) و (ABC) يتقاطعان في (D) .

التمرين الرابع :

I- باستعمال قابلية الاشتقاق للدالة $x\mapsto \ln x$ عند 1 ، بين أن: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$ ، $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ب) من أجل $x\geq 1$ ، بين أن ، $x-1=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$.

جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1. فسر النتيجة بيانيا.

2. أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، ثم شكل جدول تغير الدالة f.

جـ) ارسم المنحنى (C_f).

3. ليكن S مساحة الحيز D المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$.

A و B نقطتان من (C_f) فاصلتاهما على الترتيب 1 و 3 ، والنقطتان $P(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوي.

أ) احسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ والمثلث ABQ .

ب) استنتج أن ، $2\ln(1+\sqrt{2})\leq S\leq 4\ln(1+\sqrt{2})$. (ملاحظة : $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$)

III- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 0$ ، $g(x)\geq 1$.

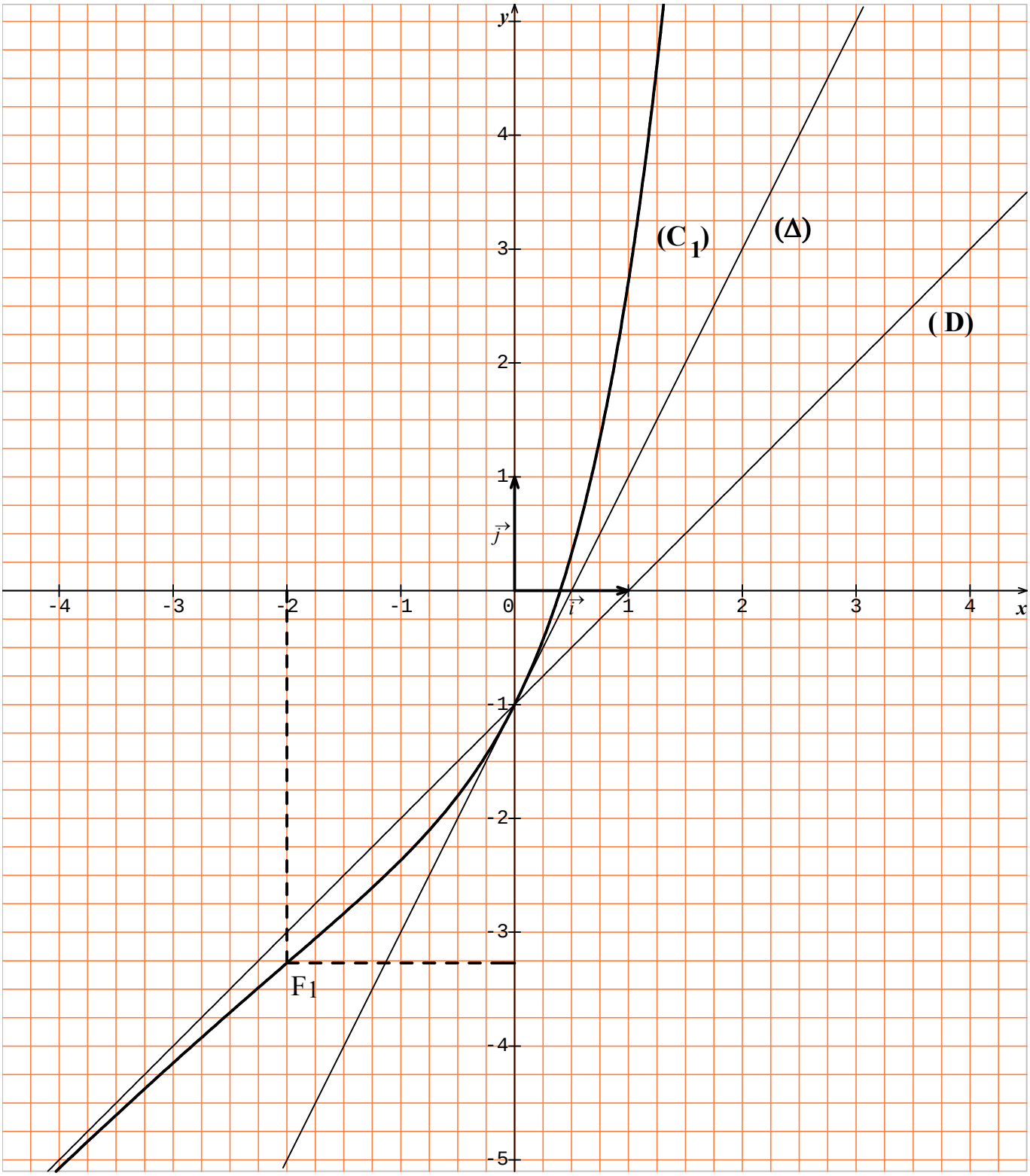
2. أ) بين أن $g\circ f(x)=x$. ثم بين أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_f) فإن $M'(y;x)$ نقطة من (C_g).

ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟ ارسم المنحنى في المعلم السابق (C_g).

3. ليكن S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$.

أ) بين أن $S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

ب) احسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ثم استنتج قيمة S .


y
x
(C1)
(Δ)
(D)
F1
0
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-5

ثانوية عبد الكريم هالي - قمار -
تصحيح البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

السنة الدراسية : 2014/2013
الشعبة : **رياضيات**

الموضوع الأول(1)

♣ التمرين الأول :

I- $(E)..z^3-(4+\alpha i)z^2+(13+4\alpha i)z-13\alpha i=0$

1. نضع $z=yi$ مع y عدد حقيقي.

$z=yi$ حل للمعادلة يعني أن :

$$-iy^3+4y^2+\alpha y^2 i+13yi-4\alpha y-13\alpha i=0$$

وهذا يكافئ $\begin{cases}4y^2-4\alpha y=0\\-y^3+\alpha y^2+13y-13\alpha=0\end{cases}$ أي

$\begin{cases}4y(y-\alpha)=0\\y^2(y-\alpha)-13(y-\alpha)=0\end{cases}$ إذن $y=\alpha$

ومنه الحل التخيلي للمعادلة (E) هو $z=i\alpha$.

2. (E) تكافئ $(z-\alpha i)(z^2-4z+13)=0$.

أي $a=-4$ و $b=13$.

3. (E) تكافئ $z-\alpha i=0$ أو $z^2-4z+13=0$.

أي $z=\alpha i$ أو $(z-2)^2=9i^2$.

ومنه حلول المعادلة (E) هي: $\boxed{2+3i\text{ ، }2-3i\text{ ، }\alpha i}$.

II- لدينا النقط A ، B ، C و G حيث $z_A=\alpha i$ ،

$z_B=2+3i$ ، $z_C=\overline{z_B}=2-3i$ و $z_G=5$.

1. $S(B)=E$ يكافئ $z_E-z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_B-z_A)$.

أي $z_E=\frac{1}{2}(1+i)(2+3i-\alpha i)+\alpha i$ ومنه

$$z_E=\frac{1}{2}(2+3i-\alpha i+2i-3+\alpha+2\alpha i)$$

إذن: $z_E=\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)+i\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)$.

2. لدينا $r(G)=F$ و $z_I=1+\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)i$.

ومنه $z_F-z_I=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_G-z_I)$

أي $z_F=-i(5-1-\frac{3+\alpha}{2}i)+1+\frac{3+\alpha}{2}i$

إذن : $z_F=\left(\frac{-1-\alpha}{2}\right)+i\left(\frac{\alpha-5}{2}\right)$.

3. حساب z_G-z_A و z_F-z_E .

$z_F-z_E=-\alpha-5i=-i(5-\alpha i)$ و

$z_G-z_A=5-\alpha i$

ومنه $\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}=\frac{5-\alpha i}{-i(5-\alpha i)}=\frac{1}{-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

الاستنتاج :

بما أن $\left|\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_G-z_A}{z_F-z_E}\right)=\frac{\pi}{2}(2\pi)$

فإن $\boxed{EF=AG\text{ و }(EF)\perp(AG)}$.

4. أ) لدينا $z_F-z_E=-\alpha-5i$ ونحسب z_A-z_E

أي $z_A-z_E=\frac{1}{2}[(-\alpha+1)+i(\alpha-5)]$.

ومنه $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{2(-\alpha-5i)[(1-\alpha)-(\alpha-5)i]}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$

أي $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}=\frac{(2\alpha^2-12\alpha+50)+i(2\alpha^2-10)}{(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2}$.

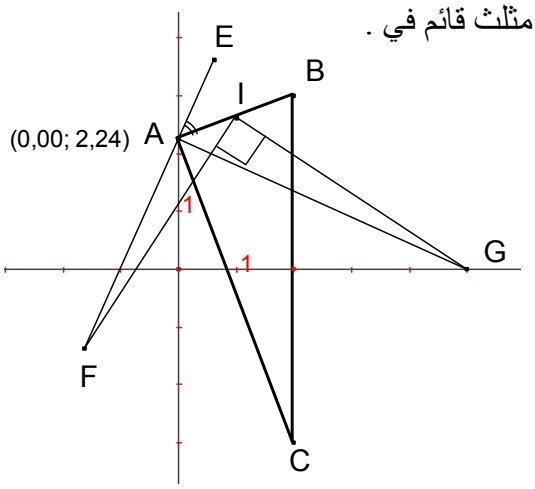
ب) A ، E و F في استقامية يعني أن العدد المركب $\frac{z_F-z_E}{z_A-z_E}$ عددا حقيقيا.

ومنه $\begin{cases}2\alpha^2-10=0\\(1-\alpha)^2+(\alpha-5)^2\neq0\end{cases}$

إذن $\boxed{\alpha=\sqrt{5}\text{ أو }\alpha=-\sqrt{5}}$.

جـ) من أجل $z_A=-i\sqrt{5}$ أو $z_A=i\sqrt{5}$ يمكن التحقق بسهولة أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ وعليه النقطة A تنتمي إلى الدائرة (C) .

د) بما أن $A\in(C)$ فإن $(AB)\perp(AC)$ ومنه ABC مثلث قائم في .



الموضوع الأول(2)

♣ التمرين الثاني:

لدينا النقط $A(3;2;1)$ ، $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$

1. المثلث ABC متقايس الأضلاع بالفعل :

$\overrightarrow{AB}(0;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;3;0)$ و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$.

ومنه $AB=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=AC=BC=3\sqrt{2}$.

2. $\vec{n}(1;1:-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) بالفعل:

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0(1)+3(1)+3(-1)=0$ و

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=-3(1)+3(1)+0(-1)=0$

أي $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

إذن : $M(x;y;z)\in(ABC)$ يعني أن $\overrightarrow{CM}.\vec{n}=0$.

أي $(x-0)+(y-5)-(z-1)=0$.

وأخيرا معادلة (ABC) هي : $\boxed{x+y-z-4=0}$.

3. أ) G مركز ثقل المثلث ABC .

إذن :

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

ومنه $G(2;4;2)$.

ب) المستقيم (Δ) يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) أي يمكن أن نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم (Δ) ،

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases}x=2+k\\y=4+k\\z=2-k\end{cases}$ $k\in\mathbb{R}$.

جـ) نلاحظ أن S نقطة من المستقيم (Δ) .

$AS^2=AB^2$ يكافئ

$(t-1)^2+(t+2)^2+(1-t)^2=18$.

أي $3t^2+6=18$ ومنه $t\in\{2;-2\}$.

ومنه $S(4;6;0)$ أو $S(0;2;4)$.

د) F تنتمي إلى (Δ) ومنه المثلثات FGA ، FGB و FGC قائمة ومتقايسة لأن $GA=GB=GC$ ومنه $FA=FB=FC=AB$.

إذن: $FABC$ رباعي الوجوه منتظم .

• $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times FG=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)FG$.

لدينا $\overrightarrow{FG}(-2;-2;2)$ ومنه $FG=2\sqrt{3}$.

إذن : $V=9u.v$.

4. لدينا $\overrightarrow{FA}(-1;-4;1)$ و $\overrightarrow{BC}(-3;0;-3)$

ومنه $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{BC}=0$.

إذن : المستقيمان (FA) و (BC) متعامدان .

5. أ) لتكن I منتصف قطعة المستقيم $[FG]$.

$\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$ يكافئ $\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IF}\|=6$

أي $\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\|=6$ يكافئ $2\overrightarrow{MI}=6$

إذن:المجموعة (S) هي سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها 3 .

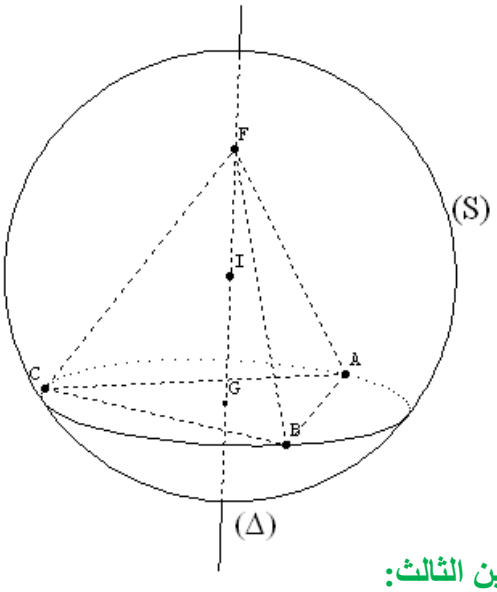
ب) بما أن I تنتمي إلى (Δ) فإن

$IG=d(ABC;I)=\sqrt{3}$.

ومنه المجموعة (S) والمستوي (ABC) يتقاطعان في دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$.

بما أن متوسط المثلث المتقايس الأضلاع ABC يساوي $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ فإن $AG=\frac{2}{3}\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)=\sqrt{6}$.

إذن : المجموعة (S) والمستوي (ABC) يتقاطعان في دائرة المحيطة بالمثلث ABC .



♣ التمرين الثالث:

1. f معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\sqrt{x+1}$

أ) $1\le\alpha\le2$.

ب)

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	1	$+$	0	$-$	

• إذا كان $0\le x\le\alpha$ فإن $f(0)\ge f(x)\ge f(\alpha)=0$.

• إذا كان $x\ge\alpha$ فإن $f(x)\le f(\alpha)=0$.

(f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$)

الموضوع الأول(3)

2. المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$
و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

أ) حساب u_1 و u_2 ثم $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}$.

$u_1=\sqrt{2}=1.414$ ، $u_2=\sqrt{1+\sqrt{2}}=1.554$ و

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+1}}}=u_3=1.598$.

ب) نبرهن بالتراجع على الخاصية التالية :
من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le\alpha$.

- من أجل $n=0$ ، $u_0=1$ أي $1\le u_0\le\alpha$.
- نفرض أن $1\le u_n\le\alpha$ من أجل $n\ge 0$.
- نبرهن أن $1\le u_{n+1}\le\alpha$.

لدينا $1\le u_n\le\alpha$ ومنه $2\le u_n+1\le\alpha+1$.
وبما أن الدالة الجذر التربيعي متزايدة فإن
$\sqrt{2}\le\sqrt{u_n+1}\le\sqrt{\alpha+1}$ ومنه
$1\le\sqrt{2}\le\sqrt{u_n+1}\le\sqrt{\alpha+1}=\alpha$
لأن $f(\alpha)=0$.
إذن : $1\le u_{n+1}\le\alpha$.
وأخيرا، من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le\alpha$.

جـ) لدينا $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$ و $1\le u_n\le\alpha$.
بما أن $f(x)\ge 0$ موجبة على المجال $[0;\alpha]$ فإن
$u_{n+1}-u_n\ge 0$.
إذن : المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

- المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة. أي $\lim u_n=l$.

د) لدينا $\lim u_n=l$ ومنه $l=\sqrt{l+1}$ أي
$f(l)=0$ إذن : $l=\alpha$.
$f(\alpha)=0$ يكافئ $\alpha^2-\alpha-1=0$
أي $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
بما أن $u_n>0$ فإن $l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (العدد الذهبي)

♣ التمرين الرابع:

k عدد حقيقي موجب تماما ، f_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x)=x-1+xe^{kx}$.

I- g_k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x)=1+(1+kx)e^{kx}$.

1. g_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و
$g_k'(x)=k(2+kx)e^{kx}$

- $g_k'(x)=0$ يكافئ $2+kx=0$ أي $x=-\frac{2}{k}$.

إذن :

x	$-\infty$	$-2/k$	$+\infty$
$g_k'(x)$	-	0	+

k عدد حقيقي موجب تماما و $e^{kx}>0$.

2. جدول تغيرات الدالة g_k.

x	$-\infty$	$-2/k$	$+\infty$
$g_k'(x)$	-	0	+
$g_k(x)$	↘	$1-e^{-2}$	↗

حسب جدول التغيرات $g_k(x)\ge 1-e^{-2}>0$.
إذن : من أجل كل عدد حقيقي x، $g_k(x)>0$.

II-1. أ) لدينا $f_k(0)=-1$.
إذن:جميع المنحنيات (C_k) تمر بالنقطة $I(0;-1)$.

ب)

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=-1+\lim\limits_{x\to-\infty} x(1+e^{kx})=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)=+\infty$.

جـ) (D) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_k) بجوار $-\infty$ بالفعل:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)-(x-1)=\frac{1}{k}\lim\limits_{x\to-\infty} kxe^{kx}=0$.

2. • f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و
$f_k'(x)=1+(1+kx)e^{kx}=g_k(x)>0$
إذن : الدالة f_k متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- جدول تغيراتها الدالة f_k.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	
$f_k(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

الموضوع الأول(4)

3. أ) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_k):

لدينا $f_k'(0)=g_k(0)=2$ و $f_k(0)=-1$ ومنه

$y=f_k'(0)(x-0)+f_k(0)=2x-1$

ب) بما أن $f_k'(x)=g_k(x)$ فإن $f_k''(x)=g_k'(x)$

لدينا مما سبق $f_k''(x)$ ينعدم عند $-\frac{2}{k}$ ويغير إشارته عندها

إذن : النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k};f_k(-\frac{2}{k})\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_k)، أي $F_k\left(-\frac{2}{k};-\frac{2}{k}(1+e^{-2})-1\right)$.

4. أ) حسب جدول التغيرات f_k دالة مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0;1]$ و $f_k(0)\times f_k(1)=-e^k<0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;1[$ بحيث $f_k(\alpha)=0$.

(α حل للمعادلة $f_k(x)=0$)

ب) لتكن d المسافة بين النقطة $N(\alpha;f_1(\alpha))$ والمستقيم (D).

ومنه $d=\frac{|\alpha-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$. $((\alpha-1<0))$

لدينا أيضا $f_1(\alpha)=0$ ومنه $\alpha e^{\alpha}=1-\alpha$.

إذن : $d=\alpha e^{\alpha}/\sqrt{2}$.

5. أ) من أجل كل عدد حقيقي x ،

$f_k(x)+f_{-k}(-x)=(x-1+xe^{kx})+(-x-1-xe^{kx})$

أي $f_k(x)+f_{-k}(-x)=-2$.

• الاستنتاج :

إذا كانت $M(x;f_k(x))$ نقطة من (C_k) فإن $M'(-x;-f_k(x)-2)$ نقطة من (C_{-k}).

وبما أن منتصف $[MM']$ هي النقطة $I(0;-1)$ فإن (C_k) و (C_{-k}) متناظرين بالنسبة للنقطة I.

ب) المنحنى (C_{-1}).

III- $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx$ ، حيث $\lambda<0$.

1. من أجل كل عدد حقيقي $x\le 0$،

$(x-1)-f_k(x)=-xe^{kx}\ge 0$.

إذن : I_k هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\lambda$ و $y=x-1$.

2. $I_1=\int_{\lambda}^{0}-xe^{x}dx$

نضع $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=e^x\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=e^x\end{cases}$ ومنه

$I_1=\int_{\lambda}^{0}-xe^{x}dx=-xe^{x}+e^{x}]_{\lambda}^{0}$

إذن : $I_1=1+\lambda e^{\lambda}-e^{\lambda}$.

• $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_1=1$.

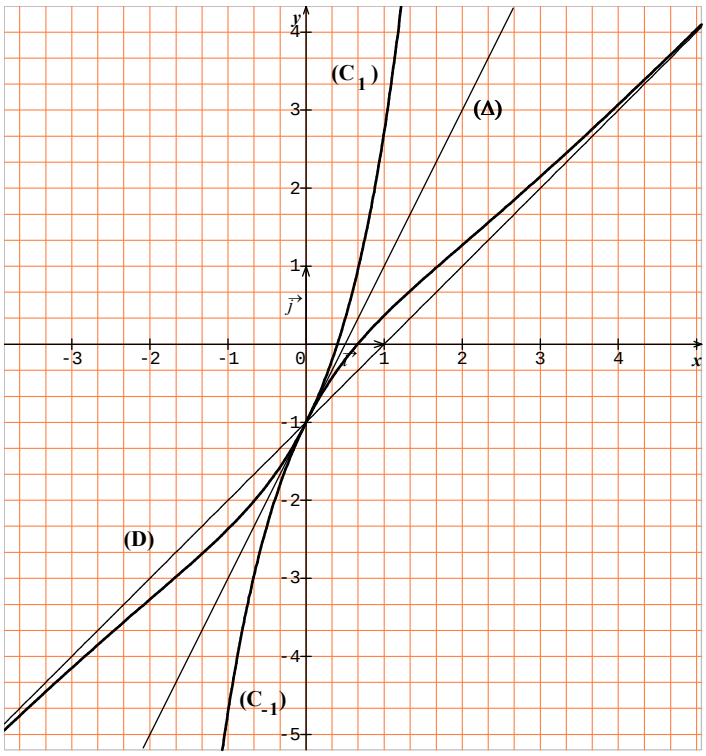
• هذه النهاية تعني أن مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_k) ومحور التراتيب والمستقيم (D) تساوي 1.

3. نضع $\begin{cases}u(x)=-x\\ v'(x)=e^{kx}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=-1\\ v(x)=\frac{1}{k}e^{kx}\end{cases}$

ومنه $I_k=\int_{\lambda}^{0}-xe^{kx}dx=-\frac{x}{k}e^{kx}+\frac{1}{k^2}e^{kx}]_{\lambda}^{0}$

إذن : $I_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}\left(\lambda ke^{k\lambda}-e^{k\lambda}\right)$.

• $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} I_k=\frac{1}{k^2}$. ($\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$)



الموضوع الثاني(1)

♣ التمرين الأول :

I- $(z+1)^2+\left[2+i(\sqrt{5}+1)\right]^2=0$ .....(1)

(1) يكافئ $(z+1)^2=\left[i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)\right]^2$.

أي $z+1=-i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$ أو

$z+1=i\left(2+i(\sqrt{5}+1)\right)$.

إذن : $z=\sqrt{5}-2i$ أو $z=-(2+\sqrt{5})+2i$.

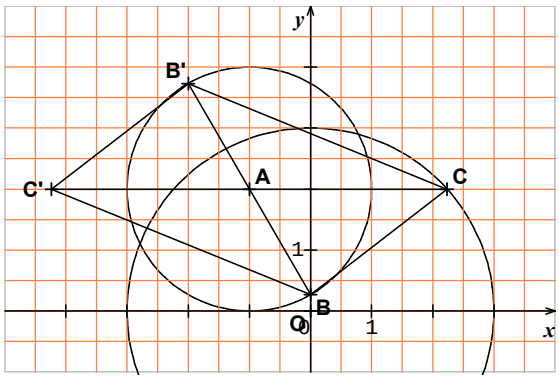
II- النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب

$z_A=-1+2i$ ، $z_B=i(2-\sqrt{3})$ و $z_C=\sqrt{5}+2i$

1. حساب $|z_C|$ و $|z_B-z_A|$.

- $|z_C|=\sqrt{5+4}=3$
- $|z_B-z_A|=|1-i\sqrt{3}|=2$

إذن : C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 3 و B هي تقاطع الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 مع محور التراتيب .



2. $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A$ ومنه

$z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1+i\sqrt{3})(2i-i\sqrt{3}+1-2i)-1+2i$

أي $z_{S(B)}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(4)-1+2i$ وأخيرا $z_{S(B)}=\sqrt{5}+2i$

إذن : $S(B)=C$

3. أ) $z_{C'}=2z_A-z_C$ أي $z_{C'}=-2+4i-\sqrt{5}-2i$

ومنه $z_{C'}=-(2+\sqrt{5})+2i$

ب) بما أن الرباعي $BC'B'C$ متوازي أضلاع فإن النقطة B' هي نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة A .

ومنه $z_{B'}=2z_A-z_B$

إذن : $z_{B'}=-2+(2+\sqrt{3})i$.

جـ) $z_{B'}-z_C=-(2+\sqrt{5})+i\sqrt{3}$

و $z_B-z_C=-\sqrt{5}-i\sqrt{3}$

ومنه $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{(-2-\sqrt{5}+i\sqrt{3})(-\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{8}$

أي $\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}(1-i\sqrt{3})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

د) لدينا :

$\frac{z_{B'}-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

إذن: $\frac{AC}{AB}=\frac{CB'}{CB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{CB'};\overrightarrow{CB})$

♣ التمرين الثاني:

I- a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1\le a\le b\le c$.

لدينا $b+c=\overline{46}^a$ و $bc=\overline{545}^a$ ومنه

$b+c=4a+6$ و $bc=5a^2+4a+5$

b و c هما حلا المعادلة التالية :

$x^2-2(2a+3)x+5a^2+4a+5=0$ ....(1)

ومنه $\Delta=4(-a^2+8a+4)$.

المعادلة (1) تقبل حلول إذا وفقط إذا كان $-a^2+8a+4\ge 0$.

$-a^2+8a+4\ge 0$ يكافئ $(a-4)^2\le 20$ أي $a\in[4-\sqrt{20};4+\sqrt{20}]$.

بما أن عدد طبيعي أكبر تماما من 6 فإن $a=7$ أو $a=8$.

- إذا كان $a=7$ فإن $\Delta=11$ (المعادلة (1) ليس لها حل في $\mathbb{N}$.
- إذا كان $a=8$ فإن $\Delta=4$ ومنه حلا المعادلة (1) هما 17 و 21 .

بما أن $b\le c$ فإن $b=17$ و $c=21$.

وأخيرا : $\boxed{a=8 \text{ ، } b=17 \text{ ، } c=21}$.

الموضوع الثاني(2)

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y من $\mathbb{N}$.

1. أ) $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) يكافئ $21x_0-17x_0=8$. إذن الثنائية $(2;2)$ حل للمعادلة (1).

ب) حل المعادلة (1) في $\mathbb{N}^2$.

لدينا $\begin{cases}21x-17y=8\\21x_0-17x_0=8\end{cases}$ ومنه

$21(x-x_0)=17(y-y_0)$ ..(2)

إذن: $17/21(x-x_0)$ و $PGCD(17;21)=1$

ومنه حسب مبرهنة غوص $17/(x-x_0)$ أي $(x-x_0)=17k$ مع $k\in\mathbb{N}$.

ومن (2) نحصل على $21(17k)=17(y-y_0)$.

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\boxed{\{(17k+2;21k+2),k\in\mathbb{N}\}}$.

2. أ) $9^0\equiv1[13]$ ، $9^1\equiv9[13]$ ، $9^2\equiv3[13]$ ، $9^3\equiv1[13]$.

من أجل كل عدد طبيعي k ، $9^{3k+r}\equiv9^r[13]$ حيث $r\in\{0;1;2\}$.

إذن : بواقي قسمة 9^n على 13 هي : 1 ، 9 ، 3.

ب) $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) يعني أن $17\beta=21\alpha-8$.

$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{17\beta+10}-9^{21\alpha}-2[13]$

ومنه

$3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$

$\equiv9^2-1-2[13]$

$\equiv0[13]$

3. أ) $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv0[4]$ أي و $\begin{cases}17y=4(21\lambda-2)\\x=4\lambda\end{cases}$.

إذن: $4/17y$ و $PGCD(17;4)=1$ ومنه حسب مبرهنة غوص $4/y$. أي $y\equiv0[4]$.

ب) $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) و $PGCD(x;y)=4$.

إذن : $x\equiv0[4]$ يعني أن $17k+2\equiv0[4]$ أي $k=4\gamma+2$.

ومنه $x=4(17\gamma+9)$ و $y=4(21\gamma+11)$ و $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$. و لدينا أيضا $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=PGCD(17\gamma+9;2)$.

(لأن $(x;y)$ حلول للمعادلة (1))

إذن: $PGCD(17\gamma+9;21\gamma+11)=1$ يعني أن $\gamma=2\beta$.

وأخيرا : من أجل كل عدد طبيعي β ، حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$ هي : $x=136\beta+36$ و $y=168\beta+44$.

♣ التمرين الثالث :

لدينا النقط $A(1;-1;2)$ ، $B(3;0;4)$ و $C(3;3;-2)$

1. حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(2;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(2;4;-4)$.

ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4+4-8=0$ أي $(AB)\perp(AC)$.

إذن: ABC مثلث قائم في A .

2. أ) • G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;-2),(C;1)\}$

ومنه $G(0;0;-2)$.

• I منتصف قطعة المستقيم $[AC]$.

ومنه $I(2;1;0)$.

ب) لدينا $\overrightarrow{GI}(2;1;2)$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GI}$.

ومنه الرباعي $ABIG$ متوازي أضلاع.

3. أ) $\overrightarrow{AG}(-1;1;-4)$ ، $\overrightarrow{BG}(-3;0;-6)$ و $\overrightarrow{CG}(-3;-3;0)$.

ومنه $AG^2=18$ ، $BG^2=45$ و $CG^2=18$.

ب) $3MA^2-2MB^2+MC^2=18$ ....(2)

باستعمال علاقة شال والمرجح G (2) تصبح :

$3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=18$

أي $2MG^2+3GA^2-2GB^2+GC^2=18$ لأن

$2\overrightarrow{MG}.(3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=\vec{0}$

إذن : (2) تكافئ $2MG^2=36$.

وأخيرا مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق(2) هي سطح كرة مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

4. (S) سطح الكرة الذي مركزه G ونصف قطره $3\sqrt{2}$.

أ) $M(x;y;z)\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$.

بما أن $\overrightarrow{MG}(-x;-y;-2-z)$ و $\vec{V}(-6;-6;0)$ فإن $\overrightarrow{MG}.\vec{V}=-18$ يكافئ $6x+6y=-18$.

إذن المعادلة الديكارتية لـ (P) هي $x+y+3=0$.

الموضوع الثاني(3)

ب) المستقيم (Δ) يمر بالنقطة G ويعامد (P)، أي الشعاع الناظمي لـ (P) هو $\vec{n}(1;1;0)$ شعاع توجيه لـ (Δ) أي نعتبر $(G;\vec{n})$ معلم للمستقيم (Δ).

ومنه $M(x;y;z)\in(\Delta)$ يكافئ $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z-2 \end{cases}$ مع t عدد حقيقي.

• الاستنتاج : $\{H\}=(P)\cap(\Delta)$.

ومنه $t+t+3=0$ أي $t=-\frac{3}{2}$.

وأخيرا : $H(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2};-2)$.

جـ) تعيين العناصر المميزة للمجموعة $(P)\cap(S)$.

• $d(G,(P))=GH=\frac{3}{2}\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ ومنه

$(P)\cap(S)$ هي الدائرة التي مركزها H ونصف قطرها r حيث $r=\sqrt{(3\sqrt{2})^2-HG^2}=\frac{3}{2}\sqrt{6}$.

5. المستقيم (D) معرف بتمثيله الوسيطي التالي:

$x=-1-2k$ و $y=-2+2k$ و $z=-8k$.

مع k عدد حقيقي.

• $(D)\subset(P)$ لأن $(-1-2k)+(-2+2k)+3=0$.

• (D) يمر بالنقطة $E(-1;-2;0)$ ويوازي $\vec{u}(-2;2;-8)$

لدينا $\overrightarrow{AE}(-2;-1;-2)$ و $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

أي أن E تنتمي إلى (ABC) و $\vec{u}$ شعاع من (ABC).

إذن : $(D)\subset(ABC)$. $(\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB})$.

وأخيرا: المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان في (D).

♣ التمرين الرابع :

I- • الدالة $x\mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ ومنه $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\frac{1}{x}=1$

أي $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

• نضع $X=x-1$ ومنه

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{X\to 0}\frac{\ln(X+1)}{X}=1$.

II- f دالة معرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1. أ) من أجل كل عدد حقيقي $x\geq 1$،

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}\right)=\ln\left(x\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]\right)$$

ومنه $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$.

($\sqrt{x^2}=|x|$ ، $\ln ab=\ln a+\ln b$ مع $a>0$ ، $b>0$)

ب) من أجل $x\geq 1$،

$$\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\frac{x}{x}\sqrt{(1-x^2)\frac{x-1}{x+1}}$$

أي $\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$.

جـ) الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 1 بالفعل

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\ln x}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{x-1}$$

$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\ln(1-\frac{1}{x^2}))}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\times\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$ ومنه

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$ $(\lim_{x\to 1}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=0)$

إذن : المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الترتيب عند النقطة التي فاصلتها 1.

2. أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$.

ب) f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و

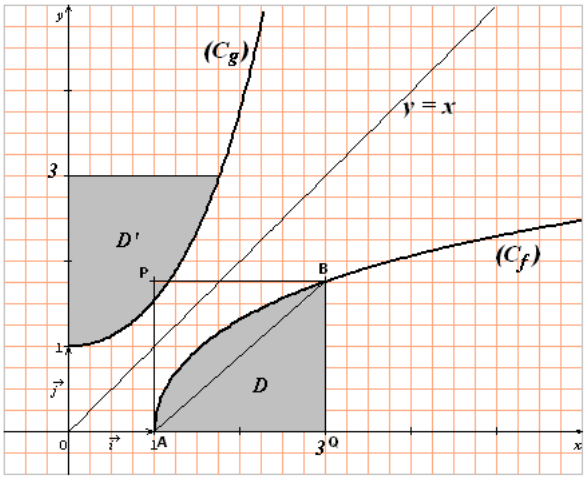
$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0.$$

• جدول تغير الدالة f.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

الموضوع الثاني(4)

جـ) المنحنى (C_f).



3. أ) النقطة A من (C_f) أي $A(1;0)$، كذالك B نقطة من (C_f) فاصلتها 3 أي $B(3;f(3))$ حيث $f(3)=\ln(3+2\sqrt{2})=2\ln(1+\sqrt{2})$.

- مساحة المثلث ABQ تساوي $f(3)$.
- مساحة المستطيل $APBQ$ تساوي $2f(3)$.

ب) نلاحظ أن المساحة S محصورة بين مساحة المثلث ABQ و مساحة المستطيل $APBQ$.

إذن: $2\ln(1+\sqrt{2})\le S\le 4\ln(1+\sqrt{2})$

III- g الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$، لدينا

$$g(x)-1=\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2e^x}=\frac{(e^x-1)^2}{2e^x}\ge 0.$$

إذن: من أجل كل عدد حقيقي $x\ge 0$ ، $g(x)\ge 1$.

2. أ) $g\circ f(x)=g(f(x))$ ومنه

$$g\circ f(x)=\frac{e^{2f(x)}+1}{2e^{f(x)}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})}$$

أي $g\circ f(x)=\dfrac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})}=x$.

- $M(x;y)$ نقطة من (C_f) يعني أن $y=f(x)$، وبما $g(f(x))=x$ أن فإن $M'(f(x);x)$ نقطة من (C_g).

ب) بما أن المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس فإن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$. (المنصف الأول)

3. S' مساحة الحيز D' المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$، $x=2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y=3$.

أ) $S'=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}(3-g(x))dx$ أي $S'=3x]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$ ومنه $S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

ب) حساب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$.

$\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx$ ومنه

$$\int_0^{2ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})]_0^{2ln(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2\right]$$

و أخيرا : $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx=2\sqrt{2}$.

- بما أن (C_f) و (C_g) متناظرين بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$ فإن $D=D'$ و منه $S=S'$.

إذن: $S=S'=6\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}g(x)dx$

$=6\ln(1+\sqrt{2})-2\sqrt{2}u.a$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
الشعبة : تقني رياضي
بكالوريا تجـــــريبي

دورة : ماي 2014
المدة:4 سا ونصف
ثانوية : 16 شهيدا بليمور

اختبار في مادة الرياضيـــــــات

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (3.5ن)

1. أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي قسمة العدد 3^n على 10 .....(1ن)
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$ .....(0.5ن)
3. عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10\prec n\leq 25$ .....(0.5)
4. ليكن العدد A مكتوب $\overline{xx02102}$ في النظام ذي الأساس 3 و مكتوب $\overline{y67y}$ في النظام ذي الأساس 9
   أ . عيّن x و y .....(0.5ن)
   ب. أحسب A في النظام العشري .....(0.5ن)
   جـ . أكتب A في النظام ذي الأساس 7 .....(0.5ن)

التمرين الثاني:(3.5ن)

نعتبر f الدالة المعرفة على IR كما يلي :

$$f(x)=x+e^{2x}-2e^{x}$$

(c_f) منحني الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الأطوال $2cm$

1. أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ .....(0.5ن)
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f شكل جدول تغيراتها .....(0.25ن)+(0.25ن)+(0.25ن)
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;5;0,6[$ .....(0.5ن)
4. بين أنّ المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c_f) في جوار $-\infty$ ....(0.25ن)
5. أثبت أنّ المنحني (c_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (D) عين معادلة له.(0.25ن) +(0.25ن)
6. ارسم المنحني (c_f) و المستقيمين (D) و (T).....(0.5ن)
7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ .....(0.5ن)

التمرين الثالث: (4.5ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة على □ كما يلي : $u_0=1$, $u_1=2$ و $u_n=2u_{n-1}+3u_{n-2}$.

1. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على □* بما يلي : $v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$ حيث $\beta;\alpha$ عددان حقيقيان غير منعدمان .
   أ. أحسب u_2 و u_3 .....(0.5ن)
   ب. أحسب v_1 ; v_2 و v_3 بدلالة α و β .....(0.5ن)
   ج. بيّن أنّه إذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ : $3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$ .....(0.5ن)
2. نضع $\beta=\alpha$:
   أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ....(0.5ن) + (0.25ن)

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n + u_{n-1} = 3^n$ .....(0.5ن)

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . .(0.5ن) + (0.25ن)

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$ .....(0.5ن)

4. بيّن أنّ : [(v_n) متتالية هندسية] معناه [$\beta = \alpha$ أو $\beta = -3\alpha$] .....(0.5ن)

التمرين الرابع : (3.5ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, نعتبر النقط $A(1;1;0)$, $B(0;1;2)$ و $C(2;-2;1)$.

1. بين أن النقط $A;B$ و C تعين مستويا .....(0.25ن)
2. تحقق أنّ $\vec{n}(2;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) 0.75
3. ليكن (P) مستوي تمثيله الوسيطي : $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = 2 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 - \beta \end{cases}$
   - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .....(0.5ن)
   - بيّن أنّ تقاطع المستويين (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له 0.75
4. عيّن (Q) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$.
5. نفرض أنّ : $(Q): x - 2z + 5 = 0$ .....(0.5ن)
   - أدرس تقاطع المستويات (Q) ، (P) و (ABC) .....(0.75ن)

التمرين الخامس : (5ن)

تعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ النقط $A;B;C;D;I$ ذات اللواحق :

$Z_A = i$; $Z_B = \overline{Z_A}$; $Z_C = -1 + \sqrt{3}i$; $Z_D = \overline{Z_C}$ ، I منتصف $[CD]$ ....(0.25ن)

1. مثل النقط في المعلم .....(0.5ن)
2. أكتب العدد L على الشكل الأسي ، حيث : $L = \dfrac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}$ .....(0.5ن)
   - استنتج طبيعة المثلث ABI . .....(0.25ن)
   - عيّن المركز ω و نصف القطر r للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABI .....(0.5ن)
   - أنشئ الدائرة (C) .....(0.25ن)
3. ليكن R دوران مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، h التحاكي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D .
   - عيّن العبارة المركبة لكل من R و h .... (0.5ن) + (0.5ن)
   - ما هي طبيعة التحويل hoR محددا عبارته المركبة و عناصره . (0.25ن) +(0.5ن) +(0.5ن)
4. عيّن معادلة (C') صورة (C) بالتحويل hoR مستعملا طريقتين . (0.25ن)+(0.25ن)

مناقشة الإختبار(بكالوريا تجريبي 3تق ر)

حل التمرين الأول:

1. دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 10

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n \equiv .[10]$	1	3	9	7

2. إثبات أنّ $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

$33\equiv 3[10]$ معناه $33^{16n}\equiv 1[10]$

$$33^{16n+2}\equiv 33^{16n}\times 33^2[10]$$
$$\equiv 3^2[10]\equiv 9[10]$$

و لدينا $109\equiv 3^2[10]$

$$109^{8n+1}\equiv 3^{16n+2}[10]\equiv 9[10]$$
$$33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 9-18-11[10]$$
$$\equiv 0[10]$$

3. تعيين الأعداد الطبيعية n حيث:

$7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]/10\prec n\leq 25$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
الباقي هو	0	2	8	6

$n=4k/10\prec 4k\leq 25$ ومنه $k\in\{3;4;5;6\}$ معناه

$n\in\{12;16;20;24\}$

4. أ. $(x;y)=(2;2)$

ب. $A=2009$

جـ. كتابة A في النظام ذي الأساس 8 .

$2009=3\times 8^3+7\times 3^2+3\times 8+1$

و منه A يكتب $\overline{3731}$ في النظام ذي الأساس 8 .

حل التمرين الثاني:

1. حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. حساب $f'(x)$

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\square$:

$$f'(x)=2e^{2x}-2e^x+1$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. $f(0.5)=-0.07$; $f(0.6)=0.02$

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0.5;0.6]$

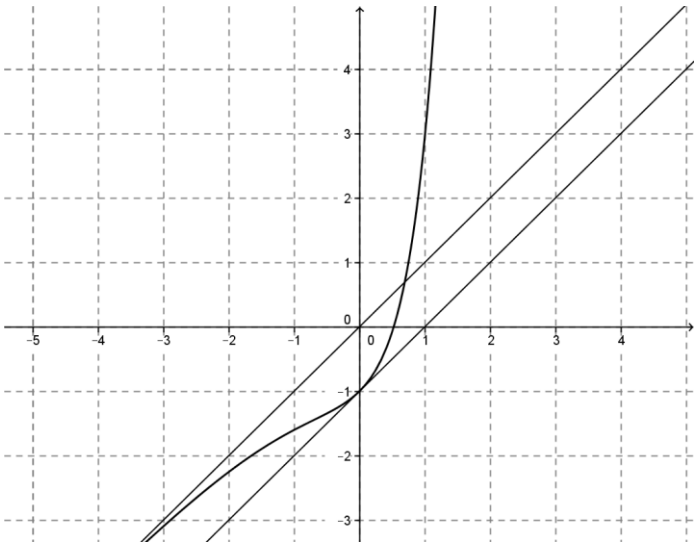
$f(0.5)\times f(0.6)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0.5;0.6]$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$ و منه $y=x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

3. $f'(x_0)=1$ معناه $x_0=0$ و منه (C_f) يقبل مماسا و حيدا عند النقطة $A(0;-1)$.

$(\Delta): y=x-1$

4. الرسم



المناقشة البيانية:

- $m\geq 0$: المعادلة تقبل حل وحيد موجب .
- $m=-1$: المعادلة تقبل حل معدوم .
- $m\prec -1$: المعادلة لا تقبل حلول .
- $-1\prec m\prec 0$: المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

حل التمرين الثالث:

1. $v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$

أ. حساب الحدود : $u_2=7$; $u_3=20$.

ب. حساب الحدود : $v_1;v_2;v_3$ ، $v_1=2\alpha+\beta$ ، $v_2=7\alpha+2\beta$ ، $v_3=20\alpha+7\beta$

جـ. $v_1;v_2;v_3$ حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه

$v_2^2=v_1\times v_3$ معناه

$(7\alpha+2\beta)^2=(2\alpha+\beta)(20\alpha+7\beta)$ معناه

$9\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2=0$ معناه

$3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$

2. نضع $\beta=\alpha$:

أ. لدينا $v_n = \alpha u_n + \alpha u_{n-1}$ معناه

$$v_n = \alpha(u_n + u_{n-1}) \cdots\cdots (1)$$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$
$$= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} + u_n)$$
$$= \alpha(3u_n + 3u_{n-1})$$

و منه

$$v_{n+1} = 3v_n$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $v_1 = 3\alpha$.

ب. لدينا : $v_n = v_1 \times 3^{n-1}$ و منه $v_n = 3\alpha \times 3^{n-1}$

معناه : $v_n = \alpha \times 3^n \cdots\cdots (2)$ من (1)و(2)

نستنتج أنّ: $\alpha(u_n + u_{n-1}) = \alpha \times 3^n$ معناه

$$u_n + u_{n-1} = 3^n$$

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية .

لدينا $v_n = \alpha u_n - 3\alpha u_{n-1} \cdots\cdots (1)$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - 3u_n)$$
$$= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} - 3u_n)$$
$$= \alpha(-u_n + 3u_{n-1})$$

و منه

$$= -\alpha(u_n - 3u_{n-1})$$
$$v_{n+1} = -v_n$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -1$ و حدها الأول $v_1 = -\alpha$.

ب. لدينا $v_n = -\alpha(-1)^{n-1}$ و منه

$v_n = \alpha(-1)^n \cdots\cdots (2)$ من (1) و (2)نستنتج أنّ:

$\alpha(u_n - 3u_{n-1}) = \alpha(-1)^n$ و منه

$$u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$$

4. (v_n) متتالية هندسية معناه $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

$\Delta = 16\beta^2$ معناه $\alpha = \beta$ و $\alpha = -3\beta$

حل التمرين الرابع :

1. إثبات أنّ $A;B;C$ تعين مستويا .

$\overrightarrow{AB}(-1;0;2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;1)$

$\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا

2. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ و منه $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي (ABC)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$$(ABC): 2x + y + z - 3 = 0$$

3. ليكن (P) مستوي تمثيله الوسيطي:

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha + 2\beta \cdots\cdots (1) \\ y = 1 + 2\alpha \\ 2z = 2 - 2\beta \cdots\cdots (2) \end{cases} \quad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

بجمع (1) و (2) نجد $x + 2z = \alpha + 4$ بالتعويض $\alpha = x + 2z - 4$

في(3) نجد : $2x - y + 4z - 7 = 0$

$(P): 2x - y + 4z - 7 = 0$.

- تقاطع المستويين (ABC) و (P) .

$$\begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + 4z - 7 = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}(2;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

$\vec{n}(2;-1;4)$ شعاع ناظمي لـ (P)

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} \neq 0$ و منه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق

مستقيم (Δ) : $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{4}t + \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2}t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

4. (Q) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء

$$\left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{BA} = 0$$

(Q) مستوي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له .

- تقاطع المستويات (Q) ، (P) و (ABC) .

$$(ABC)\cap(P)\cap(Q) = (\Delta)\cap(Q)$$

$\vec{u}\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2};1\right)$ شعاع توجيه (Δ).

$\vec{n}(1;0;-2)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n};\vec{u}$ غير مرتبطان خطيا .

$-\frac{5}{4}t+\frac{5}{2}-2t+5=0$ و منه $t=\frac{30}{13}$

بالتعويض في الجملة نجد

$$\begin{cases} x=-\frac{5}{13} \\ y=-\frac{20}{13} \\ z=\frac{30}{13} \end{cases}$$ و منه

$$(Q)\cap(ABC)\cap(P)=\left\{H\left(-\frac{5}{13};-\frac{20}{13};\frac{30}{13}\right)\right\}$$

حل التمرين الخامس:

$$L=\frac{Z_A-Z_I}{Z_B-Z_I}$$

1. $Z_I=\frac{Z_C+Z_D}{2}=-1$ و منه $L=\frac{1+i}{1-i}$

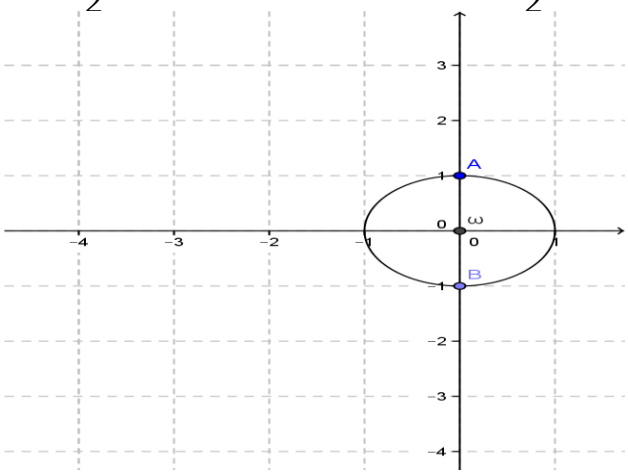
و منه $|L|=1 \quad ; \quad \arg(L)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه $L=e^{i\frac{\pi}{2}}$

- طبيعة المثلث ABI .

لدينا $AI=BI$ و $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA})=\frac{\pi}{2}$ و منه ABI مثلث متساوي الساقين و قائم في I .

- تعيين المركز ω و نصف القطر r للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABI.

$Z_\omega=\frac{Z_A+Z_B}{2}=0$ معناه $\omega(0;0)$ ، $r=\frac{AB}{2}=1$



3 $(Z'-Z_I)=i(Z-Z_I)$ و منه

$$R(M)=M':\quad Z'=iZ+i-1$$

$\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ معناه $\begin{cases} Z_C=aZ_A+b \\ Z_D=aZ_B+b \end{cases}$

$a=\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_B}=\frac{2\sqrt{3}i}{2i}=\sqrt{3}$ ، $a=\sqrt{3}$ و $b=-1$

$$h(M)=M':\ Z'=\sqrt{3}Z-1$$

- طبيعة التحويل hoR .

hoR هو تشابه مباشر نسبته $k=\sqrt{3}$ و زاويته

$$\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

- عبارته المركبة و عناصره :

$$M(Z)\xrightarrow{R}M_1(Z_1)\xrightarrow{h}M'(Z')$$

$Z_1=iZ+i-1$ و

$Z'=\sqrt{3}Z_1-1=\sqrt{3}(iZ+i-1)-1$ و منه

$$Z'=\sqrt{3}iZ-\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i$$

المركز هو النقطة الصامدة Ω حيث:

$Z_\Omega=\frac{-\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ ، $\Omega\left(\frac{-\sqrt{3}-4}{4};\frac{-3}{4}\right)$

طريقة-1-

(C') دائرة مركزها ω' بحيث: $hoR(\omega)=\omega'$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$

$Z'_{\omega'}=-\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i$ و منه $\omega'(-\sqrt{3}-1;\sqrt{3})$

$$(C'):(x+1+\sqrt{3})^2+(y-\sqrt{3})^2=3$$

طريقة -2-

(C_1) صورة (C) بالدوران R

(C_1) مركزها ω_1 حيث: $R(\omega)=\omega_1$ و نصف قطرها $r=1$ حيث: $Z_{\omega_1}=iZ_\omega+i-1=i-1$

(C') صورة (C_1) بالتحاكي h

(C') مركزها ω حيث: $h(\omega_1)=\omega$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$ حيث:

$Z_{\omega'}=\sqrt{3}(i-1)-1$

$=-1-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

$$(C'):(x+1+\sqrt{3})^2+(y-\sqrt{3})^2=3$$

ثانوية مصطفى مصطفاي ندرومة — السنة الدراسية:2014/2013

قسم السنة الثالثة تقني رياضي — المـــــــــــدة: 04ساعات ونصف

الإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

عالج أحد الموضوعين على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول :(03.5ن)

لتكن (E) مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حيث $11x+3y=65$

1/عين الثنائية $(x_0;y_0)$ من المجموعة (E) و التي تحقق $2x_0^2-3y_0=11$

2/حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $11x+3y=65$

3/عين الثنائيات $(x;y)$ من (E) حيث $x>-5$ و $y>-5$

التمرين الثاني :(05ن)

المستوي المرب منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقاط $D;C;B;A$ لواحقها على الترتيب

$z_D=-9+3i \quad ; \quad z_C=2-3i \quad ; \quad z_B=2 \quad ; \quad z_A=3i$

1/أكتب العبارة المربة للتشابه مباشر S الذي يحول النقطة C إلى النقطة A ويحول النقطة B إلى النقطة D

2/ أ)أثبت أن $\Omega(0;-3)$ مركز التشابه S و عين نسبته k وزاويته $-$

ب) ما طبيعة المثلث ΩAC

3/ أ)عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $(A;1);(\Omega;2);(C;-2)$

ب)عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-z_A|^2+2|(z-z_\Omega)^2|=25+2|z-z_C|^2$

التمرين الثالث :(04.5ن)

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;1;2)$; $B(-1;0;-2)$; $C(-1;0;-6)$

1/ليكن (p) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $MA^2-MB^2=1$

بين أن (p) هو مستوي يطلب إعطاء معادلته

2/لتكن (S) مجموعة النقط من الفضاء حيث $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

3/ G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ) عين إحداثيات النقطة G ثم تأكد أنها تنتمي إلى المجموعة (S)

ب) أكتب معادلة للمستوي (q) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة G

التمرين الرابع (07ن)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^{2x}+4e^{x}-6$

1/ أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

2/حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$ ثم إستنتج ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x ال معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x-\frac{1}{2})e^{2x}+4(x-1)e^{x}-3x^2$

(C) منحناها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $f'(x)=xg(x)$

2/أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3/أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4/ إستنتج وجود نقطة إنعطاف I للمنحنى (C) يطلب تعيينها ثم أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C) عند I

5/برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

6/أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C)

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04ن)

1/حل في مجموعة الأعداد المربة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+18=0$

2/ ليكن العدد المرب $z_1=3-3i$

أ) أكتب العدد z_1 على الشكل الأسي

ب) نعتبر العدد المرب z_3 حيث : $z_1z_3=6(\cos\frac{®}{12}+i\sin\frac{®}{12})$

ت) استنتج قيمتي العددين $\cos\frac{®}{12}$ و $\sin\frac{®}{12}$

3/في المستوي المربالمنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقاط $A;B;C$ لواحقها على الترتيب :

$z_C=6\ ;\ z_B=3-3i\ ;\ z_A=3+3i$

أ) عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B

ب) ماطبيعة الرباعي $OACB$

التمرين الثاني :(05ن)

الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;1:-1);B(-1;2;4);C(0;-2;3);D(1;1;-2)$
والمستوي (P) ذي المعادلة $x-2y+z+1=0$

بين صحة أو خطأ العبارات التالية مع التبرير في كل حالة

1/النقط $A;B;C$ تعين مستوي

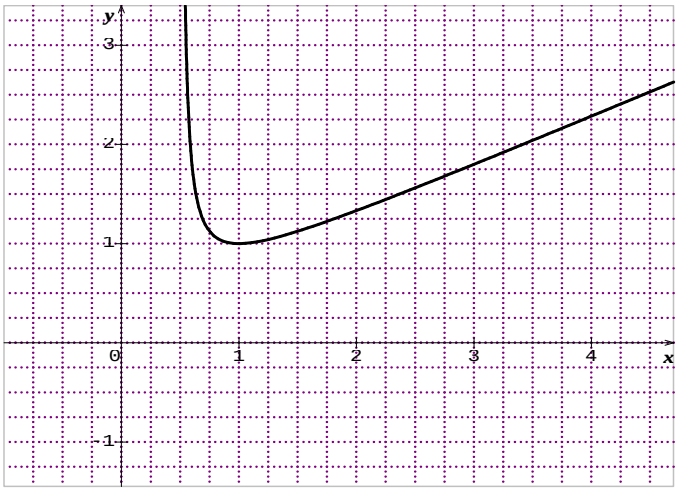
2/ $x+8y-z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABD)

3/التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) هو: $\begin{cases} x=2t \\ y=2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$

4/سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{2}$ تمس المستوي (P)

5/النقطة $E(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3})$ هي المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)

التمرين الثالث :(04ن)



g دالة معرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $g(x)=\frac{x^2}{2x-1}$ ،

(C) تمثيلها البياني مرسوم في الشكل المقابل

1/بين أنه من أجل $x>1$ فإن $g(x)>1$

2/نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=4$ و $u_{n+1}=g(u_n)$

أ) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة ثم أنشئ المستقيم الذي معادلته $y=x$ ثم علم على محور الفواصل الحدود u_3,u_2,u_1,u_0

ب)ضع تخمينا حول تغيرات وتقارب المتتالية (u_n)

3/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>1$

4/بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

5/ استنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الرابع (07ن)

I) g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1/عين $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2/ أدرس إتجاه الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $1.8<\sim<1.9$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ ، (C) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1/أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتائج بيانيا

2/ أ)بين أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$

ب) استنتج إتجاه تغير f وأنشئ جدول تغيراتها

ت) بين أن $f(\sim)=\frac{2}{\sim(2\sim+1)}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\sim)$

3/أنشئ المنحنى (C)

التصحيح :(الموضوع الأول)

التمرين الأول: $11x+3y=65$

/1
$$\begin{cases}11x_0+3y_0=65\\2x_0^2-3y_0=11\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_0^2+11x_0-76=0\\3y_0=2x_0^2-11\end{cases}$$

$$\Delta=(11)^2-4(2)(-76)=729\qquad\sqrt{\Delta}=27$$

$$x_0=\frac{-11-27}{4}=\frac{38}{4}\notin\mathbb{Z}$$

$$x_0=\frac{-11+27}{4}=4$$

$$3y_0=2(4)^2-11\Rightarrow y_0=\frac{21}{3}=7$$

$$(x_0;y_0)=(4;7)$$

/2
$$\begin{cases}11x+3y=65\\11(4)+3(7)=65\end{cases}\Rightarrow 11(x-4)=-3(y-7)$$

$$\begin{matrix}3\\11(x-4)\end{matrix}\xrightarrow{GAUS}\begin{matrix}3\\x-4\end{matrix}\Rightarrow x=3k+4$$

$$\begin{matrix}11\\-3(y-7)\end{matrix}\xrightarrow{GAUS}\begin{matrix}11\\-y+7\end{matrix}$$
$$\Rightarrow y=-11k+7$$

$$s=\{(x;y)/x=3k+4;y=-11k+7\ \ k\in\mathbb{Z}\}$$

/3
$$\begin{cases}3k+4>-5\\-11k+7>-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3k>-9\\-11k>-12\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k>-3\\k<\dfrac{12}{11}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}k\in\{-2,-1,0,1\}\\\Rightarrow(x;y)\in\{(-2;29);(1;18);(4;7);(7;-4)\}\end{array}}$$

التمرين الثاني :

$$z_A=3i\ ;z_B=2\ ;z_C=2-3i\ ;z_D=-9+3i$$

/1 بالطرح
$$\begin{cases}z_A=az_C+b\\z_D=az_B+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3i=a(2-3i)+b\\-9+3i=a(2)+b\end{cases}$$

$$\begin{cases}9=-3ia\\-9+3i=2a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{9}{3i}=-3i\\b=-9-3i\end{cases}$$

$$\boxed{z'=3iz-9-3i}$$

/2أ)

$$3i(z_\Omega)-9-3i=3i(-3i)-9-3i$$
$$=9-9-3i=z_\Omega$$

إذن $\Omega(0;-3)$ مركز التشابه

ونسبته $k=|3i|=3$ وزاويته $-=\arg(3i)=\frac{®}{2}$

ب) المثلث ΩAC قائم في Ω

/3 أ)

$$z_G=\frac{z_A+2z_\Omega-2z_C}{1+2-2}=\frac{3i+2(-3i)-2(2-3i)}{1}$$
$$=3i-4\Rightarrow G(-4;3)$$

ب)

$$|z-z_A|^2+2|(z-z_\Omega)^2|-2|z-z_C|^2=25$$
$$MA^2+2M\Omega^2-2MC^2=25$$
$$(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{G\Omega})^2$$
$$-2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2=25$$
$$MG^2+GA^2+2G\Omega^2-2GC^2$$
$$+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Omega}-2\overrightarrow{GC})=25$$

$$GA^2=16;G\Omega^2=52;GC^2=72$$

$$MG^2+16+104-144=25$$
$$MG^2=49$$

دائرة مركزها G ونصف قطرها $r=7$

التمرين الثالث :

/1

$$MA^2 - MB^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 -$$
$$(x+1)^2 + (y-0)^2 + (z+2)^2 = 1$$
$$-4x - 2y - 8z = 0$$

إذن (p) مستوي معادلته $-4x - 2y - 8z = 0$

$$R = \sqrt{\frac{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 - 4(-6)}{4}} = 3$$ /2

$\Omega(1;1;1)$

(أ/3

$$G\left(\frac{1+1-1}{1};\frac{1-0-2}{1};\frac{2+2-6}{1}\right);G(1;-1;-2)$$

G تحقق معادلة (S)

ب)الشعاع $\overrightarrow{\Omega G}$ شعاع ناظمي للمستوي (q)

$$\overrightarrow{\Omega G}(0;-2;-3)$$

$$0x - y - 3z + d = 0$$
$$0(1) - (-1) - 3(-2) + d = 0 \Rightarrow d = -7$$

المعادلة هي $-y - 3z - 7 = 0$

التمرين الرابع: (I

$$g(x) = 2e^{2x} + 4e^x - 6$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -6 \; ; \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$ /1

$$g'(x) = 4e^{2x} + 4e^x = 4e^x(e^x + 1) > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} + 4e^x - 6 = 0$$
$$\Rightarrow 2y^2 + 4y - 6 = 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64$$

$$y = \frac{-4-8}{4} = -3 \; ; \; y = \frac{-4+8}{4} = 1$$

$e^x = -3$ لاتقبل حل $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II 1/

$$f'(x) = 1e^{2x} + 2e^{2x}(x - \frac{1}{2}) + 4e^x + 4e^x(x-1) - 6x$$
$$= xg(x)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \; ; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$ /2

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		↘ $-\infty$

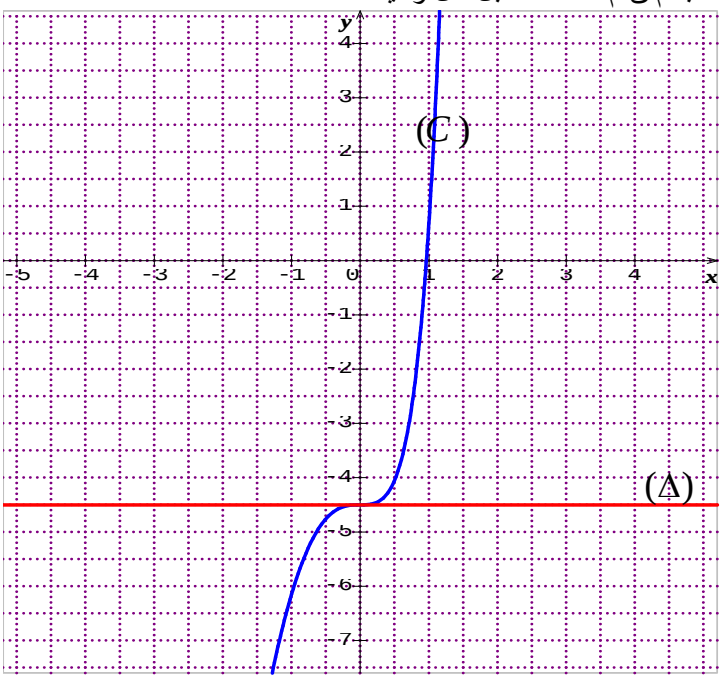
4/المشتقة انعدمت عند 0 ولم تغير إشارتها النقطة $I(0;-4.5)$ نقطة إنعطاف

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = -4.5$$

5/الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0.5;1[$

$$f(0.5)f(1) = -4.4 \times 0.6 < 0$$

حسب م ق م المعادلة تقبل حل وحيد



الموضوع الثاني

التمرين الأول:

/1

$$z^2 - 6z + 18 = 0$$
$$\Delta = 36 - 72 = -36 = 36i^2$$

$$z_1 = \frac{6-6i}{2} = 3-3i \;;\; z_2 = 3+3i$$

/2أ)

$$|z_1| = 3\sqrt{2}$$
$$\cos^{-}{}_1 = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; \sin^{-}{}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$- = -\frac{®}{4} \Rightarrow z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{®}{4}}$$

ب)

$$r_1 r_3 = 6 \Rightarrow r_3.3\sqrt{2} = 6 \Rightarrow r_3 = \sqrt{2}$$
$$- -\frac{®}{4} = \frac{®}{12} \Rightarrow - = \frac{®}{3}$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{®}{3}} = \sqrt{2}(\cos\frac{®}{3} + i\sin\frac{®}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

ت)

$$z_1 z_3 = (3-3i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2})$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}i - \frac{3\sqrt{2}}{2}i + \frac{3\sqrt{6}}{2}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2} + i\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{®}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \;;\; \sin\frac{®}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

/4 أ)

$$\frac{z_B - Z_O}{z_A - z_O} = a \Rightarrow a = \frac{3-3i}{3+3i}$$
$$a = \frac{(3-3i)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)} = -i$$

ومنه زاوية الدوران هي $-\frac{®}{2}$

ب) $z_{\overrightarrow{OA}} = 3+3i \;;\; z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 3+3i$

إذن $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ الرباعي $OACB$ مربع

التمرين الثاني :

/1صحيح لأن : $\frac{-3}{-2} \neq \frac{1}{-3}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

/2 صحيح لأن :

$2+8(1)-(-1)-11=0$ القطة A تحقق المعادلة

$-1+8(2)-(4)-11=0$ القطة B تحقق المعادلة

$1+8(1)-(-2)-11=0$ القطة C تحقق المعادلة

/3خطأ لأن القطة A لاتحق الجملة

/4خطأ لأن:

$$d(D;(p)) = \frac{|1-2(1)-2+1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

/5 خطأ لأن :

$$-\frac{4}{3} - 2(\frac{2}{3}) + \frac{5}{3} + 1 = -\frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow E \in (P)$$

$\overrightarrow{EC}\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{-11}{3}\right)$ غير مرتبط خطيا مع $\vec{n}(1;-2,1)$

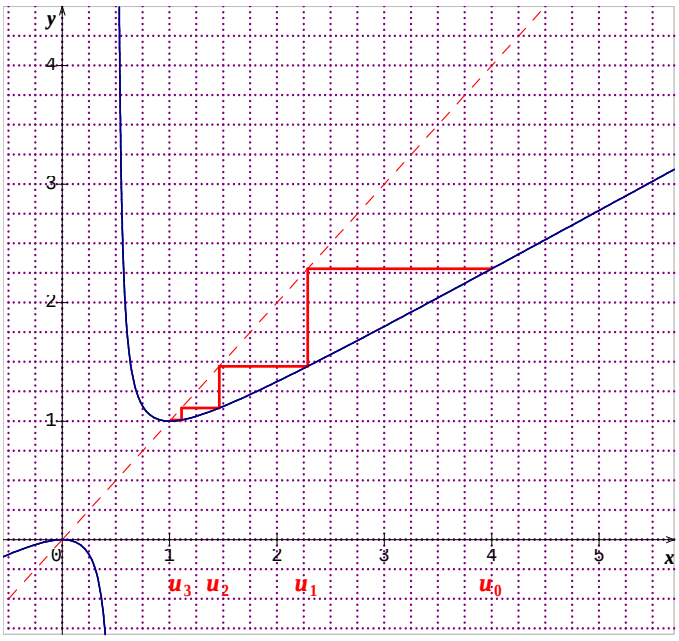
التمرين الثالث :

/1لدينا $g(1)=1$ والدالة g متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ إذن من أجل $x>1$ فإن $g(x)>1$

/2

ب) المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة

أ)



3/من أجل $n=0$ لدينا $u_0=4>1$ خ ص

نفرض صحتها من أجل n أي $u_n>1$

نثبت صحتها من أجل $n+1$

$$u_n>1\Rightarrow f(u_n)>1\Rightarrow u_{n+1}>1$$

/4

$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2}{2u_n-1}-u_n=\frac{-u_n^2+u_n}{2u_n-1}=\frac{u_n(1-u_n)}{2u_n-1}$$

إشارته من إشارة $1-u_n$

$u_n>1\Rightarrow 1-u_n<0$ المتتالية متناقصة تماما

5/المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

نفرض $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n=l$

$$\lim_{x\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{x\to+\infty}u_n\Rightarrow\frac{l^2}{2l-1}=l$$

بعد حل المعادلة نجد أن : $l=0$ مرفوض و $l=1$

التمرين الرابع :

I) $g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1/ $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

2/ من أجل $x>0$:

$$g'(x)=\frac{-1}{(2x+1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{-4x^2-5x-1}{(2x+1)^2}$$

$$\Delta=9\Rightarrow x_1=-\frac{1}{4}\ ;x_2=-1$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3/ g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1.8\,;1.9]$

$$g(1.8)g(1.9)=0.02\times-0.5<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حل وحيد
$1.8<\sim<1.9$

x	0	a	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II) $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$

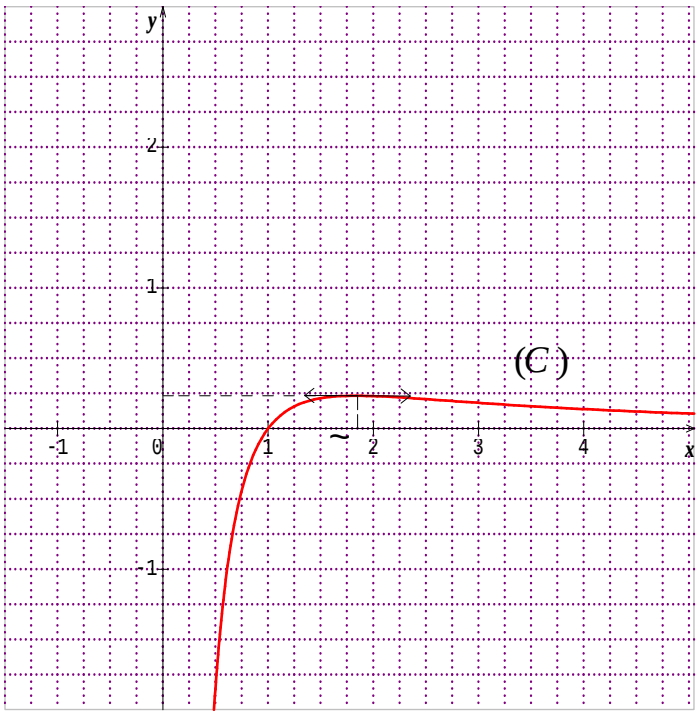
/1

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x^2(1+\frac{1}{x})}=0$$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$



2/ أ)

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x^2+x)-(2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{2(x+1)-(2x+1)2\ln x}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{2(2x+1)\left(\frac{x+1}{2x+1}-\ln x\right)}{(x^2+x)^2}$$

$$=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0		a		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	0

ت)

$$f(\sim)=\frac{2\ln\sim}{\sim^2+\sim}$$

$$g(\sim)=0\Rightarrow\ln\sim=\frac{\sim+1}{2\sim+1}$$

$$f(\sim)=\frac{2\frac{\sim+1}{2\sim+1}}{\sim^2+\sim}=\frac{2(\sim+1)}{\sim(\sim+1)(2\sim+1)}$$

$$=\frac{2}{\sim(2\sim+1)}$$

$$1.8<\sim<1.9$$

$$4.6<2\sim+1<4.8$$

$$8.28<\sim(2\sim+1)<9.12$$

$$0.10<\frac{1}{\sim(2\sim+1)}<0.12$$

$$0.20<\frac{2}{\sim(2\sim+1)}<0.24$$

ثانوية بلحاج قاسم نورالدين الشلف التاريخ : 30/ 04 / 2015 السنة الدراسية: 2014 / 2015
المستوى: 3 ثانوي الشعبة: رياضيات الموضوع الثاني

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول ☹☺☹(05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :
$\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A,B,C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$.

أ) أكتب الأعداد المركبة z_A,z_B,z_C و z_D على الشكل الأسي .

ب) بين أن النقط A,B,C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .

ج) بين أنَ : $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_C}=i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}\right)$.
ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD)؟

3) نعتبر العدد المركب z_n الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث n عدد طبيعي .
ونعرف العدد المركب L_n بـ : $L_n=z_D\times z_n$.

أ) أكتب كلا من العددين L_0,L_1 على الشكل الجبري .

ب) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n=\left|L_n\right|$ من أجل كل عدد طبيعي n.

- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
- لتكن النقط $M_0,M_1,...,M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0,L_1,...,L_n$ على الترتيب .

أحسب بدلالة n المجموع ، $S_n=\left\|\overrightarrow{OM_0}\right\|+\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|+...+\left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين الثاني ☹☺☺ (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$ و $D(4;-2;5)$ و الشعاع $\vec{n}=2\vec{i}+a\vec{j}+b\vec{k}$ حيث a,b عددان حقيقيان .

1. أ) بين أن النقط A,B,C تعين مستويا (ABC) .

ب)عين العددين الحقيقيين a,b بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2. ليكن المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=2-2t\\ y=-1+t;\quad (t\in\mathbb{R})\\ z=4-t\end{cases}$

أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC).

ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

ج) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

د) بين أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC.

3. أدرس تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

التمرين الثالث ☹☹☹ (04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث n عدد طبيعي.

3) بين أن العدد 131 أولي .

4) عين الأعداد الطبيعة n التي تحقق : $\begin{cases} 3m+7d=2^n-48 \\ ab=5m \end{cases}$

حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.

5) عين قيم n بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.

التمرين الرابع☹ ☺☹ (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.(وحدة الطول $2cm$)

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f).

6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
$(E): f(x)=f(m)$

7) أ) عين العددين الحقيقيين b,a بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بـ cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\frac{1}{2}, y=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$.

II. نسمي $f'=f^{(1)}, f''=f^{(2)}, f'''=f^{(3)},...,f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$.

أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n و y_n .

ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

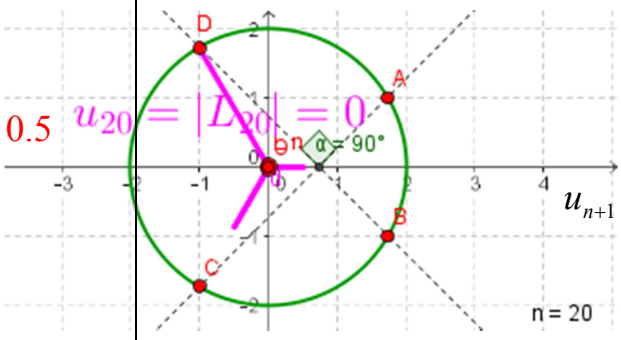
ج) بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

✌بالتوفيق و النجاح ☹في البكالوريا☺☺ جوان 2015 ❀أستاذ المادة

☜ تصحيح الموضوع التجريبي الثاني الشعبة : رياضيات

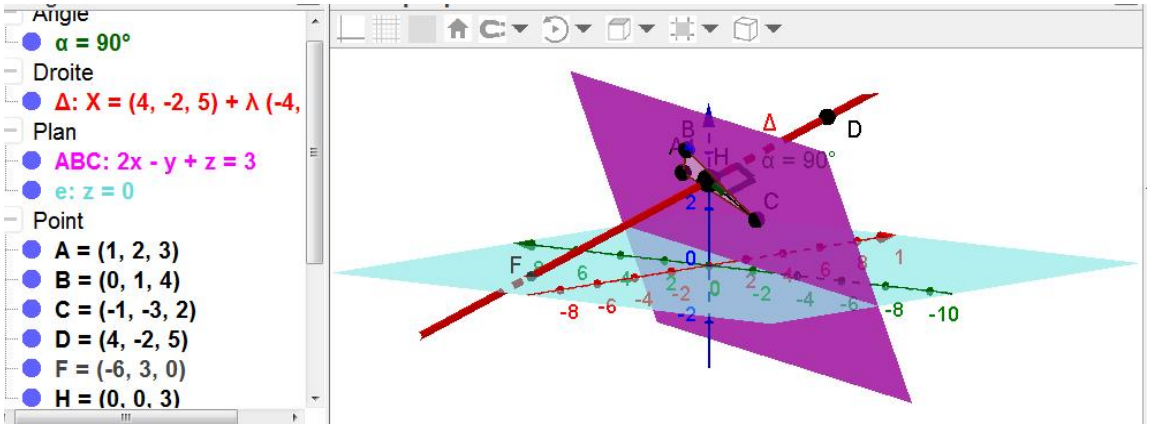
التصحيح	العلامة
☜ التمرين الأول ☺☺☺	05 نقاط
1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.	
▪ حل المعادلة $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$: $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$ يكافئ $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z^2+2z+4=0$ ▪ حل المعادلة : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$ حساب المميز : $\Delta=\left(-2\sqrt{3}\right)^2-4(1)(4)=12-16=-4=(2i)^2$ المعادلة تقبل حلين هما : $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}+\mathrm{i}, z_1=\dfrac{2\sqrt{3}-2i}{2}=\sqrt{3}-i$	0.5
▪ حل المعادلة $z^2+2z+4=0$ حساب المميز : $\Delta=(2)^2-4(1)(4)=4-16=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ المعادلة تقبل حلين هما : $z''=\overline{z'}=-1+i\sqrt{3}, z'=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$	0.5
▪ مجموعة حلول المعادلة $\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$: $S=\left\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\right\}$	
2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A,B,C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}+i, z_B=\overline{z_A}, z_C=-1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$. أ) أكتب الأعداد المركبة z_A,z_B,z_C و z_D على الشكل الأسي	
▪ كتابة الأعداد z_A,z_B,z_C و z_D على الشكل الأسي: ▪ لدينا : $z_A=\sqrt{3}+i$ ▪ حساب الطويلة : $\lvert z_A\rvert=\left\lvert\sqrt{3}+i\right\rvert=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$ ▪ تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta=\arg\left(z_A\right)$ لدينا : $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$ أي $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$	0.5
▪ ولدينا : $z_B=\overline{z_A}=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$	
▪ $z_C=-1-i\sqrt{3}$ حساب الطويلة : $\lvert z_C\rvert=\left\lvert-1-i\sqrt{3}\right\rvert=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$	

0.5	تعيين عمدة للعدد z_C : نضع : $\theta' = \arg(z_C)$ لدينا : $\begin{cases} \cos\theta' = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$ إذن $z_C = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
	▪ ولدينا : $z_D = \overline{z_C} = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}}$
	ب) بين أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين عناصرها .
0.25	▪ **تبيان أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) :** ▪ لدينا : $\lvert z_A\rvert = \lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert = \lvert z_D\rvert = 2$ أي $OA = OB = OC = OD = 2$ **ومنه النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) ذات المركز O و نصف قطرها $r = 2$**
	ج) بين أنَ : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ثم عين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})$.
0.5	▪ **تبيان أن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ثم تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})$:** ▪ **لدينا:** $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1 - \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})} = \frac{i^2(1+\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}$ أي $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = \frac{i(i(1+\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}))}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})} = i \times \frac{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})}{1 + \sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})} = i$ **إذن $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$** ▪ **تعيين قيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD})$:** $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$
	▪ **ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD)؟**
0.25	▪ **الاستنتاج بالنسبة للمستقيمين (AC) و (BD):** $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2}$ يعني $(AC) \perp (BD)$
	3) نعتبر العدد المركب z_n الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2n\pi}{3}$ عمدة له ، حيث n عدد طبيعي . **ونعرف العدد المركب L_n بـ : $L_n = z_D \times z_n$.** **أ) أكتب كلا من العددين L_1, L_0 على الشكل الجبري .**
	▪ **كتابة كلا من العددين L_1, L_0 على الشكل الجبري :** لدينا : $L_0 = z_D \times z_0 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^0} \times e^{i\frac{2\times 0\times\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$

$L_1 = z_D \times z_1 = 2e^{-i\frac{4\pi}{3}} \times \frac{1}{2^1} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2 \times \frac{1}{2} \times e^{-i\frac{4\pi}{3}+i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن $L_0 = -1 + i\sqrt{3}$ $\quad$ $L_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5
ب) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_n = \lvert L_n \rvert$ من أجل كل عدد طبيعي n. ▪ **بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .** ▪ **لتكن النقط $M_0, M_1, \dots, M_n$ صور الأعداد المركبة $L_0, L_1, \dots, L_n$ على الترتيب .** **أحسب بدلالة n المجموع ، $S_n = \lVert\overrightarrow{OM_0}\rVert + \lVert\overrightarrow{OM_1}\rVert + \dots + \lVert\overrightarrow{OM_n}\rVert$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$**	
▪ **تبيان أن المتتالية (u_n) هندسية :** ▪ لدينا : $u_n = \lvert L_n \rvert = \lvert z_D \times z_n \rvert = \lvert z_D \rvert \times \lvert z_n \rvert = 2 \times \frac{1}{2^n}$ ▪ إذن : $u_{n+1} = 2 \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(2 \times \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}u_n$ ▪ أي $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ **ومنه (u_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول** $u_0 = \lvert L_0 \rvert = \lvert -1 + i\sqrt{3} \rvert = 2$  	0.5
▪ **حساب المجموع $S_n = \lVert\overrightarrow{OM_0}\rVert + \lVert\overrightarrow{OM_1}\rVert + \dots + \lVert\overrightarrow{OM_n}\rVert$:** ▪ **لدينا :** $S_n = \lVert\overrightarrow{OM_0}\rVert + \lVert\overrightarrow{OM_1}\rVert + \dots + \lVert\overrightarrow{OM_n}\rVert = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$ $S_n = 2 \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $S_n = 4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ▪ **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:** $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[4 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 4$ $\quad$ لان $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$	0.5 0.25
☜ **التمرين الثاني** ☺☺☺	**04 نقاط**
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;2;3), B(0;1;4), C(-1;-3;2)$ و $D(4;-2;5)$ **و الشعاع** $\vec{n} = 2\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ **حيث a, b عددان حقيقيان .** **1. أ) بين أن النقط A, B, C تعين مستويا (ABC) .**	
▪ تبيان أن النقط A, B, C تعين مستويا : ▪ لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-5;-1)$	$0.25 + 0.25$

لدينا : $\frac{-2}{-1} \neq \frac{-5}{-1} \neq \frac{-1}{1}$ إذن :لا يوجد عدد حقيقي k بحيث يكون ، $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ومنه النقط C, B, A ليست في استقامية فهي تعين مستويا.	0.25
ب)عين العددين الحقيقيين b,a بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي (ABC) ثم عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).	
▪ **تعيين العددين الحقيقيين b,a بحيث يكون الشعاع $\vec{n}$ ناظميا للمستوي (ABC):** ▪ لدينا : $\vec{n}(2;a;b)$ ناظميا للمستوي (ABC) يكافئ $\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2\times(-1) - a + b = 0 \\ 2(-2) - 5a - b = 0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-a + b - 2 = 0 \ldots (1) \\ -5a - b - 4 = 0 \ldots (2)\end{cases}$ ▪ بالجمع نجد : $-a + b - 2 - 5a - b - 4 = 0$ ومنه $-6a = 6$ أي $a = -1$ ▪ من أجل $a = -1$ بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $b = 1$ أي $\vec{n}(2;-1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)	0.5
▪ **تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):** ▪ معادلة (ABC) من الشكل $2x - y + z + d = 0$ ▪ تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة $A(1;2;3)$ نجد : $2(1) - 2 + 3 + d = 0$ ومنه $d = -3$ معادلة للمستوي (ABC): $2x - y + z - 3 = 0$	0.5
2. ليكن المستقيم (Δ)ذي التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x = 2 - 2t \\ y = -1 + t; \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 - t\end{cases}$ **أ) بين أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ)وأن المستقيم (Δ)عمودي على المستوي (ABC).**	
▪ **تبيان أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ):** ▪ **من أجل** $(x;y;z) = (4;-2;5)$ بالتعويض في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases}4 = 2 - 2t \\ -2 = -1 + t \\ 5 = 4 - t\end{cases}$ **ومنه** $\begin{cases}2t = -2 \\ t = -1 \\ t = -1\end{cases}$ أي $\begin{cases}t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1\end{cases}$ ومنه $D \in (\Delta)$	0.25

▪ **تبيان أن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC):** ▪ لدينا : $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ▪ ولدينا : $\vec{u}(-2;1;-1)$ شعاع توجيه (Δ) ▪ نلاحظ أن : $\vec{n}=-\vec{u}$ ومنه $\vec{n}\parallel\vec{u}$ أي $(\Delta)\perp(ABC)$	0.25
ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC):	
▪ **تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC):** ▪ إحداثيات النقطة H هي حل للجملة : $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$ ▪ أي $2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3=0$ ومنه $-6t+6=0$ وبالتالي $t=1$ إذن: $H(0;0;3)$	0.5
ج) أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).	
▪ **حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC):** ▪ **لدينا :** $d(D,(ABC))=DH=\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ ▪ **أو بطريقة أخرى :** $d(D,(ABC))=\dfrac{\lvert 2(4)-(-2)+5-3\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\dfrac{\lvert 12\rvert}{\sqrt{6}}=\dfrac{12\sqrt{6}}{6}=2\sqrt{6}$ $d(D,(ABC))=2\sqrt{6}$	0.5
د) بين أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC.	
▪ **تبيان أن النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC:** ▪ **H هي مركز ثقل المثلث ABC يعني** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ لدينا : $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ومنه النقطة H هي مركز ثقل المثلث ABC	0.25
3) أدرس تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$.	
▪ **دراسة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$:** ▪ لدينا معادلة للمستوي $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي $z=0$ ومنه شعاع ناظمي له هو $\vec{k}(0;0;1)$ ▪ ولدينا شعاع توجيه للمستقيم (Δ) هو $\vec{u}(-2;1;-1)$. ▪ إذن : $\vec{k}.\vec{u}=0\times(-2)+0\times1+1\times(-1)=-1\neq0$ ومنه (Δ) لا يوازي $(O,\vec{i},\vec{j})$ ▪ أي (Δ) يقطع $(O,\vec{i},\vec{j})$ في نقطة F .	0.25

0.25	▪ إحداثيات النقطة F هي حل للجملة : $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \\ z=0 \end{cases}$ أي $4-t=0$ ومنه $t=4$ ▪ من أجل $t=4$ بالتعويض في جملة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد : $\begin{cases} x=-6 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$ ومنه $F(-6;3;0)$
	
04نقاط	**☜ التمرين الثالث ☹☺☹**
	1) **أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5.**
$0.5+0.5$	▪ **دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5:** ▪ لدينا : $2^0\equiv 1[5]$ $2^1\equiv 2[5]$ $2^2\equiv 4[5]$ $2^3\equiv 3[5]$ $2^4\equiv 1[5]$ إذن بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5 تشكل متتالية دورية دورها $p=4$. من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
باقي قسمة العدد 2^n على 5	1	2	4	3

	2) **عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث n عدد طبيعي.**
0.75	▪ **تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5:** ▪ لدينا : $2017^{4n+3}\equiv 2^{4n+3}[5]$ أي $2017^{4n+3}\equiv 3[5]$ ▪ ولدينا : $2016^{8n}\equiv 1^{8n}[5]$ أي $2016^{8n}\equiv 1[5]$ ▪ و $2014^{2n+1}\equiv 4^{2n+1}[5]$ أي $2014^{2n+1}\equiv \left(2^2\right)^{2n+1}[5]$ ومنه $2014^{2n+1}\equiv 2^{4n+2}[5]$ وبالتالي $2014^{2n+1}\equiv 4[5]$ ▪ إذن $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 3-2\times 1+4[5]$ ومنه $2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\equiv 0[5]$

أي باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على 5 هو 0	
3) بين أن العدد 131أولي .	
▪ **تبيان أن العدد 131أولي :** لدينا : $\sqrt{131}=11.45$ ▪ العدد 131 لا يقبل القسمة على أي عدد من الاعداد الأولية الأصغر من أوتساوي 11 وهي $\{2;3;5;7;11\}$ $131\equiv 10[11],131\equiv 5[7],131\equiv 1[5],131\equiv 2[3],131\equiv 1[2]$ ومنه العدد 131ولي .	0.5
4) عين الأعداد الطبيعة n التي تحقق : $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ ab=5m\end{cases}$ حيث ، $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.	
▪ **تعيين الأعداد n التي تحقق :** $\begin{cases}3m+7d=2^n-48\\ ab=5m\end{cases}$ ▪ لدينا $ab=5m$ ولدينا $ab=md$ ومنه $d=5$ ▪ نضع : $a=5a'$ و $b=5b'$ مع $a'\wedge b'=1$ (a' أولي مع b') ▪ إذن $ab=5m$ يعني $5a'\times 5b'=5m$ أي $m=5a'b'$ وبالتالي : $3m+7d=2^n-48$ معناه $3\times 5a'b'+7\times 5=2^n-48$ أي $5(3a'b'+7)=2^n-48$ $3a'b'+7$ **طبيعي يعني** $2^n-48\equiv 0[5]$ **ومنه** $2^n-3\equiv 0[5]$ أي $2^n\equiv 3[5]$ وبالتالي : $n=4k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$	0.75
5) عين قيم n بحيث يكون ، $7<n<15$ ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$.	
▪ **تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون ، $7<n<15$:** ▪ لدينا : $7<n<15$ معناه $7<4k+3<15$ أي $4<4k<12$ ▪ وبالتالي : $1<k<3$ إذن $k=2$ ومنه $n=11$	0.5
▪ **استنتاج الثنائيات $(a;b)$:** ▪ من أجل $n=11$ لدينا : $5(3a'b'+7)=2^{11}-48$ ومنه $5(3a'b'+7)=2000$ أي $3a'b'+7=400$ ومنه $a'b'=131$ وبالتالي مجموعة الثنائيات $(a';b')$ $\{(131;1),(1;131)\}$ ومنه مجموعة الثنائيات $(a;b)$ $\{(655;5),(5;655)\}$	0.5
التمرين الرابع ☹☺☺	**(07 نقاط)**
نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$ **نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.** (**وحدة الطول** $2cm$)	

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

0.25 + 0.25

- **حساب النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$:**
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(1-2x)e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2xe^{2x}\right)=0$ لان

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)e^{2x} = -\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}(1-2x)=-\infty$

2) أحسب عبارة $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

0.25

- **حساب المشتقة :**
- $f'(x) = -2e^{2x}+(1-2x)\times 2e^{2x} = (-2+2-4x)e^{2x} = -4xe^{2x}$

$f'(x)=-4xe^{2x}$ من أجل كل عدد حقيقي x

0.25

- **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :**
- **جدول اشارة المشتقة :**

شارة $f'(x)$ من اشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

- الدالة f **متزايدة على المجال** $]-\infty;0]$ ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

0.5

- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) حل المعادلة $f(x)=0$ ثم استنتج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

0.25

- **حل المعادلة $f(x)=0$:**
- $f(x)=0$ يكافئ $(1-2x)e^{2x}=0$

يكافئ $1-2x=0$ لان $e^{2x}\neq 0$

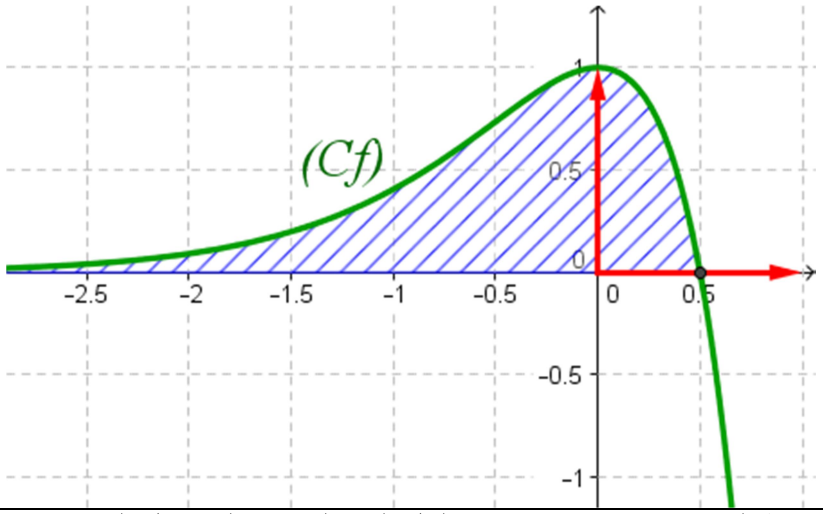
يكافئ $x=\frac{1}{2}$

- **استنتاج نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:**

$(C_f)\cap(x'x)=\left\{\left(\frac{1}{2};0\right)\right\}$

5) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (C_f).

- **حساب $f(1)$:**
- $f(1)=(1-2(1))e^{2\times1}=-e^2=-7.39$

$0.25+0.5$	▪ **الرسم :** 
	6) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x)=f(m)$
01	▪ **مناقشة حلول المعادلة $(E): f(x)=f(m)$:** ▪ حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=f(m)$ الموازي لحامل محور الفواصل $(x'x)$. تغير قيم $f(m)$ حسب قيم m

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(m)$	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

▪ **المناقشة :**

▪ إذا كان $f(m)\in]-\infty;0[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.

▪ إذا كان $f(m)=0$ أي $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حلا موجبا $x=\frac{1}{2}$.

▪ إذا كان $f(m)\in]0;1[$ أي $m\in]-\infty;0[\cup\left]0;\frac{1}{2}\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة.

▪ إذا كان $f(m)=1$ أي $m=0$ المعادلة تقبل حلا معدوما مضاعفا.

	7) أ) عين العددين الحقيقيين b,a بحيث تكون الدالة F المعرفة بـ : $F(x)=(ax+b)e^{2x}$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
0.5	▪ **تعيين العددين الحقيقيين b,a:** - F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ يعني $F'(x)=f(x)$ أي $ae^{2x}+(ax+b)\times 2e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$ ومنه $(2ax+a+2b)e^{2x}=(1-2x)e^{2x}$ بالمطابقة نجد $\begin{cases}2a=-2\\a+2b=1\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$ أي $F(x)=(-x+1)e^{2x}$

	ب) أحسب بـ cm^2 و بدلالة λ المساحة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=\frac{1}{2}, y=0$ و $x=\lambda$ حيث $\lambda<\frac{1}{2}$ ثم أحسب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$.
0.5	▪ **حساب $S(\lambda)$:** f دالة مستمرة وموجبة على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$ وبالتالي : $S(\lambda)=\int_{\lambda}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\left[F(x)\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left[(-x+1)e^{2x}\right]_{\lambda}^{\frac{1}{2}}=\left(-\frac{1}{2}+1\right)e-(-\lambda+1)e^{2\lambda}$ أي $S(\lambda)=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times us=\left(\frac{1}{2}e+\lambda e^{2\lambda}-e^{2\lambda}\right)\times 4cm^2$ ومنه $S(\lambda)=\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)cm^2$
0.25	▪ **حساب $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)$:** $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left(2e+4\lambda e^{2\lambda}-4e^{2\lambda}\right)=(2e)cm^2$ لان $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 4\lambda e^{2\lambda}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2\lambda}=0$
	II. نسمي $f^{(1)}=f', f^{(2)}=f'', f^{(3)}=f''', \ldots, f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f . **1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.**
0.75	▪ **البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$** - نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . **1)** من أجل $n=1$ لدينا : $f^{(1)}(x)=2^1(1-1-2x)e^{2x}=-4xe^{2x}=f'(x)$ ومنه $P(1)$ صحيحة . **2)** نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ - لدينا : $f^{(n+1)}(x)=\left(f^{(n)}(x)\right)'=2^n\times\left[-2e^{2x}+(1-n-2x)\times 2e^{2x}\right]$ ومنه $f^{(n+1)}(x)=2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x}=2^n\times 2(-n-2x)e^{2x}$ أي : $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. **3)** حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.
	2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المنحني $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ الممثل للدالة $f^{(n)}$ حيث $f^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة $M_n(x_n;y_n)$. **أ) أحسب بدلالة n كلا من x_n و y_n .**

▪ **حساب x_n و y_n بدلالة n:** - $\left(C_{f^{(n)}}\right)$ **يقبل مماسا يوازي** $(x'x)$ يعني $f^{(n+1)}(x)=0$ أي $2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}=0$ ومنه $-n-2x=0$ وبالتالي $x=-\frac{1}{2}n$ أي $x_n=-\frac{1}{2}n$ من أجل $x=-\frac{1}{2}n$ لدينا : $y_n=f^{(n)}\left(-\frac{1}{2}n\right)=2^n\left(1-n-2\left(-\frac{1}{2}n\right)\right)e^{2\left(-\frac{1}{2}n\right)}=2^n e^{-n}=\left(2e^{-1}\right)^n$ أي $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$	$0.25+0.25$
ب) بين أن المتتالية (x_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.	
▪ **تبيان أن (x_n) متتالية حسابية :** - **لدينا :** $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(n+1)-\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n=-\frac{1}{2}$ ومنه (x_n) متتالية حسابية أساسها $r=-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $x_0=0$. - **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$:** $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}n\right)=-\infty$	0.5
ج) بين أن المتتالية (y_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$	
▪ **تبيان أن المتتالية (y_n) هندسية :** - لدينا : $y_n=\left(2e^{-1}\right)^n$ ومنه $y_{n+1}=\left(2e^{-1}\right)^{n+1}=2e^{-1}\times\left(2e^{-1}\right)^n=2e^{-1}\times y_n$ ومنه (y_n) هندسية أساسها $q=2e^{-1}$ وحدها الأول $y_0=1$. - **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$:** $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2e^{-1}\right)^n=0$ لان $-1<2e^{-1}<1$	0.5

✌انتهى تصحيح الموضوع الثاني ❀ بالتوفيق ☺ والنجاح ☺☺ في البكالوريا 2015 ❀

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول ☹☺(04 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-8z+17=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط D,B,A التي لواحقها على الترتيب $a=4-i$, $b=4+i$ و $d=-i$.

و ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega=2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'=iz+2-2i$.

ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c=1+2i$.

ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD .

د) بين أنَ النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها .

ه) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون ، $\left|-i-z\right|^2-\left|4-i-z\right|^2=16$.

التمرين الثاني ☹ ☺(05 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(2,1,1)$, $I(3,-1,0)$ و

(P) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق، $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$

1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P) .

ب) بين أن المجموعة (P) هي مستو $x-2y-z+1=0$ معادلة ديكارتية له.

2) لتكن (S) سطح كرة مركزها النقطة I وتمر من النقطة A .

- تحقق أن نصف قطر سطح الكرة (S) هو $R=\sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)

3) ليكن (P') المستوي ذي المعادلة $2x-y+z-4=0$.

أ) بين أن (P') يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .

ب) لتكن $B(2;-2;-2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C).

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B .

التمرين الثالث ☺☺ (04 نقاط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7.

2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابلا للقسمة على العدد 7.

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث x عدد طبيعي.

أ) عين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35.

ب) أكتب العدد N في النظام العشري.

التمرين الرابع☹ ☺ (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما x، $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (Δ) و (C_f).

II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<2$.

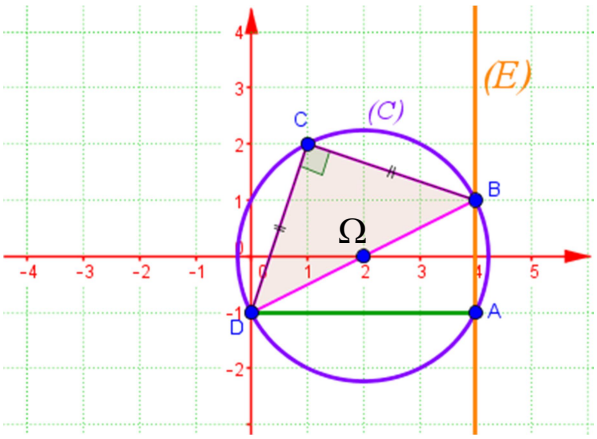
2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة.

3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

✌بالتوفيق و النجاح☹في البكالوريا☺ جوان 2015 ❀أستاذ المادة

☜ تصحيح الموضوع التجريبي الأول للبكالوريا 2015 – الشعبة : رياضيات

التصحيح	العلامة
☜ التمرين الأول :	
1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2-8z+17=0$.	
• **حل المعادلة :** $z^2-8z+17=0$ - حساب المميز Δ : $\Delta=(-8)^2-4(1)\times(17)=-4$ أي $\Delta=(2i)^2$ - المعادلة تقبل حلين هما : $z_1=\frac{8-2i}{2}=4-i$ ، $z_2=\frac{8+2i}{2}=4+i$ مجموعة الحلول: $S=\{4-i;4+i\}$	$0.5+2\times0.25$
2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A,B,D التي لواحقها على الترتيب $a=4-i$ ، $b=4+i$ و $d=-i$. و ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega=2$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ أ) بين أنَ العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'=iz+2-2i$.	
• **تبيان أن العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'=iz+2-2i$:** - العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z'-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$ أي $z'-2=i(z-2)$ ومنه $z'=i(z-2)+2=iz+2-2i$ **إذن** $z'=iz+2-2i$	0.75
ب) تحقق أنَ لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c=1+2i$	
• **التحقق أن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R هي $c=1+2i$:** • لدينا : $R(B)=C$ يعني $c=i\times b+2-2i=i(4+i)+2-2i=4i-1+2-2i=1+2i$ $c=1+2i$	0.25
ج) بين أنَ : $\frac{c-d}{c-b}=-i$ ثم أستنتج طبيعة المثلث BCD.	
• **تبيان أن $\frac{c-d}{c-b}=-i$:** - لدينا : $\frac{c-d}{c-b}=\frac{1+2i-(-i)}{1+2i-(4+i)}=\frac{1+3i}{-3+i}=\frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}$ ومنه $\frac{c-d}{c-b}=\frac{-3-i-9i+3}{9+1}=\frac{-10i}{10}=-i$	0.5

• **استنتاج طبيعة المثلث BCD:** - لدينا : $\left\|\frac{c-d}{c-b}\right\|=\|-i\|=1$ ولدينا $\arg\left(\frac{c-d}{c-b}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$ - يعني $\frac{DC}{BC}=1$ أي $DC=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$ **إذن المثلث BCD قائم في C ومتساوي الساقين**	$0.25+0.25$
د) بين أنَ النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها	
• **تبيان أنَ النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة :**  المثلث BCD قائم في C وبالتالي النقط D,C,B تنتمي الى دائرة مركزها منتصف الوتر أي Ω. ولدينا : $\Omega A=\|z_A-z_\Omega\|=\|4-i-2\|=\|2-i\|$ $\Omega A=\sqrt{5}$ إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D=\sqrt{5}$ ومنه النقط C,B,A و D تنتمي الى نفس الدائرة **مركزها** $\Omega(2;0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$.	0.5 0.5
ه) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون ، $\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$.	
• **تعيين مجموعة النقط (E) من المستوي والتي تحقق : $\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$:** $\|-i-z\|^2-\|4-i-z\|^2=16$ **يعني** $MD^2-MA^2=16$ ولتكن النقطة I منتصف القطعة $[DA]$ إذن لدينا : $\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=16$ أي $\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{ID}^2-\overrightarrow{MI}^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IA}^2=16$ ومنه $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ID}-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=16$ لان $\overrightarrow{ID}^2=\overrightarrow{IA}^2$ (I منتصف القطعة $[DA]$) وبالتالي : $2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IA}\right)=16$ أي $2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AD}=16$ إذن : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$ لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على (DA) حيث $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}=8$ أي $IH\times DA=8$ - ولدينا : $DA=\|z_A-z_D\|=\|4-i+i\|=\|4\|=4$ وبالتالي $IH=2$ - **وبالتالي H منطبقة على النقطة A.** إذن $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{DA}=8$ يعني $\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM}\right).\overrightarrow{DA}=8$ ومنه $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$ أي $8+\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{DA}=8$ وبالتالي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DA}=0$ (لان $H=A$) **المجموعة (E) هي المستقيم العمودي على (DA) و المار من A** أي	01

	$(E)=(AB)$ ☜ أوبطريقة أخرى : $\lvert -i-z\rvert^2-\lvert 4-i-z\rvert^2=16$ يعني $\lvert -i-x-iy\rvert^2-\lvert 4-i-x-iy\rvert^2=16$ ومنه : $\lvert -x+i(-1-y)\rvert^2-\lvert 4-x+(-1-y)\rvert^2=16$ أي $(-x)^2+(-1-y)^2-(4-x)^2-(-1-y)^2=16$ ومنه $x^2-16+8x-x^2=16$ ومنه : $8x=32$ وبالتالي : $x=4$ المجموعة (E) هي المستقيم ذي المعادلة $x=4$ العمودي على $(x'x)$ والمار من النقطة A
	☜ **التمرين الثاني :**
	في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين $I(3,-1,0),A(2,1,1)$ و (P) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق، $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$
	1) أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P) .
0.5	• تبيان أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (P) : - لدينا : $AA^2-\overrightarrow{AA}.\overrightarrow{AI}=0$ ومنه $A\in(P)$
	ب) بين أن المجموعة (P) هي مستو $x-2y-z+1=0$ معادلة ديكارتية له.
0.5	• تبيان أن المجموعة (P) هي مستو $x-2y-z+1=0$ معادلة ديكارتية له: - لدينا : $MA^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ يعني $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0$ ومنه $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI})=0$ أي $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{IM})=0$ وبالتالي $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}=0$ أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=0$ المجموعة (P) هي مستو $\overrightarrow{IA}$ شعاع ناظمي له و يمر من النقطة A - تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P): لدينا : $\overrightarrow{AI}(1;-2;-1)$ معادلة (P) من الشكل $x-2y-z+d=0$ - تعيين قيمة d : نعوض بإحداثيات النقطة A نجد : $2-2(1)-1+d=0$ ومنه $d=1$ أي معادلة (P) هي $x-2y-z+1=0$

2) لتكن (S) سطح كرة مركزها النقطة I وتمر من النقطة A . ▪ تحقق أن نصف قطر سطح الكرة (S) هو $R=\sqrt{6}$ ثم عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)	
• التحقق أن نصف قطر (S) هو $R=\sqrt{6}$: - لدينا : $R=AI=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$. - تعيين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) : $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2=6$	0.5 0.5
3) ليكن (P') المستوي ذي المعادلة $2x-y+z-4=0$. أ) بين أن (P') يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .	
• تبيان أن (P') قطع (S) وفق دائرة (C) : - لدينا : $d(I,(P'))=\frac{\lvert 2(3)-(-1)+0-4\rvert}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}}=\frac{\lvert 3\rvert}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ أي لدينا : $d(I,(P'))<R$ ومنه (P') قطع (S) وفق دائرة (C)	0.25
• تعيين مركز الدائرة (C) ونصف قطرها : - تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من I مركز سطح الكرة (S) و العمودي على (P') : $(\Delta):\begin{cases}x=2t+3\\y=-t-1;(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$ - تعيين H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (P') : نحل لجملة : $\begin{cases}x=2t+3\\y=-t-1\\z=t\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ إذن : $2(2t+3)-(-t-1)+t-4=0$ ومنه $6t+3=0$	0.75

وبالتالي $t=-\frac{1}{2}$ و بالتالي $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$ أي $H\left(2;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

حساب نصف قطر دائرة التقاطع (C): $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P'))}=\sqrt{6-\frac{6}{4}}$ $\quad r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

ب) لتكن $B(2;-2;-2)$ نقطة من الفضاء تحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C)

- **التحقق من أن القطعة $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C):**

0.5

- **لدينا :** $AB=\sqrt{(2-2)^2+(-2-1)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}=2r$

وبالتالي $[AB]$ أحد أقطار الدائرة (C)

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B .

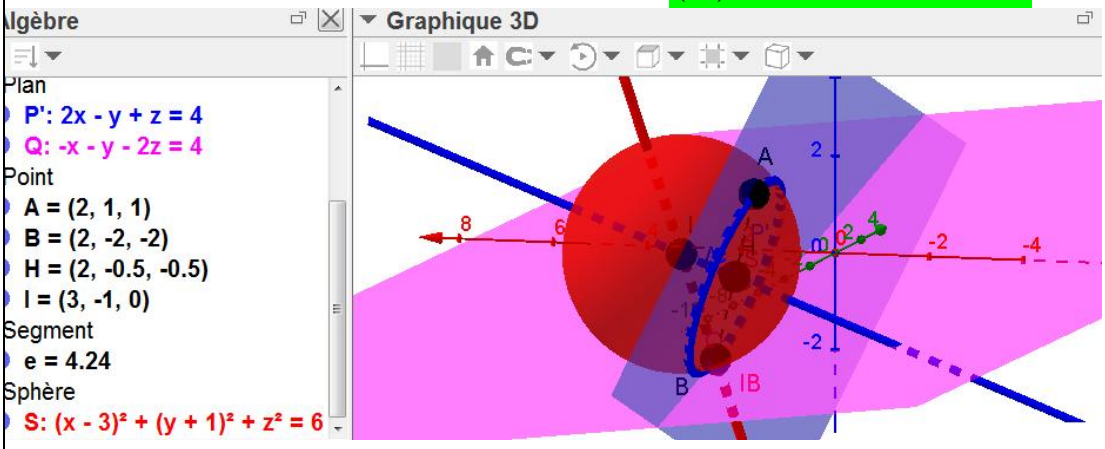
- **كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q):**

0.5

- $\overrightarrow{IB}(-1;-1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q).
- معادلة (Q) من الشكل $-x-y-2z+d=0$
- لتعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة B نجد : $-(2)-(-2)-2(-2)+d=0$

أي $d=-4$

إذن : $(Q):-x-y-2z-4=0$



التمرين الثالث :

1) **أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7 .**

- **دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7 :**

0.75

- لدينا :

$5^0\equiv 1[7]$ $\quad 5^1\equiv 5[7]$ $\quad 5^2\equiv 4[7]$ $\quad 5^3\equiv 6[7]$ $\quad 5^4\equiv 2[7]$ $\quad 5^5\equiv 3[7]$

$5^6\equiv 1[7]$

- بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على العدد 7 تشكل متتالية دورية دورها $p=6$
- من أجل كل عدد طبيعي k لدينا :

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$5^n \equiv ...[7]$	1	5	4	6	2	3

0.75

2) **عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1$ قابلا للقسمة على العدد 7**

- **تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1\equiv 0[7]$:**
- لدينا : $19\equiv 5[7]$ ومنه $19^{6n+3}\equiv 5^{6n+3}[7]$ أي $19^{6n+3}\equiv 6[7]$
- ولدينا : $5^{6n+4}\equiv 2[7]$
- إذن : $19^{6n+3}-5^{6n+4}+4n^2+1\equiv 0[7]$ يكافئ $6-2+4n^2+1\equiv 0[7]$

أي $4n^2+5\equiv 0[7]$

ومنه : $4n^2\equiv -5[7]$ إذن $4n^2\equiv 2[7]$

وبالتالي : $n^2\equiv 4[7]$

$n\equiv ...[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2\equiv ...[7]$	0	1	4	2	1	4	1

- ومنه : $n^2\equiv 4[7]$ يعني $n\equiv 2[7]$ أو $n\equiv 5[7]$

أي $n=7\alpha+2$ أو $n=7\alpha+5$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$

01

3) N **عدد طبيعي يكتب $\overline{1xx0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5. حيث x عدد طبيعي .**

أ) **عين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35.**

- **تعيين قيم العدد الطبيعي x حتى يكون العدد N قابلا للقسمة على 35:**
- لدينا : $N=1\times 5^3+x\times 5^2+x\times 5^1+0\times 5^0=125+30x$ مع $x<5$

وبالتالي N يقبل القسمة على 35 يعني $N\equiv 0[35]$

أي أن $N\equiv 0[7]$ لان $N\equiv 0[5]$ و 5 أولي مع 7

وبالتالي $N\equiv 0[7]$ يعني $125+30x\equiv 0[7]$

ومنه : $6+2x\equiv 0[7]$

يعني $2x\equiv -6[7]$ أي $2x\equiv 1[7]$

وبالتالي : $x\equiv 4[7]$

أي $x=7k+4$ مع $x<5$ **إذن من أجل $k=0$ نجد $x=4$**

01

ب) أكتب العدد N في النظام العشري .

- **كتابة العدد N في النظام العشري:**

$N=125+30(4)=245$ $N=245$

0.5

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

	I. 1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.
$0.25+0.25$	• حساب نهايتي الدالة f : - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$ - $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right)=+\infty$ لان $\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=+\infty\end{cases}$
	2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f
0.75	• **حساب** $f'(x)$: $f'(x)=1+3\times\frac{\frac{2x(3x)-3(x^2+2)}{(3x)^2}}{\frac{x^2+2}{3x}}=1+3\times\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{3x}{x^2+2}$ أي $f'(x)=1+\frac{6x^2-3x^2-6}{9x^2}\times\frac{9x}{x^2+2}=1+\frac{3x^2-6}{x(x^2+2)}=\frac{x^3+3x^2+2x-6}{x(x^2+2)}$ وبالتالي : $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x
0.5	• **استنتاج اتجاه تغير الدالة f :** $f'(x)=0$ يعني $\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}=0$ ومنه $x-1=0$ أو $x^2+4x+6=0$ (ليس لها حل لان $\Delta=16-24=-8<0$) مع $x\in]0;+\infty[$ ومنه $x=1$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)(x^2+4x+6)$ لان $x(x^2+2)>0$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2+4x+6		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

- الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ و متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

- جدول تغيرات الدالة f:

0.5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$.

- دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$:

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

- لدينا : $f(x)-y=x+3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)-x=3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

- $f(x)-y=0$ يعني $3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$

ومنه $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)=0$ أي $\frac{x^2+2}{3x}=1$

- وبالتالي $x^2+2=3x$

إذن : $x^2-3x+2=0$

- حساب المميز : $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$

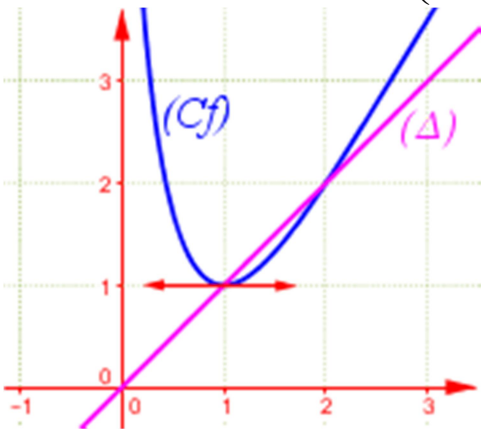
المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\frac{3-1}{2}=1$ ، $x_1=\frac{3+1}{2}=2$

01

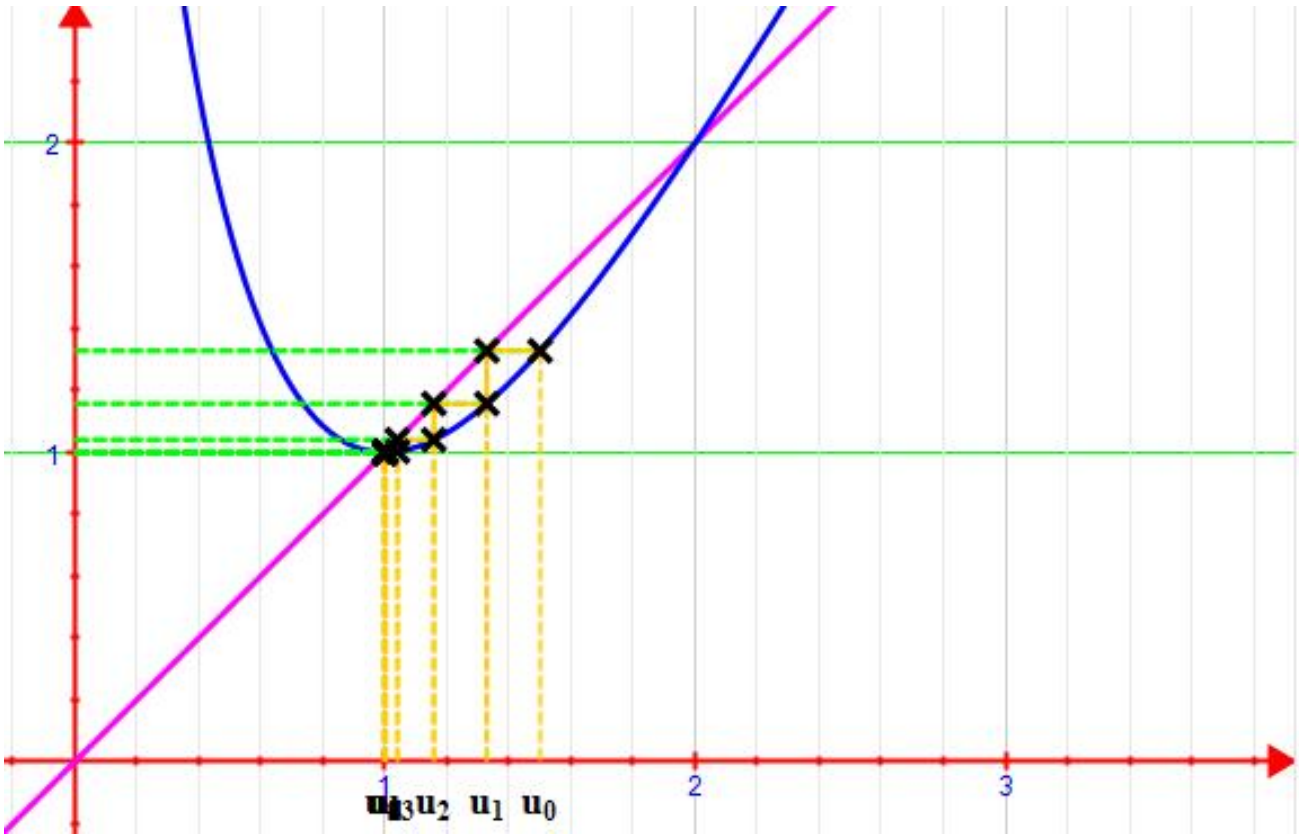
x	0		1		2		$+\infty$
$f(x)-y$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

5) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (Δ) و (C_f).

- حساب $f(4)$:

0.25 01	- $f(4)=4+3\ln\left(\frac{16+2}{3\times 4}\right)=4+3\ln\frac{18}{12}=5.22$ • الرسم : 
	II. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $u_0=\frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n، **$u_{n+1}=f(u_n)$.** **1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<2$.**
0.75	• **البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<2$:** - نسمي $P(n)$ هذه الخاصية . -1 من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{3}{2}$ إذن $1<u_0<2$ ومنه $P(0)$ صحيحة . -2 نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $1<u_n<2$. ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن $1<u_{n+1}<2$ لدينا : $1<u_n<2$ ومنه $f(1)<f(u_n)<f(2)$ لان الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;2[$ - ومنه $1<u_{n+1}<2$ لان $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(1)=1$ و $f(2)=2$ أي $P(n+1)$ صحيحة . - حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. **من أجل كل عدد طبيعي n، $1<u_n<2$.**
	2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ثم استنتج أنها متقاربة .
0.5	• **دراسة رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أي دراسة تغيرات المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** - **ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$** لدينا : $u_{n+1}-u_n=u_n+3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)-u_n=3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)$ - بما أن $u_n\in]1;2[$ فإن $3\ln\left(\frac{u_n^2+2}{3u_n}\right)<0$ من أجل $x\in]1;2[$ فإن $f(x)-x<0$ **(السؤال (4))**

وبالتالي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما .	
• استنتاج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة : - المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل بالعدد 1 و هي متناقصة تماما فهي متقاربة وتتقارب من العدد 1 .	0.5
3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.	
• تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$	0.25



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لمعسكر –ثانوية كريم العربي الهاشمي المحمدية –

اختبار بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: **تقني رياضي** — المدة: **4 ساعات ونصف** — ماي **2015**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

x و y عددان طبيعيان غير معدومين حيث: $x < y$.

S مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حيث: $p\gcd(x;y) = y - x$.

1. أ . احسب $p\gcd(363;484)$. تحقّق أنّ الثنائية $(363;484)$ تنتمي إلى المجموعة S .

ب . n عدد طبيعي غير معدوم. هل الثنائية $(n;n+1)$ تنتمي إلى المجموعة S ؟

2. أ .برهن أنّ الثنائية $(x;y)$ تكون من المجموعة S إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي غير معدوم k يحقق :

$x = k(y-x)$ و $y = (k+1)(y-x)$.

ب . استنتج أنّه من أجل كلّ ثنائية $(x;y)$ من S يكون $ppcm(x;y) = k(k+1)(y-x)$

3. أ . عيّن مجموعة قواسم العدد 228.

ب . استنتج مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من S التي تحقّق : $ppcm(x;y) = 228$.

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$(E)\ldots\ z^3 + (-8+i)z^2 + (25-8i)z + 25i = 0$$

1. أ .تحقّق أنّ $(-i)$ حل للمعادلة (E)، ثم عين العددين الحقيقيين a و b بحيث، من أجل كل عدد مركب z:

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (25-8i)z + 25i = (z+i)(z^2 + az + b)$$

ب . حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A ، B ، C و D هي صور الأعداد المركبة:

$z_A = 1$ ، $z_B = -i$ ، $z_C = 4+3i$ و $z_D = 4-3i$ على الترتيب.

أ . أحسب AC و AD وقيساً للزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD})$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD .

ب . أحسب z_F لاحقة النقطة F مرجح الجملة $\{(A;1);(D;1);(C;-1)\}$. ما طبيعة الرباعي $ACDF$؟

جـ . أكتب العدد $-3+3i$ على الشكل الأسي ، ثمّ أحسب $(-3+3i)^{2014}$.

3. من أجل كلّ نقطة M تختلف عن A ، لاحقتها z ، نرفق النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z' = \dfrac{-iz+4i-3}{z-1}$

أ . تحقّق أنّ : $z'+i = \dfrac{-3+3i}{z-1}$

ب بيّن أنّ : $AM \times BM' = 3\sqrt{2}$ و $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

جـ . عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي بحيث يكون: $z'+i=3e^{i\theta}$ لمّا يتغير θ في $\mathbb{R}$.

د . عيّن المجموعة (Γ') للنقط M' بحيث يكون: $arg(z-1)\equiv\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، حيث k عدد صحيح..

4. أ . النقطة D هي صورة النقطة E بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته -3. عين z_E لاحقة E.

ب . عين مركز وزاوية الدوران r الذي يحول E إلى B و يحول D إلى C.

جـ . ما طبيعة التحويل $h\circ r$؟ حدّد عناصره المميزة.

التمرين الثالث: (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط : $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ و $D(9;1;2)$ و المستقيم (Δ) الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=t+6 \\ y=-2t-\frac{1}{2} \\ z=t+2 \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

1. أ بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A وأنّ النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب بيّن أنّ المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC)، ثم أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

جـ . بين أنّ : $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$، استنتج أن D هي مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها.

د . استنتج مع التبرير طبيعة الرباعي $ABDC$ ، ثمّ أُحسب مساحته.

2. أ . عين احداثيي النقطة I ، نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC).

ب .تحقّق أنّ I هي مركزالر باعي $ABDC$.

جـ . عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من الفضاء بحيث:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. N نقطة متغيرة من (Δ) تختلف عن I.

أ . أُحسب بدلالة الوسيط t ، الحجم $v(t)$ ، للهرم $ABDCN$.

ب . عيّن احداثيتي النقطتين E و F من (Δ) حتى يكون: $v(t)=36\,u.v$ (يرمز $u.v$ إلى وحدة الحجوم).

جـ .استنتج أنّ المستوي (ABC) هو المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

I. g الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=10-8x+e^{x}$.

1. أُدرس اتجاه تغير الدالة g.

2. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\geq 18-24\ln 2$

II. f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{2x}{e^{x}+1}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$

1. أ . أُحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{9+e^x g(x)}{4(e^x+1)^2}$. (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

جـ . استنتج اتّجاه تغيّر الدّالة f وشكّل جدول تغيراتها.

2. أ . أثبت أنّ المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين أحدُهما (Δ) معادلته $y=\dfrac{1}{4}x$ عند $+\infty$ والآخر (Δ') معادلته $y=\dfrac{9}{4}x$ عند $-\infty$.

ب . أُدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ).

3. h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=1+e^x-xe^x$.

أ . أُدرس تغيرات الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب . بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0;+\infty[$، ثمّ تحقّق أنّ : $1,2<\alpha<1,3$.

جـ . استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

4. أ . بيّن أنّ المنحني (C) يقبل مماساً (T) موازياً للمستقيم (Δ) في النقطة التي فاصلتها α.

ب . بيّن أنّ : $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ وَ أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{9}{4}\alpha-2$

جـ . استنتج بدلالة α، معادلة للمماس (T) .

5. أ . مثّل (Δ) ، (Δ') ، (T) وَ (C).

(**نأخذ:** $f(\alpha)\approx 0,9$ ونقبل أنّ (Δ') تحت (C) في $]-\infty;0]$ و (Δ') فوق (C) في $[0;+\infty[$).

ب . ناقش بيانياً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $f(x)=\dfrac{1}{4}x+m$.

6. من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، نعتبر النقطة K من محور الفواصل فاصلتها x. المستقيم الموازي لمحور التراتيب والذي يشمل K يقطع المنحني (C) في النقطة M والمستقيم (Δ) في النقطة N ، نضع : $\varphi(x)=MN$.

أ . بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $\varphi(x)=\dfrac{2x}{e^x+1}$.

ب . عيّن فاصلة النقطة M حتى تكون المسافة MN عظمى.

جـ . نضع: $I=\int_{\alpha}^{2}\varphi(x)\,dx$. فسّر هندسياً التكامل I .

د . بيّن أنّ : $\dfrac{2\alpha(2-\alpha)}{e^2+1}\le I\le\dfrac{4(\alpha-1)(2-\alpha)}{\alpha}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على العدد 5 .

2) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد $\left(2017^{4n+3}-2\times 2016^{8n}+2014^{2n+1}\right)$ على العدد 5 حيث n عدد طبيعي.

3) بين أن العدد 131 أولي.

4) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $\begin{cases} 3m+7d=2^n-48 \\ ab=5m \end{cases}$

حيث $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

5) عين قيم n بحيث يكون $7\prec n\prec 15$ ، ثم استنتج الثنائيات $(a;b)$

التمرين الثاني: (5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط :

$A(2;1;0)$ ، $B(1;2;2)$ و $C(3;3;1)$ و $D(4;0;3)$ و $F(2;4;0)$.

1. أ . بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستوياً (ABC) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب .استنتج أنّ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x-y+z-1=0$.

2. (P) هو المستوي الذي معادلة ديكارتية له هي: $x+2y+z-7=0$ و (Q) المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

أ .بين أنّ (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AC]$.

ب . عين احداثيات النقطة E منتصف القطعة $[AB]$ ، ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

جـ .بين أنّ (P) وَ (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له بدلالة الوسيط الحقيقي t.

د .تحقق أنّ النقطة D تنتمي إلى (Δ).

3. أ . عيّن احداثيات النقطة I ، نقطة تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (Q) و (ABC).

ب .تحقق أنّ النقطة I هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

4. من أجل كلّ عدد حقيقي k نعرّف النقطتين G_k وَ H_k وَ المستوي (P_k) كما يلي:

G_k نقطة من المستقيم (Δ) حيث: $\overrightarrow{DG_k}=\frac{k}{2}\overrightarrow{DI}$.

(P_k) المستوي الذي يشمل النقطة G_k ويوازي المستوي (ABC) .

H_k نقطة تقاطع المستوي (P_k) وَ المستقيم (AF) .

أ .أحسب بدلالة k، احداثيات النقطة G_k ، ثمّ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P_k) .

ب . استنتج أن احداثيات النقطة H_k هي: $(2;3k-5;0)$.

5. أ. من أجل أيّ قيم للعدد k ، يكون المستقيم (G_kH_k) عمودياً على المستقيم (AF) ؟

ب . استنتج أصغر مسافة بين المستقيمين (Δ) و (AF).

التمرين الثالث: (4.50 نقاط)

ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1. نعتبر النقط A ، B ، C ، H و J لواحقها: $z_A=-3-i$ ، $z_B=-2+4i$ ، $z_C=3-i$ ، $z_H=-2$ وَ $z_J=i$ على الترتيب. مثّل هذه النقط .

2. (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $z-i=\sqrt{13}\,e^{i\theta}$ مع θ عدد حقيقي كيفي .

أ. بيّن أنّ النقط A ، B ، C تنتمي إلى (Γ) .

ب . ماهي طبيعة المجموعة (Γ) ؟ حدّد عناصرها المميزة .

3. أ. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$ ، ثم استنتج أنّ المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان

ب . جد z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

4. بين أنّ النقط G ، J وَ H على استقامة واحدة .

5. النقطتان L وَ K منتصفا القطعتين $[BC]$ و $[AH]$ على الترتيب .

. عين z_L وَ z_K لاحقتي النقطتين L وَ K ، ثمّ بيّن أنّ الرّباعي $KHLJ$ متوازي أضلاع .

6. t عدد حقيقي موجب. نعتبر النقطة G_t مرجّح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات t ، 2 و 2 على الترتيب.

أ برّر وجود النقطة G_t .

ب . عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{LG_t}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{LA}$.

جـ . حدّد مجموعة النقط G_t لما يمسح t مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

د . من أجل أيّ قيمة لـ t ، تكون النقطة G_t منتصف القطعة $[AL]$ ؟

التمرين الرابع: (6,5 نقاط)

I. g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$

1. ادرس اتّجاه تغيّر الدالة g .

2. استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ إشارة $g\left(1+\frac{2}{x}\right)$.

II. f الدالة العددية المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x-3+x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \text{ إذا كان } x>0 \quad \text{وَ} \quad f(0)=-3$$

وَ $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ . بيّن أنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -3$ ، ماذا تستنتج؟

ب . هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين ؟ أعط تفسيا هندسيا للنتيجة.

2. أ بيّن أنّ : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = 2$. (يمكن استعمال النتيجة: $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$).

ب . استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

جـ بين أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

3. أ . بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأنّ : $f'(x) = g\left(1+\frac{2}{x}\right)$. ($f'$ هي الدالة المشتقة للدالة f)

ب . استنتج اتّجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

جـ . بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ، ثم تحقّق أنّ : $1,6 < \alpha < 1,7$.

د . مثّل (Δ) و $(\mathcal{C}_f)$. (نقبل أنّ (Δ) فوق $(\mathcal{C}_f)$).

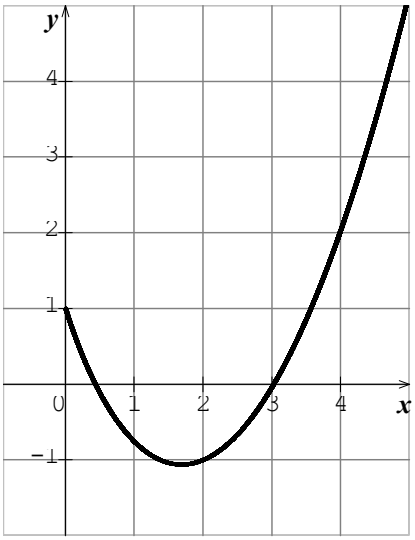
4. F الدّالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

وليكن (C_F) تمثيلها البياني في المستوي السابق.

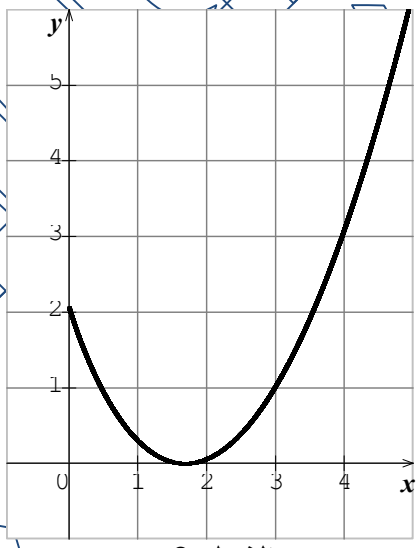
أ . أدرس اتّجاه تغيّر الدّالة F دون حساب عبارة $F(x)$.

ب . عيّن معادلة لـ (T) ، مماس المنحنى (C_F) في النقطة ذات الفاصلة α.

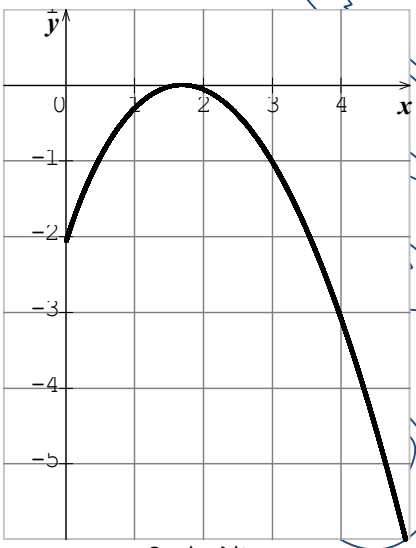
جـ . من بين المنحنيات الثلاثة التالية، عيّن المنحنى (C_F) مع التبرير .



الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3

- - - - بالتوفيق - - - -

رياضيات المستودعات

التصحيح النموذجي لبكالوريا تجريبي ماي 2015

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط)

x و y عددان طبيعيان غير معدومين حيث: $x<y$.

S مجموعة الثنائيات $(x;y)$ حيث: $p\gcd(x;y)=y-x$.

1. أ – احسب $p\gcd(363;484)$. تحقّق أنّ الثنائية $(363;484)$ تنتمي إلى المجموعة S . **0,75ن**

لدينا $p\gcd(363;484)=121$ و بما $484-363=121$ إذن $(363;484)\in S$

ب– n عدد طبيعي غير معدوم . هل الثنائية $(n;n+1)$ تنتمي إلى المجموعة S ؟

لدينا $1(n+1)-1\times n=1$ إذن يوجد عددان صحيحان u و v حيث $u(n+1)+v\times n=1$ وعليه فحسب مبرهنة بيزو $p\gcd(n;n+1)=1$.

ولدينا: $(n+1)-n=1$ إذن $p\gcd(n;n+1)=(n+1)-n$ وبالتالي $(n;n+1)\in S$. **0,5ن**

2. أ – برهن أن الثنائية $(x;y)$ تكون من المجموعة S إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي غير معدوم k يحقق :

$x=k(y-x)$ و $y=(k+1)(y-x)$.

• نفرض أنّ $(x;y)\in S$ معناه $\begin{cases} p\gcd(x;y)=y-x \\ 0<x<y \end{cases}$ ومعناه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين k و k' حيث:

$\begin{cases} x=k(y-x) \\ y=k'(y-x) \\ p\gcd(k;k')=1 \end{cases}$ مع $0<x<y$ ، ومنه $\begin{cases} y-x=k'(y-x)-k(y-x) \\ p\gcd(k;k')=1 \end{cases}$ وهذا يعني أنّ

$\begin{cases} y-x=(k'-k)(y-x) \\ p\gcd(k;k')=1 \end{cases}$ ويكافئ $\begin{cases} k'-k=1 \\ p\gcd(k;k')=1 \end{cases}$ أي: $k'=k+1$

وبالتالي إذا كان $(x;y)\in S$ فإنه يوجد عدد طبيعي غير معدوم k حيث: $\begin{cases} x=k(y-x) \\ y=(k+1)(y-x) \end{cases}$. **0,5ن**

• نفرض أنّه يوجد عدد طبيعي غير معدوم k يحقق: $x=k(y-x)$ و $y=(k+1)(y-x)$ ،

بما أنّ $p\gcd(k;k+1)=1$ فإنّ $p\gcd(x;y)=y-x$ ومنه $(x;y)\in S$. **0,5ن**

ب–استنتج أنّه من أجل كلّ ثنائية $(x;y)$ من S يكون $ppcm(x;y)=k(k+1)(y-x)$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

لدينا $xy=p\gcd(x;y)\times ppcm(x;y)$ وهذا يعني أنّ $ppcm(x;y)=\dfrac{xy}{p\gcd(x;y)}$

لتكن $(x;y)$ من المجموعة S إذن $p\gcd(x;y)=y-x$ ومنه $ppcm(x;y)=\dfrac{xy}{y-x}$

$(x;y)\in S$ معناه يوجد عدد طبيعي غير معدوم k يحقق: $x=k(y-x)$ و $y=(k+1)(y-x)$ ومنه

$ppcm(x;y)=\dfrac{k(y-x)\times(k+1)(y-x)}{y-x}$ أي $ppcm(x;y)=k(k+1)(y-x)$ $\boxed{0,5ن}$

3. أ – عيّن مجموعة قواسم العدد 228.

بالتحليل لدينا $228=2^2\times3\times19$ و باستعمال الشجرة نجد مجموعة قواسم العدد 228 و هي :

$D_{228}=\{1;2;3;4;6;12;19;38;57;76;114;228\}$. $\boxed{0,5ن}$

ب– استنتج مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من S التي تحقّق : $ppcm(x;y)=228$

لدينا $(x;y)\in S$ معناه $ppcm(x;y)=k(k+1)(y-x)$ و بالتالي تصبح المعادلة بالشكل

$k(k+1)(y-x)=228$ و بالمطابقة :

$228=1\times2\times114$ و منه $k=1$ و $y-x=114$ إذن $(x;y)=(114;228)$

$228=2\times3\times38$ و منه $k=2$ و $y-x=38$ إذن $(x;y)=(76;114)$ $\boxed{0,75ن}$

$228=3\times4\times19$ و منه $k=3$ و $y-x=19$ إذن $(x;y)=(57;76)$

خلاصة: $\boxed{(x;y)\in\{(114;228);(76;114);(57;76)\}}$

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$(E)\ldots\ldots z^3+(-8+i)z^2+(25-8i)z+25i=0$$

1. أ–تحقّق أنّ $(-i)$ حل للمعادلة (E)، ثم عين العددين الحقيقيين a و b .

بالتعويض نجد $(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(25-8i)(-i)+25i=i+8-i-25i-8+25i=0$

إذن $(-i)$ حل للمعادلة (E) و بالمطابقة نجد $a=-8$ و $b=+25$. $\boxed{0,5ن}$

ب– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) يعني $(z+i)(z^2-8z+25)=0$ و منه $z=-i$

او $z^2-8z+25=0$ أي $\Delta=64-100=-36=(6i)^2$ و منه $z'=4-3i$ و $z''=4+3i$. $\boxed{0,5ن}$

2. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقط A ، B ، C و D هي صور الأعداد المركبة:

$z_A=1$ ، $z_B=-i$ ، $z_C=4+3i$ و $z_D=4-3i$ على الترتيب.

أ – أُحسب AC و AD وقيساً للزاوية $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD})$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACD . $\boxed{0,5ن}$

لدينا $z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=4+3i-1=3+3i$ و منه $AC=3\sqrt{2}$

لدينا $z_{\overrightarrow{AD}}=z_D-z_A=4-3i-1=3-3i$ و منه $AD=3\sqrt{2}$

و لدينا $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD})=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(\dfrac{-6i}{-3-3i}\right)=\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$

و منه المثلث ACD قائم و متساوي الساقين .

ب– أُحسب z_F لاحقة النقطة F مرجح الجملة $\{(A;1);(D;1);(C;-1)\}$

لدينا $z_F=\frac{z_A+z_D-z_C}{1}=1+4-3i-4-3i=1-6i$. **0,25ن**

ما طبيعة الرباعي $ACDF$؟ لدينا: $z_F=z_A+z_D-z_C$ معناه $z_F-z_D=z_A-z_C$ أي: $z_{\overline{FD}}=z_{\overline{CA}}$

و منه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$ و منه $ACDF$ متوازي الأضلاع . **0,25ن**

جـ- أُكتب العدد $-3+3i$ على الشكل المثلثي: $-3+3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ **0,25ن**

حساب $(-3+3i)^{2014}$:

$$(-3+3i)^{2014}=\left(3\sqrt{2}\right)^{2014}\left(\cos\frac{2014\times3\pi}{4}+i\sin\frac{2014\times3\pi}{4}\right)$$

أي: $(-3+3i)^{2014}=\left(3\sqrt{2}\right)^{2014}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^{2014}i$ **0,25ن**

3. من أجل كلّ نقطة M تختلف عن A ، لاحقتها z ، نرفق النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\frac{-iz+4i-3}{z-1}$

أ -تحقّق أنّ : $z'+i=\frac{-3+3i}{z-1}$

$$z'+i=\frac{-iz+4i-3}{z-1}+i\frac{z-1}{z-1}=\frac{-3+3i}{z-1}$$ **0,25ن**

ب-بيّن أنّ : $MA\times M'B=3\sqrt{2}$. لدينا $z'+i=\frac{-3+3i}{z-1}$ **0,25ن**

أي $(z'+i)(z-1)=-3+3i$ و منه $|z'+i|\times|z-1|=|-3+3i|=3\sqrt{2}$ و منه $MA\times M'B=3\sqrt{2}$.

بين أن: $(\vec{u};\overrightarrow{AM})+(\vec{u};\overrightarrow{BM'})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$. **0,25ن**

لدينا $(z'+i)(z-1)=-3+3i$ و منه $\arg[(z'+i)(z-1)]=\arg(-3+3i)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

و منه $\arg(z-1)+\arg(z'+i)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ أي: $(\vec{u};\overrightarrow{AM})+(\vec{u};\overrightarrow{BM'})=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

جـ - عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي بحيث يكون: $z'+i=3e^{i\theta}$ لمّا يتغير θ في $\mathbb{R}$.

لدينا: $z'+i=3e^{i\theta}$ ومنه $|z'+i|=3$ أي $BM'=3$ و منه $AM=\sqrt{2}$

إذن (Γ) دائرة مركزها A و نصف قطرها $\sqrt{2}$. **0,25ن**

د - عيّن المجموعة (Γ') للنقط M' بحيث يكون: $\arg(z-1)=\frac{\pi}{4}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،

لدينا $\arg(z-1)+\arg(z'+i)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ و منه $\frac{\pi}{4}+k\pi+\arg(z'+i)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

$(\vec{u};\overrightarrow{BM'})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و منه (Γ') هي المستقيم الذي يشمل B و شعاع توجيهه $\vec{v}$ باستثناء B . **0,25ن**

4. أ - النقطة D هي صورة النقطة E بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته -3. عين z_E لاحقة E.

لدينا $h(E)=D$ معناه $z_D-z_A=-3(z_E-z_A)$ و معناه $4-3i-1=-3(z_E-1)$

أي: $\boxed{z_E = i}$. **0,25ن**

ب – عين مركز وزاوية الدوران r الذي يحول E إلى B و يحول D إلى C .

لدينا $r(E)=B$ و $r(D)=C$. نعلم أن: $a=\dfrac{z_B-z_C}{z_E-z_D}=\dfrac{-i-4-3i}{i-4+3i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

و $b=z_B-az_E=z_B-iz_E$ أي: $\boxed{b=1-i}$

و منه $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}=\dfrac{1-i}{1-i}=1=z_A$ و منه الدوران r مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$. **0,25ن** + **0,25ن**

جـ – ما طبيعة التحويل $h\circ r$ ؟

هو مركب تحاكي و دوران فهو تشابه مباشر مركزه A و نسبته 3 و زاويته $\dfrac{\pi}{2}+\pi=\dfrac{3\pi}{2}$. **0,25ن**

التمرين الثالث: (4,5 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(3;-2;2)$ ، $B(6;1;5)$ ، $C(6;-2;-1)$ و $D(9;1;2)$ و المستقيم (Δ) الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases} x=t+6 \\ y=-2t-\dfrac{1}{2} \\ z=t+2 \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

1. أ –بيّن أنّ المثلث ABC قائم في A وأنّ النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC). **0,25ن** + **0,25ن**

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ و $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3\times3+0+3(-3)=0$ إذن المثلث ABC قائم في A .

لدينا $\overrightarrow{AD}(6;3;0)$ نبحث عن α و β من $\mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ و منه $\begin{cases} 3\alpha+3\beta=6 \\ 3\alpha=3 \\ 3\alpha-3\beta=0 \end{cases}$

و منه $\alpha=1$ و $\beta=1$ و منه الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي إذن $D\in(ABC)$.

ب –بيّن أنّ المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC)، ثم أُكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

$\vec{u}(1;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) نحسب الجداءان

$\vec{u}.\overrightarrow{AB}=1\times3-2\times3+1\times3=0$ و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=1\times3-2\times0+1\times(-3)=0$ **0,5ن**

إذن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ABC) ، و منه $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ،

و بالتالي تكون معادلة (ABC) من الشكل $x-2y+z+d=0$

و لدينا $A\in(ABC)$ يكون $3-2(-2)+2+d=0$ أي $d=-9$

و تكون المعادلةالديكارتية للمستوي (ABC) هي: $\boxed{x-2y+z-9=0}$. **0,25ن**

جـ – بين أنّ: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$. لدينا $\begin{pmatrix} -3-3+6 \\ -3+0+3 \\ -3+3-0 \end{pmatrix}$ $(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})$

أي: $\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ أي: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ **0,25ن**

اذن D مرجح للنقط A ، B و C مرفقة بالمعاملات -1، 1 و 1 .

د – استنتج مع التبرير طبيعة الرباعي $ABDC$

لدينا: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ معناه $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}$

و منه $ABDC$ متوازي الأضلاع و لدينا ABC المثلث قائم في A إذن $ABDC$ مستطيل **0,5ن**

مساحته $S=AB\times AC=3\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}=9\sqrt{6}ua$. **0,25ن**

2. أ – عين احداثيي النقطة I ، نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC).

بالتعويض نجد $t+6-2\left(-2t-\frac{1}{2}\right)+t+2-9=6t=0$ و منه $t=0$ إذن $I\left(6;-\frac{1}{2};2\right)$. **0,25ن**

ب –تحقّق أنّ I هي مركز الرباعي $ABDC$.

$\frac{x_A+x_D}{2}=6$ و $\frac{y_A+y_D}{2}=-\frac{1}{2}$ و $\frac{z_A+z_D}{2}=2$ إذن I مركز المستطيل $ABDC$. **0,25ن**

جـ – عين المجموعة (Γ) للنقط M من الفضاء بحيث:

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

لدينا I مركز المستطيل $ABDC$ معناه $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}\right\|$.

لدينا D مرجح الجملة $\{(A;-1);(B;1);(C;1)\}$ معناه $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

و منه المجموعة (Γ) تحقق $MD=MI$ أي (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[DI]$. **0,5ن**

3. N نقطة متغيرة من (Δ) تختلف عن I.

أ – أُحسب بدلالة الوسيط t ، الحجم $v(t)$ ، للهرم $ABDCN$.

لدينا $N\left(t+6;-2t-\frac{1}{2};t+2\right)$ و منه $\overrightarrow{NI}(t;-2t;t)$ أي $NI=\sqrt{t^2+(-2t)^2+t^2}=|t|\sqrt{6}$

و عليه $v(t)=\frac{1}{3}S_{ABCD}NI=\frac{1}{3}9\sqrt{6}|t|\sqrt{6}$ أي $v(t)=18|t|u.v$ **0,5ن**

ب– عيّن احداثيتي النقطتين E و F من (Δ) حتى يكون: $v(t)=36u.v$ **0,25ن** + **0,25ن**

لدينا $v(t)=18|t|=36$ و منه $|t|=2$ أي $t=2$ أو $t=-2$ و يكون $\boxed{E\left(8;-\frac{9}{2};4\right)}$ و $\boxed{F\left(4;\frac{7}{2};0\right)}$

جـ–استنتج أنّ المستوي (ABC) هو المستوي المحوري للقطعة $[EF]$. **0,25ن**

بما أن E و F من (Δ) العمودي على (ABC) في I ، و I منتصف $[EF]$ إذن (ABC) هو المستوي المحوري للقطعة $[EF]$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

رياضيات المستودعات

I. g الدّالة المعرّفة $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=10-8x+e^x$.

1. أُدرس اتجاه تغير الدالة g . **0,5ن**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{10}{x}-8+\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$

و $g'(x)=-8+e^x$ ومنه $g'(x)=0$ يعني $x=\ln 8$

ومنه $g(\ln 8)=10-8\ln 8+e^{\ln 8}=18-24\ln 2$

x	$-\infty$		$3\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$18-24\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)\geq 18-24\ln 2$

حسب جدول التغيرات **0,25ن** $g(x)\geq 18-24\ln 2=1,36>0$

II. f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{2x}{e^x+1}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$

1. أ – أُحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. **0,25ن** + **0,25ن**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x+\frac{2x}{e^x+1}\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}x+\frac{2x}{e^x+1}\right)=+\infty$.

ب–بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x)=\frac{9+e^x g(x)}{4(e^x+1)^2}$. (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

$$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{2(e^x+1)-2xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1+8e^x+8-8xe^x}{4(e^x+1)^2}$$ و

$f'(x)=\frac{9+10e^x-8xe^x+e^{2x}}{4(e^x+1)^2}$ و منه $f'(x)=\frac{9+e^x g(x)}{4(e^x+1)^2}$. **0,5ن**

جـ– استنتج اتّجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

لدينا $g(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و منه $f'(x)>0$

لأنه مجموع و جداء أعداد موجبة .

اذن الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. **0,25ن**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. أ–أثبت أنّ المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{4}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+1}=0$ إذن (Δ) مستقيم مقارب عند $+\infty$ **0,25ن**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{9}{4}x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2xe^x}{e^x+1}=0$ إذن (Δ') مستقيم مقارب عند $-\infty$. **0,25ن**

ب– ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ). **0,25ن**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-\frac{x}{4}$		$-$	0	$+$	

$f(x)-\frac{1}{4}x=\frac{2x}{e^x+1}$ إشارتها هي x و يكون لدينا :

الوضعية	تحت	فوق

3. h الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=1+e^x-xe^x$.

أ – أُدرس تغيرات الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها **0,25ن**

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^x(1-x)\right)=-\infty$

و $h'(x)=e^x-xe^x-e^x=-xe^x$ إشارة $h'(x)$ هي $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

ب – بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0;+\infty[$،

الدالة مستمرة و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في المجال

$]-\infty;2]$ يشمل القيمة 0 ، حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة

$h(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0;+\infty[$

لدينا $h(1,2)\times h(1,3)=0,33\times(-0,1)=-0,33<0$ و منه $1,2<\alpha<1,3$. **0,75ن**

جـ – استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x. **0,25ن**

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة $h(x)$		$+$	0	$-$	

4. أ –بيّن أنّ : $f'(x)=\frac{1}{4}$ تكافئ $h(x)=0$. **0,5ن**

$f'(x)=\frac{1}{4}$ و معناه $\frac{9+10e^x-8xe^x+e^{2x}}{4(e^x+1)^2}=\frac{1}{4}$ ومعناه

$9+10e^x-8xe^x+e^{2x}=e^{2x}+2e^x+1$ و معناه $8(1+e^x-xe^x)=0$ و معناه $h(x)=0$.

ب–بيّن أنّ : $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$ **0,25ن**

لدينا : $h(\alpha)=0$ و معناه $1+e^\alpha-\alpha e^\alpha=0$ و معناه $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$.

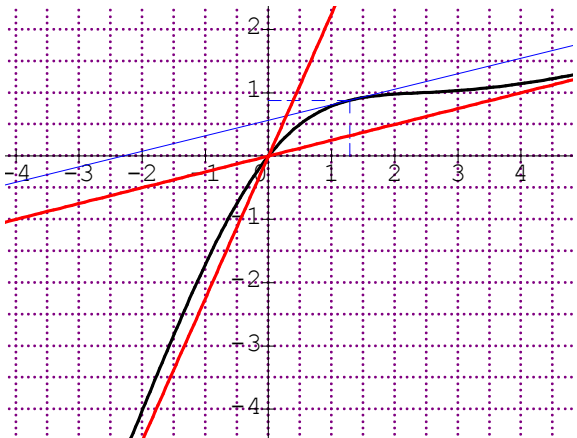
بالتعويض $f(\alpha)=\frac{1}{4}\alpha+\frac{2\alpha}{e^\alpha+1}$ وَ معناه **0,25ن** $\boxed{f(\alpha)=\frac{9}{4}\alpha-2}$

جـ – استنتج بدلالة α ، معادلة للمماس T للمنحني (C) الموازي للمستقيم (Δ).

T يوازي (Δ) معناه $f'(x)=\frac{1}{4}$ و هذا يكافئ $h(x)=0$ و معناه $x=\alpha$

و منه تكون المعادلة: $y=\frac{1}{4}(x-\alpha)+f(\alpha)$ أي: $\boxed{y=\frac{1}{4}x+2\alpha-2}$. **0,25ن**

5. أ – مثّل (Δ)، (Δ')، T وَ (C). **0,75ن**



ب – ناقش بيانياً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد **0,75ن**

وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x: $f(x)=\frac{1}{4}x+m$.

. إذا كان $m\in]-\infty;0]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا ،

. إذا كان $m \in]0;2\alpha-2[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين تماما ،

. إذا كان $m = 2\alpha-2$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا تماما هو α ،

. إذا كان $m \in]2\alpha-2;+\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلا .

6. من أجل x من $]0;+\infty[$ ، نعتبر النقطة K من محور الفواصل فاصلتها x ، المستقيم الموازي لمحور التراتيب والذي يشمل K يقطع المنحني (C) في النقطة M والمستقيم (Δ) في النقطة N ، نضع : $\varphi(x) = MN$.

أ- بيّن أنّه من أجل x من $]0;+\infty[$: $\varphi(x) = \dfrac{2x}{e^x+1}$.

لدينا $K(x;0)$ ، $M(x;f(x))$ و $N\left(x;\dfrac{x}{4}\right)$

و منه $\varphi(x) = MN = \sqrt{\left(\dfrac{2x}{e^x+1}\right)^2} = \dfrac{2x}{e^x+1}$ لأنّ $x \in]0;+\infty[$ **0,25ن**

ب- عيّن فاصلة النقطة M حتى تكون المسافة MN عظمى،

تكون المسافة MN عظمى عندما تكون $M \in (T)$ و تكون فاصلتها هي α . **0,25ن**

جـ- نضع: $I = \int_{\alpha}^{2} \varphi(x)\,dx$. فسّر هندسياً التكامل I ،

I هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما:

$x = \alpha$ وَ $x = 2$. **0,25ن**

. بيّن أنّ : $\dfrac{2\alpha(2-\alpha)}{e^2+1} < I < 4\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{\alpha}$. **0,25ن**

لدينا: $\alpha < x < 2$ و منه $2\alpha < 2x < 4$ و من جهة أخرى $e^{\alpha} < e^x < e^2$ و منه $e^{\alpha}+1 < e^x+1 < e^2+1$

أي: $\dfrac{1}{\alpha-1}+1 < e^x+1 < e^2+1$ و منه $\dfrac{1}{e^2+1} < \dfrac{1}{e^x+1} < \dfrac{\alpha-1}{\alpha}$

و بالتالي: $\dfrac{2\alpha}{e^2+1} < \varphi(x) < 4\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ و عليه $\dfrac{2\alpha}{e^2+1}(2-\alpha) < \int_{\alpha}^{2}\varphi(x)\,dx < 4\dfrac{\alpha-1}{\alpha}(2-\alpha)$

أي: $\boxed{\dfrac{2\alpha(2-\alpha)}{e^2+1} < I < 4\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{\alpha}}$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لمعسكر – ثانوية 500 مسكن–المحمدية

الشعبة: **تقني رياضي** — **نموذج بكالوريا 2015** — دورة: **ماي 2015**

اختبار في مادة : **الرياضيات** — الأستاذ : بلفاطمي محمد — المدة: **4 ساعات ونصف**

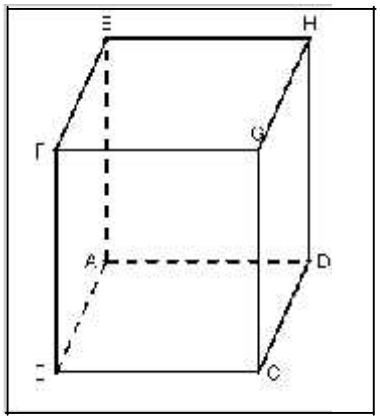
على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ المكعب $ABCDEFGH$ و طول حرفه 1 .

نرمز بـ I و J و K إلى منتصفات القطع $[BC]$ و $[BF]$ و $[HF]$ على الترتيب .



1) عين إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، I ، J ، K .

2) أ– تحقق أن الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ عمودي على المستوي (IJK).

ب– تحقق أن $4x+2y+2z-5=0$ هي معادلة للمستوي (IJK) .

3) أ– أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CD) .

ب– أدرس الوضع النسبي للمستقيم (CD) و المستوي (IJK) .

4) أ– عين تمثيل وسيطي لـ (Δ) الذي يشمل G و يعامد المستوي (IJK).

ب– بين (CD) و (Δ) لا يقعان في نفس المستوي .

5) لتكن (S) سطح الكرة ذات المركز G و التي تشمل النقطة F .

أ– أحسب المسافة بين النقطة G و المستوي (IJK). ب– اوجد المعادلة الديكارتية لـ (S) .

جـ– بين المستوي (IJK) يقطع سطح الكرة (S) و فق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ω و طول نصف قطرها r .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث : $P(z)=z^3+(2-i)z^2+(4-2i)z-4i$.

أ– أحسب $P(i)$ و ماذا تستنتج .

ب– عيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-i)(z^2+\alpha z+\beta)$

جـ – حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ مع كتابة الحلول على الشكل الأسي .

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب $Z_A=i$ و $Z_B=-1-\sqrt{3}i$. S التشابه المباشر في المستوي الذي مركزه O و الذي يحول A إلى B.

أ– أكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين نسبته وزاويته.

ب– نعتبر متتالية النقط (A_n) المعرفة بـ : $A_0=A$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $A_{n+1}=S(A_n)$.

و نرمز بـ Z_n إلى لاحقة النقطة A_n .

- عين لاحقتي النقطتين A_1 و A_2 .
- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $Z_n=2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$.

3) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $12x-5y=3$ .....(*).

أ – حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (*) . لاحظ أن الثنائية $(4;9)$ حل للمعادلة (*).

ب – استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث تكون النقط A_n تنتمي إلى المحور الحقيقي الموجب.

4) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، العدد $\frac{Z_{n+3}}{Z_n}$ تخيلي صرف ، استنتج طبيعة المثلثات OA_nA_{n+3}.

5) عيّن بدلالة n قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)$ ثم استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث تكون النقط O، A_n و A_{2n} في استقامية.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x-5y=2$.

أ- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$. ب- استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$.

أ- عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

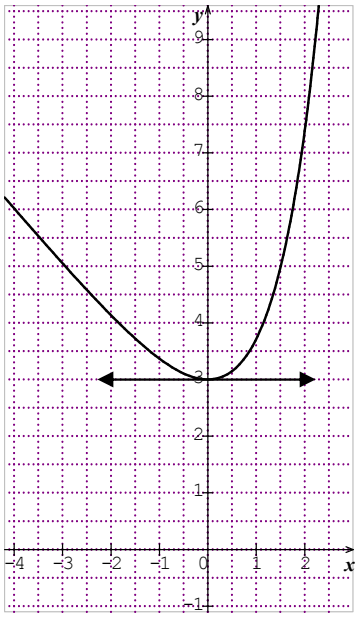
ب- عين قيم n بحيث يكون $PGCD\,(a;b)=2$. جـ - استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما .

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$.

أ- بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B . ب- استنتج ، حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

المستوي المنسوب إلي معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



جزء 1 : لتكن الدالة g المعرفة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=ae^x+b-x$ حيث a و b عددان حقيقيان .

الشكل المقابل هو التمثيل البياني لـ (C_g) ممثل للدالة g و (Δ) المماس عند النقطة ذات فاصلة 0 .

بقراءة بيانية :

1) عين نهايتين الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$. 2) عين $g(0)$ و $g'(0)$.

3) عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيرات . 4) عين إشارة الدالة g .

5) عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

6)أ- باستعمال معطيات سابقة بين أن : $g(x)=e^x+2-x$.

ب- احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف .

جـ- عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيرات .

جزء 2 : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني .

1) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{-x}g(x)$. 2) أدرس التغيرات الدالة f .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α حيث : $0\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$.

4) أ- أثبت أن المستقيم (Δ) ذى المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها .

ب- تحقق أن : $(e^3-1)x-e^3y+5=0$ هي معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة A .

6) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

7) (u_n) المتتالية المعرفة كمايلي $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- باستخدام (C_f) و المستقيم (Δ) مثل حدود u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل .

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\prec 1$.

جـ- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما . د- ماذا تستنتج ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4,5 نقاط)

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) ذات المجهول $(x;y)$: $4x-9y=5$ ..... (E) .

أ- بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 8[9]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

ب- α عدد طبيعي يكتب $\overline{43}$ في نظام التعداد الذي أساسه x و يكتب $\overline{98}$ في نظام التعداد الذي أساسه y حيث $x\le 35$ و $y\le 15$.

- عين القيم الممكنة لـ x و y ثم اُكتب α في النظام العشري.

2) أ- اُدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 4^n على 9.

ب- عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ حلول المعادلة (E) حيث يكون: $2011^x+4^y+7\equiv 0[9]$.

3) نعتبر العددان الطبيعيان a و b حيث: $a=9n+8$ و $b=4n+3$ وليكن d قاسمهما المشترك الأكبر.

أ- ما هي القيم الممكنة لـ d . ب - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $d=5$.

4) من أجل كلّ عدد طبيعي n ، نضع: $A=9n^2+17n+8$ و $B=4n^2+7n+3$.

أ-بيّن أنّ العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب- استنتج ، حسب قيم n ، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

جزء 1 : $P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$ حيث z عدد مركب.

أ) أحسب $P(2)$ ثم عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-2)(z^2+\alpha z+\beta)$.

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ مع كتابة الحلول على الشكل الآسي .

جزء 2 : في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الطول $5cm$) .

ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{1+i}{2}z$

1) بين أن S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره مميزة .

2) نسمي A_0 النقطة لاحقتها $z_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_{n+1}=S(A_n)$ ، مع النقطة A_n صورة العدد المركب z_n .

أ- أحسب : z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 ثم علم النقط : A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 .

ب- من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=OA_n$ ، أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول ، ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3) ابتداء من أي رتبة n_0 تنتمي كل نقط A_{n_0} إلي القرص الذي مركزه O و نصف قطره 0.1 . 4) هل (u_n) متقاربة ؟ لماذا ؟

5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث : OA_nA_{n+1}.

6) لتكن (v_n) المتتالية معرفة علي $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=OA_0+OA_1+....+OA_n$ عبر عن v_n بدلالة n ثم اوجد $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ فسر النتيجة.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(-1;1;2)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;2;-5)$ ، $D(-4;5;5)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x+y-z+1=0$.

1) أ -بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا (ABC).

ب–تحقّق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثمّ عين معادلة ديكارتية له.

2) أ–بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

ب–بيّن أنّ تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) المعرّف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = t-1 \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}$ حيث t وسيط حقيقي

ج – احسب المسافة بين D والمستوي (P) والمسافة بين D والمستوي (ABC) ثمّ استنتج المسافة بين D و المستقيم (Δ)

3) أ– اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P_1) الذي يشمل النقطة D **و** العمودي على كل من المستويين (P) و (ABC).

ب–بيّن أنّ المستويات الثلاث (P_1) ، (P) و (ABC) تتقاطع في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.

جـ– استنتج مرة أخرى المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ).

د– اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها D و تمس المستقيم (Δ).

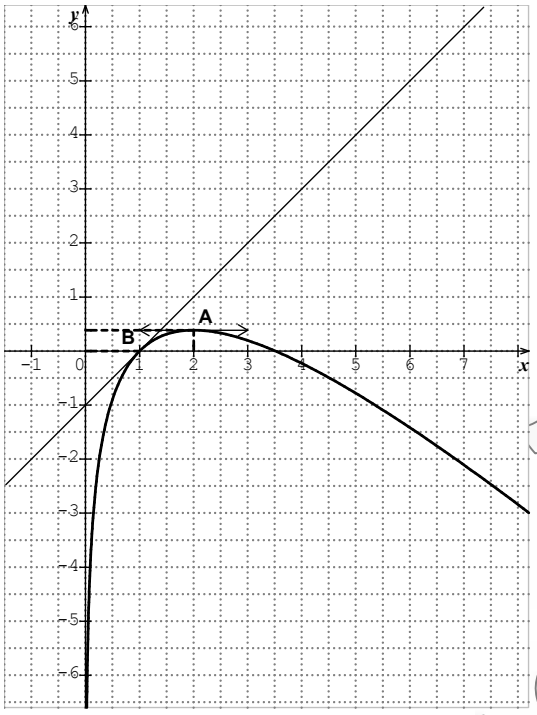
التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

المستوي المنسوب إلي معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

جزء 1 : لتكن الدالة g المعرفة $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = ax + b + c\ln x$

حيث a و b و c أعدد حقيقية .

الشكل المقابل هو التمثيل البياني لـ (C_g) ممثل للدالة g و (Δ) المماس عند النقطة B ذات فاصلة 1 و مماس عند A يوازي محور فواصل .



بقراءة بيانية :

1) عين فاصلة النقطة A و احدثيات النقطة B .

2) عين نهايتين للدالة g عند 0 و $+\infty$. 3) عين $g'(2)$ و بين أن $g'(1) = 1$.

3) عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيرات . 4) عين معادلة (Δ) .

5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين احدهما α حيث $3 \prec \alpha \prec 4$ مع التعليل .

6) عين إشارة الدالة g حسب قيم x . 7) احسب $g'(x)$ بدلالة a و c .

8) أ– باستعمال معطيات سابقة بين أن : $g(x) = -x + 1 + 2\ln x$.

ب– احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف .

جـ– عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيرات .

9) نعتبر الدالة h المعرفة علي المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = [g(x)]^2$.

أ– أحسب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة h' . ب– ادرس تغيرات الدالة h.

جزء 2 : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2x\ln x$ و $f(0) = 0$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) أ– احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ب– $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول التغيرات .

3) أ– تحقق أن $f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^2 + 2\alpha$ ثم اوجد حصرا لـ $f(\alpha)$. ب– ارسم المنحنى (C_f) في المجال $[0;5]$ نأخذ $\alpha = 3.5$.

جـ – ناقش بيانيا حسب قيم m حلول المعادلة : $x^2 + 2x = 4x\ln(x) + 2\ln(m)$ علي المجال $[0;5]$.

ثانوية كريم العربي الهاشمي – المحمدية -
تصحيح نموذج بكالوريا 2015 المادة : الرياضيات

الشـــــــعبة : تقني رياضي
السنة الدراسية: 2014/ 2015
إعداد الأســـتاذ: بلفاطمي محمد
المـــوضـوع : الأول

التمرين الأول :

1) تعيين احدثيات النقط : $A(0;0;0)$ ، $B(1;0;0)$ ، $C(1;1;0)$ ، $D(0;1;0)$ ، $E(0;0;1)$ ، $F(1;0;1)$ ، $G(1;1;1)$ ، $H(0;1;1)$ ، $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ ، $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$ ، $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

2) أ- تحقق أن $\vec{n}(2;1;1)$ عمودي على المستوي (IJK) .

$\overrightarrow{IJ}\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ، $\overrightarrow{Ik}\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$ و $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{Ik}=(2)\left(-\frac{1}{2}\right)+(1)(0)+(1)(1)=-1+1=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{IJ}=(2)(0)+(1)\left(-\frac{1}{2}\right)+(1)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{Ik}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{IJ}\end{cases}$.

ب) تحقق أن : $4x+2y+2z-5=0$ معادلة للمستوي (IJK).

$4x_I+2y_I+2z_I-5=4(1)+2\left(\frac{1}{2}\right)+2(0)-5=5-5=0$ و منه $I\in(IJK)$.

$4x_J+2y_J+2z_J-5=4(1)+2(0)+2\left(\frac{1}{2}\right)-5=5-5=0$ و منه $J\in(IJK)$.

$4x_K+2y_K+2z_K-5=4\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}\right)+2(1)-5=5-5=0$ و منه $K\in(IJK)$.

3) أ- تمثيل وسيطي للمستقيم (CD) : لدينا $\overrightarrow{CD}(-1;0;0)$.

حالة 1 : إذا أخذنا $\overrightarrow{CD}(-1;0;0)$ و C نجد : $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-t+1\\ y=1\\ z=0\end{cases}$

حالة 2 : إذا أخذنا $\overrightarrow{CD}(-1;0;0)$ و D نجد : $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-t\\ y=1\\ z=0\end{cases}$ باقي حل سوف استعمل هذا تمثيل .

ب- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (CD) و المستوي (IJK) .

$\begin{cases}x=-t\\ y=1\\ z=0\\ 4x+2y+2z-5=0\end{cases}$ و منه $4(-t)+2(1)+2(0)-5=0$ و منه $-4t-3=0$ نجد $t=-\frac{3}{4}$

إذن : $(IJK)\cap(CD)=\left\{\left(\frac{3}{4};1:0\right)\right\}$.

4) أ- عين تمثيل وسيطي لـ (Δ) الذي يشمل G و يعامد المستوي (IJK).

$\left\{\vec{n}(2;1;1) \quad ;G(1;1;1)\right\}$ (Δ) إذن : $\alpha \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = 2\alpha+1 \\ y = \alpha+1 \\ z = \alpha+1 \end{cases}$.

ب- إثبات أن (CD) و (Δ) لا يقعان في نفس المستوي .

$\overrightarrow{CD}(-1;0;0)$ و $\vec{n}(2;1;1)$ غير مرتبطان خطيا فأن مستقيمان (CD) و (Δ) غير متوزيان .

$\begin{cases} -t = 2\alpha+1 \\ 1 = \alpha+1 \\ 0 = \alpha+1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = -1 \end{cases}$ و هذا تناقض و منه ليس من نفس المستوي .

5) أ- حساب المسافة بين النقطة G و المستوي (IJK).

$d = d\left[G;(IJK)\right] = \dfrac{|4x_G + 2y_G + 2z_G - 5|}{\sqrt{16+4+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{24}}{8}$.

ب- إيجاد المعادلة الديكارتية لـ (S).

نصف قطرها $FG = 1$ و مركزها $G(1;1;1)$ و منه : $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

جـ- إثبات أن المستوي (IJK) يقطع سطح الكرة (S).

لدينا : $d = d\left[G;(IJK)\right] = \dfrac{\sqrt{24}}{8} \prec R = FG = 1$ اذن تقاطع هو دائرة (C) نصف قطرها r حيث :

$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{1 - \dfrac{3}{8}} = \sqrt{\dfrac{5}{8}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

مركزها ω حيث : $(IJK) \cap (\Delta) = \{\omega\}$

$\begin{cases} x = 2\alpha+1 \\ y = \alpha+1 \\ z = \alpha+1 \\ 4x + 2y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ و منه $4(2\alpha+1) + 2(\alpha+1) + 2(\alpha+1) - 5 = 0$ و منه $8\alpha + 4 + 2\alpha + 2 + 2\alpha + 2 - 5 = 0$

ومنه : $12\alpha + 3 = 0$ إذن نجد $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ بتعويض نجد $\omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

التمرين الثاني :

1) أ- $P(i) = (i)^3 + (2-i)(i)^2 + (4-2i)(i) - 4i = -i - 2 + i + 4i + 2 - 4i = 0$ و منه $z_0 = i$ جذر لـ $P(z)$.

ب- تعين α و β :

	1	$2-i$	$4-2i$	$-4i$
i	0	i	$2i$	$4i$
	1	2	4	0

ومنه : $P(z) = (z-i)(z^2 + 2z + 4)$.

جـ- حل المعادلة $P(z) = 0$.

$P(z) = 0$ يكافئ $(z-i)(z^2+2z+4) = 0$ ومنه $z - i = 0$ أو $z^2 + 2z + 4 = 0$.

$z - i = 0$ معناه $z_0 = i = 1e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z^2 + 2z + 4 = 0$ و منه $\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = \left(2i\sqrt{3}\right)^2$

و منه $z_1 = \dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و $z_2 = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2) أ –كتابة العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه O و الذي بحول A إلي B .

عبارة العامة لتشابه هي $z'=az+b$ و بما أن مبدأ هو مركز فإن $z_O=az_O+b$ و منه $0=0+b$ إذن $b=0$ إذن $z'=az$.

نحسب العدد المركب a .

طريقة 1 : مباشرة $a=\frac{z_B-z_O}{z_A-z_O}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{i}\times\frac{-i}{-i}=-\sqrt{3}+i$.

طريقة 2 : تحويل الذي بحول A إلي B معناه $B=S(A)$ و منه $z_B=az_A$ و منه $a=\frac{z_B}{z_A}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{i}\times\frac{-i}{-i}=-\sqrt{3}+i$.

إذن : $z'=\left(-\sqrt{3}+i\right)z$.

ب– لدينا $A=A_0$ معناه $z_0=i$ ، و $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $z_{n+1}=\left(-\sqrt{3}+i\right)z_n$.

تعين لاحقتين A_1 و A_2 .

$$z_1=\left(-\sqrt{3}+i\right)z_0=\left(-\sqrt{3}+i\right)(i)=-1-i\sqrt{3}$$

و $$z_2=\left(-\sqrt{3}+i\right)z_1=\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}+3i-i+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+2i$$

إثبات أن $z_n=2^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$.

هناك عدة طرائق لحل :

طريقة 1 : باستعمال تركيب تحويلات : $A_n=S(A_{n-1})$ و $A_{n-1}=S(A_{n-2})$ و $A_{n-2}=S(A_{n-3})$ ..... $A_1=S(A_0)$

$$z_n=\left(-\sqrt{3}+i\right)^1 z_{n-1}=\left(-\sqrt{3}+i\right)^1\left[\left(-\sqrt{3}+i\right)^1 z_{n-2}\right]=\left(-\sqrt{3}+i\right)^2 z_{n-2}=\left(-\sqrt{3}+i\right)^2\left[\left(-\sqrt{3}+i\right)^1 z_{n-3}\right]$$

$$z_n=\left(-\sqrt{3}+i\right)^3 z_{n-3}=\left(-\sqrt{3}+i\right)^3\left[\left(-\sqrt{3}+i\right)^1 z_{n-4}\right]=\left(-\sqrt{3}+i\right)^4 z_{n-4}=.....=\left(-\sqrt{3}+i\right)^n z_{n-n}=\left(-\sqrt{3}+i\right)^n z_0$$

$$z_n=\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^n.\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=2^n e^{i\frac{5\pi n}{6}}e^{i\frac{\pi}{2}}=2^n e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

طريقة 2 :

3) أ– نلاحظ أن : $12(4)-5(9)=48-45=3$ إذن : $(4;9)$ حلا للمعادلة (*) .

$$\begin{cases}12x-5y=3\\12(4)-5(9)=3\end{cases}$$
$$12(x-4)-5(y-9)=0$$

و منه $12(x-4)=5(y-9)$ و منه $\frac{x-4}{5}=\frac{y-9}{12}=k \quad k\in\mathbb{Z}$ إذن $\begin{cases}x=5k+4\\y=12k+9\end{cases} k\in\mathbb{Z}$

ب– استنتاج مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث تكون النقط A_n تنتمي إلي المحور الحقيقي الموجب.

لدينا $z_n=2^n.\left[\cos\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$ و تكون نقط تحقق علاقة إذا كان : $\cos\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=1$

و منه : $\cos\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 0$ و منه $\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}=0+2\pi k$ و منه $5\pi n+3\pi=12\pi k$ و منه $5n+3=12k$

فينتج لنا : $12k-5n=3$ و من سؤال 3) أ – نجد : $\begin{cases}k=x=5\alpha+4\\n=y=12\alpha+9\end{cases}\alpha\in\mathbb{N}$ ومنه $\alpha\in\mathbb{N}$ $n=12\alpha+9$.

4) إثبات أن من اجل كل عدد طبيعي n ، العدد $\frac{z_{n+3}}{z_n}$ تخيلي صرف .

$$\frac{z_{n+3}}{z_n}=\frac{2^{n+3}e^{i\left(\frac{5\pi(n+3)}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}{2^n e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{2^n\times 2^3 e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{15\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}{2^n e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}=8\frac{e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}e^{i\left(\frac{15\pi}{6}\right)}}{e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}=8e^{i\left(\frac{5\pi}{2}\right)}=8e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=8e^{i\frac{\pi}{2}}=8i$$

استنتاج طبيعة المثلثات OA_nA_{n+3} .

لدينا $\frac{z_{n+3}}{z_n}=8i$ معناه $\arg\left(\frac{z_{n+3}}{z_n}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\arg\left(\frac{z_{n+3}-z_O}{z_n-z_O}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{n+3}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

إذن المثلثات القائمة في O .

5) تعيين بدلالة n قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)$.

$$\frac{z_{2n}}{z_n}=\frac{2^{2n}e^{i\left(\frac{5\pi(2n)}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}{2^n e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{2^{2n}}{2^n}\times\frac{e^{i\left(\frac{5\pi n}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}=2^n e^{i\left[\left(\frac{5\pi n}{3}+\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{5\pi n}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right]}=2^n e^{i\left[\frac{5\pi n}{3}-\frac{5\pi n}{6}\right]}=2^n e^{i\frac{5\pi n}{6}}$$

و منه : $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)=\arg\left(\frac{z_{2n}}{z_n}\right)=\frac{5\pi n}{6}$.

استنتاج قيم n حتى تكون النقط : O ، A_n و A_{2n} في استقامية .

نقط في استقامية يعني : $\left(\overrightarrow{OA_n};\overrightarrow{OA_{2n}}\right)=\pi k$ و منه $\frac{5\pi n}{6}=\pi k$ و منه $5\pi n=6\pi k$ و منه $5n=6k$ و منه $\frac{n}{6}=\frac{k}{5}=\alpha$.

ومنه : $n=6\alpha$ مع $\alpha\in\mathbb{N}$.

التمرين الثالث :

1) أ- إثبات أن : $x\equiv 4[11]$.

لدينا : $11x-5y=2$ و منه $5y=11x-2$ و منه $5y\equiv -2[11]$ و منه $5y\equiv -2+22[11]$ و منه $5y\equiv 20[11]$

إذن : $y\equiv 4[11]$ (و هو المطلوب) .

ب- استنتاج حلول المعادلة (E) .

لدينا $y\equiv 4[11]$ و منه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$. نعوض قيمة $y=11k+4$ في معادلة (E) نجد

$11x-5y=2$ و منه $11x-5(11k+4)=2$ و منه $11x-5\times 11k-20=2$ و منه $11x-5\times 11k-22=0$.

نجد $x-5k-2=0$ و منه $x=5k+2$.

حلول معادلة $S=\{(11k+4;5k+5)\quad k\in\mathbb{Z}\}$.

2) أ- تعين قيم $d=PGCD(a;b)$.

لدينا : $11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$ و منه $2/d$ قيم هي $\{1;2\}$.

ب- تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=2$.

من العلاقة $PGCD(a;b)=2$ نستنتج أن : 2 يقسم a و 2 يقسم b و بالتالي 2 يقسم $b-2a$ أي 2 يقسم $(11n+4)-2(5n+2)$

بمعني : 2 يقسم n ومنه $\alpha\in\mathbb{N}$ $n=2\alpha$ (أي : n عدد طبيعي زوجي غير معدوم).

إذن قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=2$ هي $n=2\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

جـ- استنتاج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما :

نعلم قيم n بحيث $PGCD(a;b)=2$ هي $n=2\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$ و منه نستنتج أن قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=1$ هي قيم n حيث $n\in\mathbb{N}-\{2\alpha\}$ بمعنى : $n=2\alpha+1$ حيث ($n\in\mathbb{N}$) و (n عدد طبيعي فردي) .

3) أ- إثبات أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

هناك عدة طرائق .

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ و $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$.

ب- استنتاج حسب قيم n، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1).PGCD(a;b)$ و منه نميز حالتين .

الحالة 1 : $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

فنجد : $PGCD(A;B)=(n+1).PGCD(a;b)=(n+1)\times 2=(2\alpha+1)\times 2=4\alpha+2$.

الحالة 2 : $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1$ حيث $\alpha\in\mathbb{N}$.

فنجد : $PGCD(A;B)=(n+1).PGCD(a;b)=(n+1)\times 1=n+1=(2\alpha+1)+1=2\alpha+2$.

التمرين الرابع :

جزء 1 : بقراءة بيانية

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2) $g(0)=3$ و $g'(0)=0$ (مماس أفقي يوازي حامل محور الفواصل) .

3)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
	متناقصة		متزايدة

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

4) تعيين إشارة $g(x)$: نلاحظ أن $g(x)\geq 3\succ 0$ و منه g موجبة تماما علي $\mathbb{R}$.

5) تعيين $g'(x)$ بدلالة a و b .

لدينا $g(x)=ae^{x}+b-x$ و منه $g'(x)=ae^{x}-1$.

6) أ- إثبات أن : $g(x)=e^{x}+2-x$.

لدينا : $\begin{cases} g(0)=3 \\ g'(0)=0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} ae^{0}+b-0=3 \\ ae^{0}-1=0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} a+b=3 \\ a-1=0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

ب- النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

جـ- اتجاه تغير : $g(x)=e^{x}+2-x$ و منه $g'(x)=e^{x}-1$ و منه $g'(x)=0$ معناه $e^{x}-1=$ و منه $e^{x}=1$ إذن $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
	متناقصة		متزايدة

جزء 2 :

1) إثبات أن : $f'(x)=e^{-x}.g(x)$.

لدينا : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ و منه $f'(x)=1+(x-1)'e^{-x}+\left[e^{-x}\right].(x-1)$ و منه $f'(x)=1+1e^{-x}-e^{-x}.(x-1)$

$f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}+e^{-x}=1+2e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}\left[e^{x}+2-x\right]=e^{-x}.g(x)$

2) دراسة تغيرات الدالة f .

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x+(x-1)e^{-x}\right] = -\infty-\infty = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x+(x-1)e^{-x}\right] = +\infty+0 = +\infty$.

لدينا : $f'(x) = e^{-x}.g(x) \succ 0$ و منه f متزايدة تماما .

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل و حيد α مع $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$.

f معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على مجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ و $f(0) = -1 \prec 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.2$ و منه حسب نظرية قيم متوسطة يوجد حل و حيد α حيث $f(\alpha)=0$ و $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$.

4) أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+(x-1)e^{-x}-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{-x}\right] = 0$ ومنه $y=x$ خط مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ب- دراسة وضعية (Δ) و (C_f) .

ندرس إشارة θ حيث : $\theta = f(x)-y = x+(x-1)e^{-x}-x = (x-1)e^{-x}$ مع $e^{-x} \succ 0$ ندرس إشارة $x-1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
θ	$-$		$+$
	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع $(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)

5) أ- إثبات أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A مع إيجاد إحداثيات .

لدينا : $f'(x) = e^{-x}.g(x)$ و منه

$$f''(x) = -e^{-x}.g(x)+g'(x)e^{-x} = -e^{-x}.\left[e^{x}+2-x\right]+\left[e^{x}-1\right]e^{-x} = e^{-x}.\left[-e^{x}-2+x+e^{-x}-1\right] = e^{-x}.(x-3)$$

$f''(x)=0$ يكافئ $x-3=0$ و منه $x=3$ مع

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$

و $f(3) = 3+(3-1)e^{-3} = 3+2e^{-3}$ إذن $A\left(3;3+2e^{-3}\right)$.

ب- تحقق من أن : $(e^{3}-1)x-e^{3}y+5=0$ معادلة مماس (T) عند A .

$y = f'(3)(x-3)+f(3)$ و منه $y = f'(3)(x-3)+f(3)$

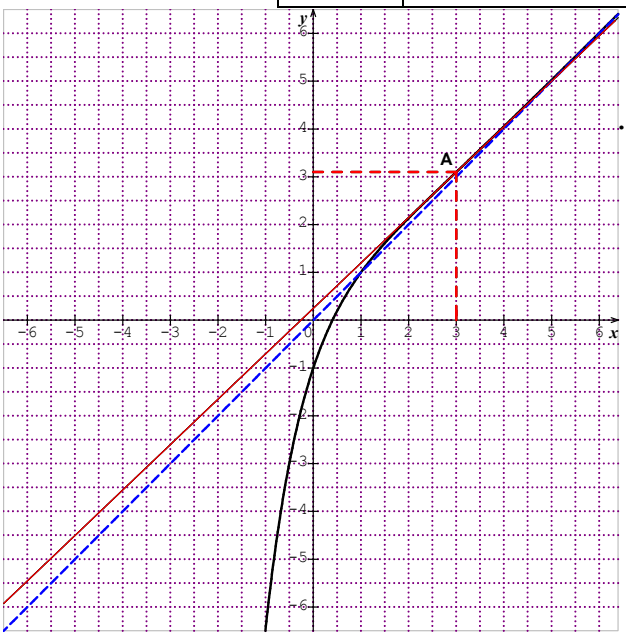
مع : $f'(3) = e^{-3}(e^{3}-1) = 1-e^{-3}$ و $f(3) = 3+2e^{-3}$

بتعويض : $y = (1-e^{-3})(x-3)+3+2e^{-3}$

و منه $y = (1-e^{-3})x-3(1-e^{-3})+3+2e^{-3}$

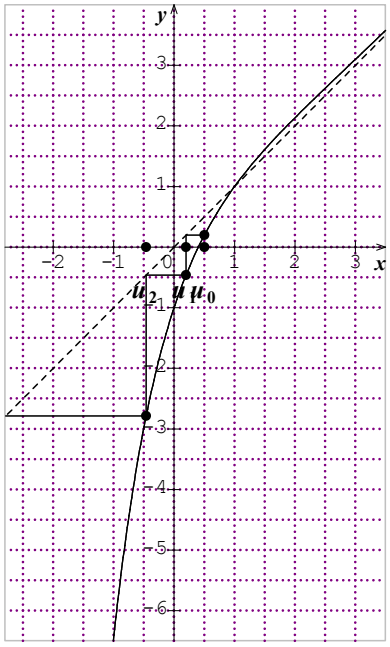
و منه $y = (1-e^{-3})x-3+3e^{-3}+3+2e^{-3}$

فان : $y = (1-e^{-3})x+5e^{-3}$ .....$\times e^{3}$



فان : $e^3y=(e^3-1)x+5$ و منه $(e^3-1)x-e^3y+5=0$.

الرسم



7) لدينا $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- تمثيل حدود .

ب- إثبات أن $u_n\prec 1$.

مرحلة 1 : نتحقق من صحتها من اجل $n=0$.

لدينا $u_0=\frac{1}{2}\prec 1$ و منه صحيحة من اجل $n=0$.

مرحلة 2 : نفرض أنها صحيحة من اجل n معناه $u_n\prec 1$ و نبرهن صحتها من اجل $n+1$ معناه : $u_{n+1}\prec 1$ ؟

لدينا ($u_n\prec 1$ و f متزايدة) يكافئ $f(u_n)\prec f(1)$ ومنه $u_{n+1}\prec 1$ لان ($f(1)=1$).

جـ-إثبات أن (u_n) متناقصة تمتما .(برهان بالتراجع $u_{n+1}\prec u_n$).

مرحلة 1 : نتحقق من صحتها من اجل $n=0$.

لدينا $u_1=f(u_0)=u_0+(u_0-1)e^{-u_0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\prec 1=u_0$ و منه خاصية صحيحة من اجل $n=0$.

مرحلة 2 : نفرض أنها صحيحة من اجل n معناه $u_{n+1}\prec u_n$ و نبرهن صحتها من اجل $n+1$ معناه : $u_{n+2}\prec u_{n+1}$ ؟

لدينا ($u_{n+1}\prec u_n$ و f متزايدة) يكافئ $f(u_{n+1})\prec f(u_n)$ ومنه $u_{n+2}\prec u_{n+1}$.

د- نستنتج أن المتتالية متباعدة و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

المـــوضـوع : الثاني

التمرين الأول :

1) أ- إثبات أن : $x\equiv 8[9]$.

لدينا : $4x-9y=5$ و منه $4x=9y+5$ و منه $4x\equiv 5[9]$ و منه $4x\equiv 5-9[9]$ و منه $4x\equiv -4[9]$ و منه $x\equiv -1[9]$

$x\equiv -1+9[9]$ إذن : $x\equiv 8[9]$ (و هو المطلوب) .

- استنتاج حلول المعادلة (E) .

لدينا $x\equiv 8[9]$ و منه $x=9k+8$ مع $k\in\mathbb{Z}$. نعوض قيمة $x=9k+8$ في معادلة (E) نجد

$4x-9y=5$ و منه $4(9k+8)-9y=5$ و منه $9\times 4k+8\times 4-9y=5$ و منه $9\times 4k-9y+27=0$.

نجد $4k-y+3=0$ و منه $y=4k+3$.

حلول معادلة $S=\{(9k+8;4k+3)\quad k\in\mathbb{Z}\}$.

ب- تعيين القيم ممكنة x و y مع كتابة α في النظام العشري مع علم أن $x\succ 5$ و $y\succ 10$.

لدينا $\alpha=\overline{43}^x=3+4x$ و $\alpha=\overline{98}^y=8+9y$ و منه $3+4x=8+9y$ و منه $4x-9y=5$ و هي معادلة (E)

ومنه $k\in\mathbb{N}$ $\begin{cases}x=9k+8\\y=4k+3\end{cases}$ و لكن لدينا $\begin{cases}x\le 35\\y\le 15\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}9k+8\le 35\\4k+3\le 15\\k\in\mathbb{N}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k\le\frac{35-8}{9}\\k\le\frac{15-3}{4}\\k\in\mathbb{N}\end{cases}$ و منه $\begin{cases}k\le 3\\k\le 3\\k\in\mathbb{N}\end{cases}$

ومنه $k\in\{0;1;2;3\}$ إذن $\begin{cases}k=0\\x=8\\y=3\end{cases}$ مرفوض ، $\begin{cases}k=1\\x=17\\y=7\end{cases}$ مرفوض ، $\begin{cases}k=2\\x=26\\y=11\end{cases}$ مقبول ، $\begin{cases}k=3\\x=35\\y=15\end{cases}$ مقبول .

حالة 1 :

$$\begin{cases}k=2\\x=26\\y=11\\\alpha=3+4x=3+4(26)=107\\\alpha=8+9y=8+9(11)=107\end{cases}$$

حالة 1 :

$$\begin{cases}k=3\\x=35\\y=15\\\alpha=3+4x=3+4(35)=143\\\alpha=8+9y=8+9(15)=143\end{cases}$$

2) أ- دراسة بواقي قسمة 4^n علي 9 .

$4^0\equiv1[9]$ ، $4^1\equiv4[9]$ ، $4^2\equiv16[9]$ و منه $4^2\equiv7[9]$ ، $4^3\equiv64[9]$ و منه $4^3\equiv1[9]$ إذن دور هو 3 .

قيم n	باقي قسمة على 9
$3k$	1
$3k+1$	4
$3k+2$	7

ب- حلول معادلة $2011^x+4^y+7\equiv0[9]$.

لدينا $2011=9(223)+4$ و منه $2011\equiv4[9]$ و منه $2011^x\equiv4^x[9]$.

إذن $2011^x+4^y+7\equiv0[9]$ يكافئ $4^x+4^y+7\equiv0[9]$ و منه $4^x+4^y\equiv-7[9]$ و منه $4^x+4^y\equiv2[9]$.

y \ x	3α	$3\alpha+1$	$3\alpha+2$
$3k$	$1+1=2$	$4+1=5$	$7+1=8$
$3k+1$	$1+4=5$	$4+4=8$	$7+4=11$ $11\equiv2[9]$
$3k+2$	$1+7=8$	$4+7=11$ $11\equiv2[9]$	$7+7=14$ $14\equiv5[9]$

و منه قيم ممكنة هي

حالة 1 : $x=3\alpha\quad;y=3k$.

حالة 2 : $x=3\alpha+1\quad;y=3k+2$.

حالة 3 : $x=3\alpha+2\quad;y=3k+1$

3) أ- تعين قيم $d=PGCD(a;b)$.

لدينا : $4a-9b=4(9n+8)-9(4n+3)=36n+32-36n-27=5$ و منه $5/d$ قيم هي $\{1;5\}$.

ب- تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=5$.

من العلاقة $PGCD(a;b)=5$ نستنتج أن : 5 يقسم a و 5 يقسم b و بالتالي 5 يقسم $b-2a$ أي 5 يقسم $(9n+8)-2(4n+3)$

بمعني : 5 يقسم $n+2$ ومنه $\alpha\in\mathbb{N}$ $\quad n+2=5\alpha$ و منه $n=5\alpha-2$ و منه $n\equiv-2[5]$ و منه $n\equiv3[5]$ إذن $n=5\lambda+3$

إذن قيم n بحيث يكون $PGCD(a;b)=5$ هي $n=5\lambda+3$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$.

4) أ- إثبات أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

هناك عدة طرائق .

$A=(n+1)(9n+8)=a(n+1)$ و $B=(n+1)(4n+3)=b(n+1)$.

ب- استنتاج حسب قيم n، القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1).PGCD(a;b)$ و منه نميز حالتين .

الحالة 1 : $PGCD(a;b)=5$ معناه $n=5\lambda+3$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$.

فنجد : $PGCD(A;B)=(n+1).PGCD(a;b)=(n+1)\times 5=\left[(5\lambda+3)+1\right]\times 5=25\lambda+20$.

الحالة 2 : $PGCD(a;b)=1$ معناه $n\neq 5\lambda+3$ حيث $\lambda\in\mathbb{N}$.

فنجد : $PGCD(A;B)=(n+1).PGCD(a;b)=(n+1)\times 1=n+1$.

التمرين الثاني :

جزء 1 : أ- $P(2)=(2)^3-4(2)^2+6(2)-4=8-16+12-4=20-20=0$ و منه $z_0=2$ جذر لـ $P(z)$.

تعين α و β :

	1	-4	6	-4
2	0	2	-4	4
	1	-2	2	0

ومنه : $P(z)=(z-2)(z^2-2z+2)$.

ب- حل المعادلة $P(z)=0$.

$P(z)=0$ يكافئ $(z-2)(z^2-2z+2)=0$ ومنه $z-2=0$ أو $z^2-2z+2=0$.

$z-2=0$ معناه $z_0=2=2e^{i(0)}$.

$z^2-2z+2=0$ و منه $\Delta=(-2)^2-4(1)(2)=4-8=-4=(2i)^2$

و منه $z_1=\dfrac{2-2i}{2}=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2=\dfrac{2+2i}{2}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

جزء 2: 1) إثبات أن S تشابه .

لدينا : $z'=\dfrac{1+i}{2}z$ و منه $a=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $b=0$ و $\dfrac{b}{1-a}=0$.

إذن هو تشابه مباشر نسبته $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{4}$ و مركزه مبدأ O .

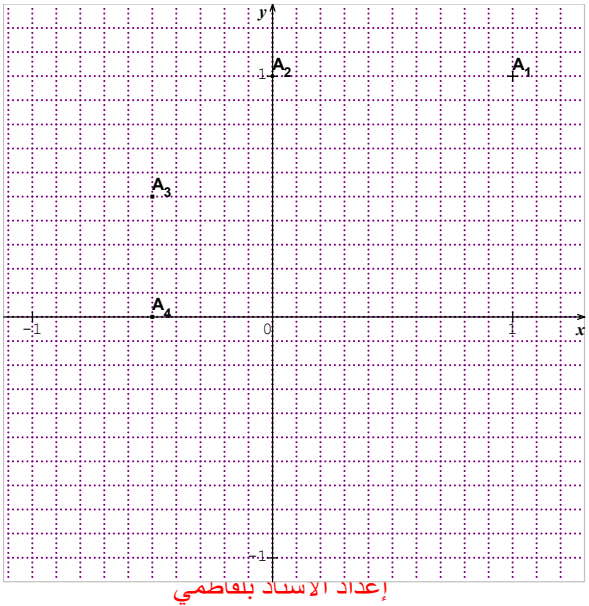
2) $z_0=2$ و $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $z_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}z_n$.

ا- حساب z_1 و z_2 و z_3 و z_4.

$z_1=\dfrac{1+i}{2}z_0=\dfrac{1+i}{2}\times(2)=1+i$ و $z_2=\dfrac{1+i}{2}z_1=\dfrac{1+i}{2}\times(1+i)=\dfrac{(1+i)^2}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$

$z_3=\dfrac{1+i}{2}z_2=\dfrac{1+i}{2}\times(i)=\dfrac{i-1}{2}=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_4=\dfrac{1+i}{2}z_3=\dfrac{1+i}{2}\times\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{(i+1)(i-1)}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$.

الرسم



ب- تحقق أن : $u_n=OA_n$ تكتب علي الشكل $u_n=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{OA_{n+1}}{OA_n}=\frac{|z_{n+1}-z_0|}{|z_n-z_0|}=\frac{\left|\frac{1+i}{2}z_n\right|}{|z_n|}=\frac{\left|\frac{1+i}{2}\right|.|z_n|}{|z_n|}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و حدها الأول $u_0=OA_0=|z_0|=|2|=2$ و منه $u_n=u_0\times q^n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3) إيجاد رتبة n_0 التي يكون من اجلها A_{n_0} تنتمي إلي القرص مركزه O و نصف قطرها $0,1$.

$u_n\le 0,1$ و منه $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0,1$ و منه $2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0,1$ و منه $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le 0,05$ و منه $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\le \ln(0,05)$

و منه $n.\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le \ln(0,05)$ و منه $n\ge\frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ و منه $n_0\ge 8,6$ إذن $n_0=9$.

4) (u_n) متقاربة لان $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ ($\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ مع $-1\prec q=\frac{1}{\sqrt{2}}\prec 1$)

5) إثبات أن : $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$.

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i}{2}z_n-z_n}{\frac{1+i}{2}z_n}\times\frac{2}{2}=\frac{(1+i)z_n-2z_n}{(1+i)z_n}=\frac{(1+i-2)z_n}{(1+i)z_n}=\frac{(-1+i)z_n}{(1+i)z_n}=\frac{(-1+i)}{(1+i)}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{-(1-i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

لدينا $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=i$ معناه $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}-z_O}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}$.

و منه $\left(\overrightarrow{A_{n+1}O};\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن نستنتج المثلثات OA_nA_{n+1} القائمة في A_{n+1} .

6) $v_n=OA_0+OA_1+.....+OA_n=u_0+u_1+.....+u_n=u_0\times\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=2\times\left[\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\right]$ (مجموع حدود متتالية هندسية)

$\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{2}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{4}{2-\sqrt{2}}$.

بالتوفيق في بكالوريا من الأستاذ المادة من كل قلبي

و للجميع (كامل الطلبة جميع الشعب)

التمرين اللأول

لنعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$

1) أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$

ب- أدرس إشارة f' و نهاية f عند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها

2) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بحدها العام : $u_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$

أ- تحقق أن اذا كان $n\leq x\leq n+1$ فان $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

ب- بين بدون حساب u_n،أن من أجل كل عدد طبيعي n : $f(n+1)\leq u_n\leq f(n)$.

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

3) لتكن الدالة F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=(\ln(x+3))^2$.

أ- تحقق من قابلية اشتقاق الدالة F على المجال $[0;+\infty[$ وعين عددها المشتق $F'(x)$ من أجل كل عدد موجب تماما.

ب- نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $I_n=\int_0^n f(x)dx$. أحسب I_n.

4) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$.

أحسب S_n . هل المتتالية (S_n) متقاربة .

حل التمرين الأول:

1) أ- نبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$

الدالة $x\mapsto x+3$ دالة كثير حدود قابلة للاشتقاق وموجبة تماما على $[0;+\infty[$

الدالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ومنه الدالة $x\mapsto \ln(x+3)$ هي مركب الدالتين $x\mapsto x+3$ و $x\mapsto \ln x$ فهي قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها حاصل قسمة الدالتين $x\mapsto \ln(x+3)$ و $x\mapsto x+3$ القابلتين للاشتقاق على $[0;+\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x+3}\times(x+3)-\ln(x+3)}{(x+3)^2}=\dfrac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$

ب- دراسة إشارة f'

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$، $(x+3)^2>0$ ومنه $f'(x)$ من إشارة $1-\ln(x+3)$

على المجال $[0;+\infty[$: $x+3\geq 3$ ومنه $\ln(x+3)\geq \ln 3>1$

على المجال $[0;+\infty[$: $1-\ln(x+3)<0$ و الدالة f متناقصة تماما على هذا المجال نهاية f عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}=\lim_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$ و $f(0)=\dfrac{\ln 3}{3}$

جدول تغيرات f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$\dfrac{\ln 3}{3}$ ↘	0

2) $u_n=\int_n^{n+1} f(x)dx$

أ-نبين أنه إذا كان $n\leq x\leq n+1$ فان $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$.

الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x يحقق $n\leq x\leq n+1$ لدينا $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$

ب- نبين دون حساب u_n، أن من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)\le u_n\le f(n)$.

من أجل كل $n\in\mathbb{N}$، الدوال $x\mapsto f(n);x\mapsto f(x);x\mapsto f(n+1)$

مستمرة على $[n;n+1]$ ومنه التكاملات على $[n;n+1]$ للثلاث دوال السابقة تبقى بنفس ترتيب الدوال أي :

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx\le\int_n^{n+1} f(x)dx\le\int_n^{n+1} f(n)dx$$

$$\left[xf(n+1)\right]_n^{n+1}\le u_n\le\left[xf(n)\right]_n^{n+1}$$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $f(n+1)\le u_n\le f(n)$

جـ- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وتعيين نهايتها .

من دراسة الدالة f لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)=0$ وباستعمال النهاية والحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

3) F معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\left(\ln(x+3)\right)^2$

أ-التحقق من قابلية اشتقاق F على المجال $[0;+\infty[$ وتعيين عددها المشتق $F'(x)$.

الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ لأنها مربع دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$

من اجل كل $x\in[0;+\infty[$: $F'(x)=2\left[\ln(x+3)\right]\times\left(\dfrac{1}{x+3}\right)=2\left(\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}\right)$

ومنه $F'(x)=2f(x)$

ب- حساب من أجل كل عدد طبيعي n : $I_n=\int_0^n f(x)dx$.

من السؤال السابق من اجل كل $x\in[0;+\infty[$: $F'(x)=2f(x)$ ومنه دالة أصلية للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ هي الدالة $\frac{1}{2}F$

$$I_n=\int_0^n f(x)dx=\left[\frac{1}{2}F(x)\right]_0^n=\frac{F(n)-F(0)}{2}.$$

من أجل كل عدد طبيعي n : $I_n=\dfrac{\left[\ln(n+3)\right]^2-\left[\ln(3)\right]^2}{2}$

4) من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$.

حساب S_n.

$$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx$$

باستعمال علاقة شال نجد من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n=\int_0^n f(x)dx=I_n=\frac{\left[\ln(n+3)\right]^2-\left[\ln(3)\right]^2}{2}$$

حساب نهاية (S_n)

متباعدة (S_n) ومنه المتتالية $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left[\ln(n+3)\right]^2-\left[\ln(3)\right]^2}{2}=+\infty$

التمرين الثاني :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;1;3)$ و $B(-3;-1;7)$; $C(3;2;4)$

1. بين أن النقط A ; $B;C$ ليست في استقامية.

2. ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$

أ. بين أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .

ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

3. لتكن H نقطة مشتركة بين المستوي (ABC) و المستقيم (d).

أ. بين أن H مرجح للجملة $(A;-2);(B;-1);(C;2)$.

ب. عين طبيعة المجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء التي تحقق: $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

محددا عناصرها المميزة.

جـ. عين المجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء التي تحقق :

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ محددا عناصرها المميزة.

حل التمرين الثاني :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(2;1;3)$ و $B(-3;-1;7)$; $C(3;2;4)$

1. النقط A ; $B;C$ ليست في استقامية.

النقط A ; $B;C$ ليست في استقامية. إذا وفقط إذا كان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه

النقط A ; $B;C$ ليست في استقامية.

2. المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي: $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$

أ. المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .

المستقيم (d) يشمل النقطة $D(-7,0,4)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) إذا وفقط إذا كان عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

لدينا $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ومنه (d) عمودي على المستوي (ABC)

أ. معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

المستوي (ABC) يشمل النقطة $A(2;1;3)$ وعمودي على المستقيم (d) أي $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ومنه ($M(x,y,z)$ نقطة من (ABC)) يكافئ ($\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$)

معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $2x-3y+z-4=0$

3. H نقطة مشتركة بين المستوي (ABC) و المستقيم (d).

أ. H مرجح للجملة $(A;-2);(B;-1);(C;2)$.

نبحث عن النقطة H النقطة المشتركة بين المستوي (ABC) و المستقيم (d).

H نقطة من (d) ومنه $\begin{cases} x_H=-7+2t \\ y_H=-3t \\ z_H=4+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})\cdots(1)$

H نقطة من المستوي (ABC): ومنه $2x_H-3y_H+z_H-4=0\cdots(2)$

بتعويض قيم الجملة (1) في المعادلة (2) نجد : $t=1$ ومنه $H(-5,-3,5)$

نبين أن H مرجح للجملة $(A;-2);(B;-1);(C;2)$

بتطبيق إحداثيات المرجح

$$x_H=\frac{-2x_A-x_B+2x_C}{-1}=\frac{-4+3+6}{-1}=-5$$

$$y_H=\frac{-2y_A-y_B+y_C}{-1}=\frac{-2+1+4}{-1}=-3$$

$z_H=\frac{-2z_A-z_B+z_C}{-1}=\frac{-6-7+8}{-1}=5$ ، ومنه $H(-5,-3,5)$

ب- طبيعة المجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء التي تحقق : $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

H مرجح للجملة $(A;-2);(B;-1);(C;2)$ ومنه من أجل كل نقطة M من الفضاء

$$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}=-\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HM}$$

$$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CB}$$

$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ يكافئ $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

ومنه مجموعة النقط (Γ_1) هي المستوي الذي يشمل H و شعاعه الناظمي $\overrightarrow{CB}$

جـ. طبيعة المجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$$

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|=\sqrt{29}$

$\sqrt{29}$ ونصف القطر H هي الكرة ذات المركز (Γ_2) مجموعة النقط

التمرين الثالث:

الجزء الأول :

حل المعادلة التفاضلية $y'-2y=xe^x \quad \cdots\cdots(1)$ في $\mathbb{R}$

1. حل المعادلة التفاضلية $y'-2y=0 \quad \cdots\cdots(2)$ في $\mathbb{R}$

2. a و b عددان حقيقيان و u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$u(x)=(ax+b)e^x$$

أ. عين العددين a و b بحيث تكون u حل للمعادلة التفاضلية (1)

ب. بين أن الدالة v حل للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كانت $u+v$ حل للمعادلة (1)

جـ. استنتج مجموعة حلول المعادلة (1)

3. عين حلول المعادلة 1 التي تنعدم عند 0

الجزء الثاني :

دراسة دالة مساعدة

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=2e^{x}-x-2$

1.أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2. أحسب الدالة المشتقة $g'(x)$ ، أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3.نقبل أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين حقيقيين

أ. تحقق أن 0 هو أحد الحلين

ب. نسمي الحل الثاني α , بين أن $-1,6\le\alpha\le-1,5$

4. أدرس حسب قيم x إشارة $g(x)$

الجزء الثالث :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

1.أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن وضع e^{2x} عامل مشترك)

2. أحسب $f'(x)$ ثم بين أن $f'(x)$ و $g'(x)$ من نفس الإشارة

.استنتج تغيرات الدالة f

3. بين أن $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}$ ،حيث α العدد الحقيقي المعرف في الجزء الثاني

استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (نذكر أن $-1,6\le\alpha\le-1,5$)

4. شكل جدول تغيرات الدالة f

5. أنشي المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة $2cm$

الجزء الرابع :

1. ليكن m عددا حقيقيا سالبا. فسر هندسيا التكامل $\int_{m}^{0} f(x)dx$

2.أ- باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_{m}^{0} xe^{x}dx$

ب- استنتج $\int_{m}^{0} f(x)dx$

جـ- أحسب $\lim\limits_{m\to-\infty}\int_{m}^{0} f(x)dx$

حل التمرين الثالث :

الجزء الأول : حل المعادلة التفاضلية $y'-2y=xe^{x}\cdots\cdots(1)$

1. حل المعادلة التفاضلية $y'-2y=0\cdots\cdots(2)$

المعادلة $y'-2y=0$ تكافئ $y'=2y=$

وحسب الدرس حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x\mapsto k\times e^{2x}\ ;\ k\in\mathbb{R}$

2 . أ- حساب a و b

لتكن u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=(ax+b)e^{x}$

u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x

$$u'(x)=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$$

ومنه تكون u حل للمعادلة التفاضلية (1) اذا وفقط اذا كان

من أجل كل عدد حقيقي x $(ax+a+b)e^{x}-2(ax+b)e^{x}=xe^{x}$

$(-ax+a-b)e^{x}=xe^{x}$

بما أن $e^x \neq 0$ ،تكون u حل للمعادلة التفاضلية (1) اذا وفقط اذا كان $-ax+a-b=x$ من أجل كل عدد حقيقي x $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$: $\begin{cases} -a=1 \\ a-b=0 \end{cases}$

ب- بين أن v حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا وفقط إذا كانت $u+v$ حل للمعادلة التفاضلية (1)

لتكن v دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=(-x-1)e^x$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $u'(x)-2u(x)=xe^x$

v حل للمعادلة التفاضلية (2) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي x : $v'(x)-2v(x)=0$

أي $u'(x)+v'(x)-2u(x)-2v(x)=xe^x$

أي $(u+v)'(x)-2(u+v)(x)=xe^x$

جـ- استنتج مجموعة حلول المعادلة (1)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

f حل للمعادلة التفاضلية (1) يمكن كتابتها $(f-u)+u$

من السؤال السابق حلول المعادلة(1) هي الدوال من الشكل $u+v$ حيث v حل للمعادلة التفاضلية (2). ومنه حلول المعادلة(1) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$

بـ: $f(x)=ke^{2x}+(-x-1)e^x \quad (k\in\mathbb{R})$

3.عين حل للمعادلة (1) الذي ينعدم عند 0

$f(0)=k-1$

$f(0)=0$ يكافئ $k=1$

حل للمعادلة (1) الذي ينعدم عند 0 هو الدالة : $x\mapsto e^{2x}-(x+1)e^x$

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x-2$

1. أحسب نهايات g عند أطراف مجموعة التعريف.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2e^x-x-2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(2-\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)=+\infty$$

2. دراسة تغيرات الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل حقيقي x

$g'(x)=2e^x-1$

$g'(x)=0$ يكافئ $x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

$g'(x)<0$ يكافئ $x<-\ln 2$

$g'(x)>0$ يكافئ $x>-\ln 2$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-\ln 2[$ و متزايدة تماما على $]-\ln 2;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g : $g(-\ln 2)=-1+\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ- التحقق أن 0 حل للمعادلة $g(x)=0$

$$g(0)=2e^{0}-2=0$$

ب- نبين أن $-1,6\le\alpha\le-1,5$.

من تغيرات الدالة g نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل على المجال $]-\ln 2;+\infty[$ و هو 0 وحل α على المجال $]-\infty;-\ln 2[$

و لدينا باستعمال الآلة الحاسبة $g(-1,6)>0$ و $g(-1,5)<0$

ومنه $-1,6\le\alpha\le-1,5$

4 إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

الجزء الثالث: دراسة دالة

f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

1. أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{2x}-(x+1)e^{x}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\left(1-\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}\right)=+\infty$$

2. أ- تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل حقيقي x

$$f'(x)=2e^{2x}-\left[e^{x}+(x+1)e^{x}\right]=2e^{2x}-e^{x}(x+2)$$

$$f'(x)=e^{x}\left[2e^{x}-(x+2)\right]=e^{x}\times g(x)$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}>0$ ومنه

$f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه نستنتج تغيرات الدالة

f باستعمال نتائج السؤال 4. من الجزء الثاني

- $f'(x)>0$ على $]-\infty;\alpha[$ و $]0;+\infty[$ و f متزايدة تماما على كل من هذين المجالين
- $f'(x)<0$ على $]\alpha;0[$ و f متناقصة تماما على هذا المجال

3. حساب $f(\alpha)$ حيث

$$f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}=e^{\alpha}\left(e^{\alpha}-\alpha-1\right)$$

ولدينا $g(\alpha)=0$ أي $2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ و $e^{\alpha}=\frac{1}{2}(\alpha+2)$ و منه

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+2)\left(\frac{1}{2}\alpha+1-\alpha-1\right)$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+2)\left(-\frac{1}{2}\alpha\right)=-\frac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}$$

نعتبر الدالة $h:\ \alpha\mapsto-\frac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}$ هذه الدالة متزايدة تماما على $]-\infty;-1[$ بما أن $-1,6\le\alpha\le-1,5$ فان

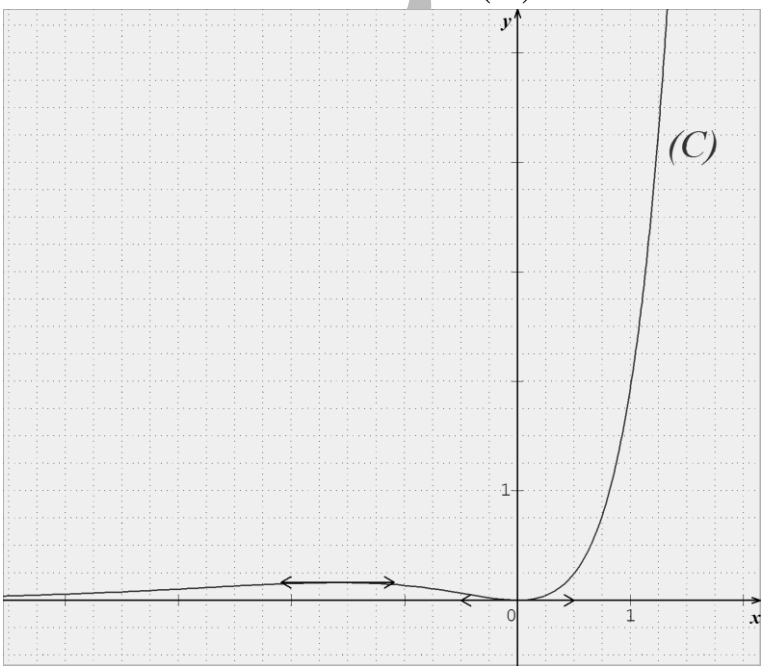
$h(-1,6)\le h(\alpha)\le h(-1,5)$ أي $0,16\le h(\alpha)\le 0,1875$

4. جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$

$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

1. إنشاء المنحني (C)



بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ فان المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب

معادلته : $y=0$ عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=+\infty$ المنحني (C) يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب عند $+\infty$

الجزء الرابع: حساب مساحة

1. التفسير الهندسي للتكامل $\int_m^0 f(x)dx$

$m\le 0$ من الدراسة السابقة f موجبة على $[m;0]$

f مستمرة على $[m;0]$ ومنه التكامل $\int_m^0 f(x)dx$ معرف

وهو مساحة الجزء من المستوي المحدودة بـالمنحني (C)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=m$ و $x=0$

(الحدة : وحدة مساحة)

2. أ- حساب $I=\int_m^0 xe^x dx$

نضع

$$u(x)=x \qquad v'(x)=e^x$$

$$u'(x)=1 \qquad v(x)=e^x$$

u و v قابلتان للاشتقاق على $[m;0]$ و u' و v' مستمرتان على $[m;0]$ و حسب خاصية التكامل بالتجزئة

$$I=\int_m^0 xe^x dx=\left[xe^x\right]_m^0-\int_m^0 e^x dx$$

$$I=-me^m-1+e^m$$

ب-حساب $\int_m^0 f(x)dx$

$$\int_m^0 f(x)dx = \int_m^0 \left(e^{2x} - xe^x - e^x\right)dx$$

$$\int_m^0 f(x)dx = \int_m^0 e^{2x}dx - I - \int_m^0 e^x dx$$

$$\int_m^0 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 + me^m + 1 - e^m - 1 + e^m$$

$$\int_m^0 f(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2m} + me^m$$

3. حساب $\lim\limits_{m\to-\infty}\int_m^0 f(x)dx$

$$\lim_{m\to-\infty}\int_m^0 f(x)dx = \lim_{m\to-\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2m} + me^m\right) = \frac{1}{2}$$

التمرين الأول

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم . نعتبر الأعداد $a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$; $c_n = 2\times10^n + 1$

1. أ) أحسب a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2 ; a_3 ; b_3 ; c_3

ب) ما هو عدد أرقام العددين a_n ; c_n المكتوبين في النظام العشري ؟ بين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3

جـ) بين باستعمال قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 100 المعطاة في نهاية التمرين أن العدد b_3 أولي

د) بين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن $c_n \times b_n = a_{2n}$ ثم استنتج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6

هـ) بين أن $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$.

ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما

2. نعتبر المعادلة : $b_3x + c_3y = 1 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$

ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) بين لماذا المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

ب) طبق خوارزمية اقليدس على العددين b_3 و c_3 ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (1)

جـ) حل المعادلة (1)

<u>قائمة الأعداد الأولية الأصغر من 100</u>

$2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41$
$43;47;53;59;61;67;71;73;79;83;89;97$

التمرين الأول

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم . نعتبر الأعداد $a_n = 4\times10^n - 1$; $b_n = 2\times10^n - 1$; $c_n = 2\times10^n + 1$

2. أ) حساب a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2 ; a_3 ; b_3 ; c_3

$a_1 = 39$; $b_1 = 19$; $c_1 = 21$; $a_2 = 399$; $b_2 = 199$; $c_2 = 201$; $a_3 = 3999$; $b_3 = 1999$; $c_3 = 2001$ ب) عدد أرقام العددين

a_n ; c_n المكتوبين في النظام العشري : من الكتابة في النظام العشري للعددين a_n و

c_n يمكن القول أن a_n ; c_n لهما $(n+1)$ رقم

نبين أن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 : لدينا $10 \equiv 1[3]$ ومنه $10^n \equiv 1^n \equiv 1[3]$

$a_n \equiv 4\times1 - 1 \equiv 0\ [3]$; $c_n \equiv 2\times1 + 1 \equiv 0\ [3]$ ومنه a_n و c_n يقبلان القسمة على 3

جـ) نبين أن العدد b_3 أولي : b_3 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية $2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43$ و

$$47^2 = 2209 > 1999$$

ومنه $b_3 = 1999$ عدد أولي

د) نبين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن $c_n \times b_n = a_{2n}$

$$c_n \times b_n = \left(2\times10^n - 1\right)\times\left(2\times10^n + 1\right) = 4\times10^{2n} - 1 = a_{2n}$$

استنتاج تحليلا إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6 : $a_6 = c_3 \times b_3 = 1999\times2001 = 1999\times3\times23\times29$

هـ) نبين أن $PGCD\left(b_n;c_n\right) = PGCD\left(c_n;2\right)$

$c_n = 2\times10^n + 1 = \mathrm{b_n} + 2$ ومنه $PGCD\left(b_n;c_n\right) = PGCD\left(c_n;2\right)$

استنتاج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما

c_n عدد فردي ومنه $PGCD\left(b_n;c_n\right) = PGCD\left(c_n;2\right) = 1$ و b_n و c_n أوليان فيما بينهما

2 $b_3x + c_3y = 1 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

أ) المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

من السؤال السابق b_3 و c_3 أوليان فيما بينهما ومنه حسب مبرهنة بيزو $(Bezout)$

المعادلة $b_3x + c_3y = 1$ تقبل على الأقل حل في $\mathbb{Z}^2$

ب) تطبيق خوارزمية اقليدس على العددين b_3 و c_3

$$\begin{aligned} c_3 &= 2001 = 1999\times1 + 2 = b_3 + 2 \\ b_3 &= 1999 = 2\times999 + 1 \end{aligned}$$

ومنه $999c_3 = 999b_3 + 2\times999$

أي : $999c_3 = 999b_3 + \left(b_3 - 1\right)$ ومنه $1000b_3 - 999c_3 = 1$

حلا خاصا للمعادلة (1) $(x;y) = (1000;999)$

جـ) حلول المعادلة (1) $\begin{cases} 1999x + 2001y = 1 \\ 1999(1000) - 2001(999) = 1 \end{cases}$ بالطرح نحصل على

$(x-1000)\times1999 = -(y+999)\times2001$ بتطبيق مبرهنة غوص العدد 1999يقسم $-(y+999)\times2001$ وهو أولي مع 2001 ومنه 1999 يقسم $-(y+999)$

أي يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $y + 999 = -1999k$ ومنه $y = -1999k - 999$

وبنفس الطريقة نجد $x = 2001k + 1000$

$\left\{(2001k+1000;-1999k-999);k\in\mathbb{Z}\right\}$ هي (1) حلول المعادلة

التمرين الرابع:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $13x - 11y = 23 \quad \cdots\cdots(1)$

1) أ-عين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0 - y_0 - 1 = 0$ ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (1)

ب- عين من بين حلول المعادلة (1) الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق $-10 < x < 40$

2) نفرض فيما يلي أن العددين $x;y$ موجبان ، وليكن $d = PGCD(x;y)$

أ- ماهي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب-عين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون $d = 23$

جـ - استنتج الحلول $(x;y)$ التي يأخذ من أجلها العدد x أصغر قيمة

التمرين الرابع:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $13x - 11y = 23 \quad \cdots\cdots(1)$

1) أ- تعيين حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) حيث $x_0-y_0-1=0$

لدينا $\begin{cases}13x_0-11y_0=23\cdots(1)\\ x_0-y_0=1\cdots(2)\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}13x_0-11y_0=23\cdots(1)\\ x_0=1+y_0\cdots(2)\end{cases}$

والجملة تصبح $\begin{cases}2y_0=10\\ x_0=1+y_0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}x_0=6\\ y_0=5\end{cases}$ والحل الخاص هو $(6;5)$

ب- استنتاج مجموعة حلول المعادلة (1)

$\begin{cases}13x-11y=23\\ 13x_0-11y_0=23\end{cases}$ بالطرح نحصل على $13(x-x_0)=11(y-y_0)$ وتأخذ المعادلة الشكل: $13(x-6)=11(y-5)$

وبتطبيق مبرهنة غوص : 13 يقسم $11(y-5)$ و أولي مع 11 ومنه

13 يقسم $y-5$ وبالتالي يوجد عدد صحيح k حيث: $y=13k+5$

و بالتعويض في المعادلة $13(x-6)=11(y-5)$ نحصل على $x=11k+6$

ومنه حلول المعادلة (1) هي : $S=\{(11k+6;13k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

جـ- تعيين حلول المعادلة (1) التي تحقق $-10<x<40$

$(-10<x<40)$ تكافئ $(-10<11k+6<40)$

ومنه $(-16<11k<34)$ أي $(-1,45<k<3,09)$

وقيم k هي : $\{-1;0;1;2;3\}$ ومجموعة الحلول التي تحقق الشرط هي :

$\{(-5;-8);(6;5);(17;18);(28;31);(39;44)\}$

2) $x;y$ عددان موجبان ، و $d=PGCD(x;y)$

أ- القيم الممكنة للعدد d

(d يقسم x و d يقسم y) ومنه (d يقسم $13x$ و d يقسم $11y$)

بالطرح d يقسم $13x-11y$ وبما أن $13x-11y=23$

فان d يقسم 23 ومنه $d\in\{1;23\}$

ب- تعيين الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون $d=23$

$\begin{cases}13x-11y=23\\ d=23\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}13x-11y=23\cdots(\alpha)\\ x=23x'\cdots(\beta)\\ y=23y'\cdots(\gamma)\\ PGCD(x';y')=1\end{cases}$ بتعويض (β) و (γ) في (α) نحصل على :

$13(23x')-11(23y')=23$ ومنه $13x'-11y'=1$

$13x'=11y'+1$ أي $13x'\equiv 1[11]$ ومنه $x'\equiv 6[11]$ و $y'\equiv 7[13]$

الحلول $(x;y)$ للمعادلة (1) بحيث يكون $d=23$ هي :

$\begin{cases}x'=6+11m\\ y'=7+13m\end{cases}$ $m\in\mathbb{Z}$ ومنه $\begin{cases}x=138+253m\\ y=161+299m\end{cases}$ $m\in\mathbb{Z}$

جـ- استنتاج الثنائيات $(x;y)$ التي يأخذ من أجلها العدد x أصغر قيمة

أصغر قيمة للعدد x هي من أجل $m=0$ ومنه الثنائية المطلوبة هي :

$(x;y)=(139;161)$

التمرين الخامس:

لكل سؤال أربعة أجوبة مقترحة أحدها– فقط – صحيح، يطلب تحديده مع التبرير.

1) في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$.

(أ) لا تقبل حلولا . (ب) حلولها زوجية .

(جـ)حلولها تحقق $x \equiv 2\ [6]$. (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$.

2) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية : $24x + 34y = 2$ ...(1) .

(أ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y) = (17k-7\ ;\ 5-12k)$ حيث k عدد صحيح .

(ب) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y) = (-7k\ ;\ 5k)$ حيث k عدد صحيح .

(جـ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y) = (34k-7\ ;\ 5-24k)$ حيث k عدد صحيح .

(د) المعادلة (1) لا تقبل حلولا .

3) N عدد طبيعي يكتب : $\overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5 .

العدد N يكتب في النظام ذي الأساس 6 بالشكل : (أ) $\overline{421}$ (ب) $\overline{111}$ (جـ) $\overline{303}$ (د) $\overline{222}$.

4) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1432^{2011} على العدد 3 هو : (أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 .

5) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $a = n(n+2)$, $b = n+1$.

بما أن: $b^2 - a = 1$ فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو : (أ) n (ب) n+1 (جـ) 1 (د)

حل التمرين الخامس :

1–الجواب الصحيح هو (د).

<u>طريقة أولى</u>: يمكن أن نكتب: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$ معناه : $x^2 + x + 3 - 5x \equiv 0\ [5]$ منه : $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ [5]$

منه : $(x-1)(x-3) \equiv 0\ [5]$ ومنه : $x \equiv 1\ [5]$ أو $x \equiv 3\ [5]$

<u>طريقة ثانية</u>:

باقي قسمة(x) على5	0	1	2	3	4
باقي قسمة (x^2)على5	0	1	4	4	1
باقي قسمة (x^2+x)على5	0	2	1	2	0
باقي قسمة (x^2+x+3)على5	3	0	4	0	3

حسب هذا الجدول فإن: $x \equiv 1\ [5]$ أو $x \equiv 3\ [5]$

2–الجواب الصحيح هو (أ) .

<u>طريقة أولى</u>: القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 34 (و هو 2) من قواسم العدد2 ، فالمعادلة (1) تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة.

المعادلة (1) تكافئ المعادلة $12x + 17y = 1$ ... (2) و لدينا: $12(17k-7)+17(5-12k)=204k-84+85-204k = 1$

<u>طريقة ثانية</u>: يمكن حل المعادلة (2) انطلاقا من حل خاص لها و باستعمال مبرهنة غوص.

<u>طريقة ثالثة</u>: يمكن حل المعادلة (2) باستعمال خواص الموافقة في مجموعة الأعداد الصحيحة.

3–الجواب الصحيح هو(جـ).

<u>طريقة أولى</u>: يمكن أن نكتب: $N=\overline{421}^5 = 1\times5^0+2\times5^1+4\times5^2=111$ و $\overline{303}^6 = 3\times6^0+0\times6^1+3\times6^2=111=N$.

<u>طريقة ثانية</u>: $N=\overline{421}^5 = 1\times5^0+2\times5^1+4\times5^2=111$.

نكتب العدد 111 في النظام ذي الأساس 6 (حسب الجدول أسفله) فنجد: $\overline{303}^6 = 111$.

	المقسوم عليه	6	6	6
111	الحاصل	18	3	0

الباقي	3	0	3

4- الجواب الصحيح هو (ب).

لدينا: $1432^{2011} \equiv 1^{2011}\ [3]$ منه $1432^{2011} \equiv 1\ [3]$ و منه باقي قسمة 1432^{2011} على 3 هو 1 .

5- الجواب الصحيح هو (جـ).

طريقة أولى: يوجد عددان صحيحان α و β بحيث: $\alpha a + \beta b = 1$ حيث $\alpha = n + 1$ و $\beta = n(n+2)$.

فحسب مبرهنة بيزو ، العددان a و b أوليان فيما بينهما ، أي أن : $pgcd(a,b) = 1$.

طريقة ثانية: إذا كان d القاسم المشترك للعددين a و b فإن d يقسم $b^2 - a$ فهو يقسم 1 ومنه $d = 1$.

التمرين السادس:

لكل سؤال أربعة أجوبة مقترحة أحدها- فقط - صحيح، يطلب تحديده مع التبرير.

1) في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$.

(أ) لا تقبل حلولا . (ب) حلولها زوجية .

(جـ)حلولها تحقق $x \equiv 2\ [6]$. (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$.

2) نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية : $24x + 34y = 2$ ...(1) .

(أ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y) = (17k-7 ; 5-12k)$ حيث k عدد صحيح .

(ب) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y) = (-7k ; 5k)$ حيث k عدد صحيح .

(جـ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y) = (34k-7 ; 5-24k)$ حيث k عدد صحيح .

(د) المعادلة (1) لا تقبل حلولا .

3) N عدد طبيعي يكتب : $\overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5 .

العدد N يكتب في النظام ذي الأساس 6 بالشكل : (أ) $\overline{421}$ (ب) $\overline{111}$ (جـ) $\overline{303}$ (د) $\overline{222}$.

4) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1432^{2011} على العدد 3 هو : (أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 .

5) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $a = n(n+2)$, $b = n+1$.

بما أن: $b^2 - a = 1$ فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو : (أ) n (ب) n+1 (جـ) 1 (د)

التمرين السابع:

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على المجال $D =]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$.

1) أوجد نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج إشارة الدالة g .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D =]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1) أ- أوجد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية .

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

جـ - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

1) أ- تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$.

2) أثبت أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

3) ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T) .

<u>الجزء الثالث:</u> نضع من أجل x ينتمي إلى D : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

1) احسب $h'(x)$. ما ذا تستنتج ؟

2) أوجد بالسنتيمتر المربع S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) وبالمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$; $x=e$; $y=0$.

حل التمرين السابع :

<u>الجزء الأول:</u> $D=]0;+\infty[$ و $g(x)=x^2+1-\ln x$

1- أ- إيجاد نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$: بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x^2+1)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(-\ln x)=+\infty$

فإن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$ يمكن أن نكتب: $g(x)=x^2(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x})$

و بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

2-دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها :

$g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$. إشارة $g'(x)$ على D من إشارة $2x^2-1$. $2x^2-1=0$ معناه: $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ أو $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2-1$		+	0	-	0	+	

x	$+\infty$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↗	$+\infty$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ حيث $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2\approx 1.85$.

3- استنتاج إشارة الدالة g :

للدالة g قيمة حدية محلية صغرى عند النقطة ذات الإحداثيين $(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2)$ و بما أن $g(\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ فإن الدالة g موجبة تماما.

<u>الجزء الثاني:</u> $D=]0;+\infty[$ و $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$ ، (C) تمثيلها البياني $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1- أ-إيجاد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0: بما أن: $\lim\limits_{x \to 0^{>}} (x+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x \to 0^{>}} (\frac{\ln x}{x})=-\infty$

فإن: $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)=-\infty$ حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحني (C).

بما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+\frac{1}{2})=+\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{\ln x}{x})=0$ فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

ب- إثبات أن المستقيم (Δ)ذا المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C):

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)-(x+\frac{1}{2})]=\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}=0$ و هو المطلوب .

جـ -دراسة الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ): إشارة $f(x)-(x+\frac{1}{2})$ من إشارة $\ln x$.

من أجل $x=1$ فإن : $\ln x=0$ و (C) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيين : $(1;\frac{3}{2})$.

من أجل $x>1$ فإن : $\ln x>0$ و (C) يقع تماما فوق (Δ) .

من أجل $0<x<1$ فإن: $\ln x<0$ و (C) يقع تماما تحت (Δ) .

2-أ-التحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$:

$$f'(x)=1+\frac{(\frac{1}{x})(x)-(1)(\ln x)}{x^2}=1+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$.

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

بما أن g موجبة تماما على D فإن f' موجبة تماما على D و منه : f متزايدة تماما على Dو جدول تغيراتها هو :

x	$+\infty$	0
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

جـ- كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$: معادلة (T) هي : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث

$f(1)=\frac{3}{2}$ و $f'(1)=\frac{1^2+1-\ln 1}{1^2}=2$ منه : $y=2(x-1)+\frac{3}{2}$ و منه : $(T): y=2x-\frac{1}{2}$.

3-إثبات أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا αفي المجال $]\frac{1}{2};1[$:

لدينا: $f(1)=\frac{3}{2}$ و $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{-\ln 2}{(\frac{1}{2})}=1-2\ln 2\approx -0.39$.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[\frac{1}{2};1]$ و $f(\frac{1}{2})\times f(1)<0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، يوجد عدد حقيقي وحيد α ينتمي إلى المجال $]\frac{1}{2};1[$ بحيث : $f(\alpha)=0$.

4- رسم المنحني (C) والمستقيمين (Δ) و (T) : (في الصفحة الأخيرة)

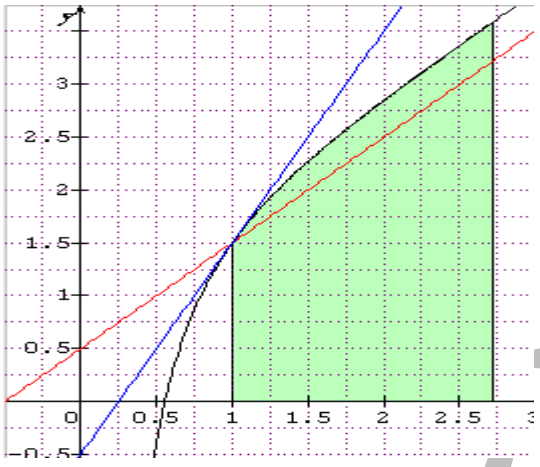
<u>الجزء الثالث:</u> نضع من أجل x ينتمي إلى D: $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

1- حساب $h'(x)$ ، الاستنتاج:

$h'(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2)(\ln x)(\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x} = f(x)$. نستنتج أن الدالة h هي دالة أصلية للدالة f على المجال D .

2-إيجاد مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1 \; ; x = e \; ; y = 0$:

$S = \int_1^e f(x)dx = 4[h(x)]_1^e = 4[h(e) - h(1)] \quad cm^2$ حيث: $h(1) = 1$ و $h(e) = \frac{e^2 + e + 1}{2}$. إذن: $S = 4\frac{e^2 + e - 1}{2} = 2e^2 + 2e - 2 \approx 18.21 \text{ cm}^2$



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية **ثانوية عبد اللافي/عين تاغروت**

بكالوريا تجريبي

الشعبة : تقني رياضي **ماي 2015**

اختبار في مادة : الرياضيات المدة : 4 ساعات ونصف

على المتر شح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط):

I) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المتتالية (Un) حيث: $\begin{cases} U_1 = e^2 \\ U_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{U_n} \end{cases}$

1. أحسب U_2 و U_3
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان : $U_n \succ \frac{1}{e}$
3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان: $\frac{U_{n+1}}{U_n} \prec 1$ ثم استنتج تقارب المتتالية (Un)

II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم: n $V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln U_n$

1. أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول
2. عبر عن V_n بدلالة n ثم استنتج أن: $U_n = e^{6(\frac{1}{2})^n - 1}$
3. أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$
4. أحسب الجداء $P_n = U_1 \times U_2 \times ..... \times U_n$

التمرين الثاني(4 نقاط):

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

نعتبر النقط A , B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A = 3+5i$ و $z_B = -4+2i$ و $z_C = 1+4i$

ليكن S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z

النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = (2-2i)z + 1$

1. عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S
2. أ) عين $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل S

   ب) بين أن المستقيمين (CB') و (CA) متعامدان
3. لتكن M النقطة ذات اللاحقة $z = x+iy$ حيث x و y عددان صحيحان

   بين ان الشعاعين $\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان اذا و فقط اذا كان : $x+3y=2$
4. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $x+3y=2$

   أ) بين أن الثنائية $(-4,2)$ حل خاص للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ب) استنتج مجموعة النقط M التي احداثياها تنتمي الى المجال $[-5,5]$ وتجعل الشعاعين $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان

التمرين الثالث(4 نقاط):

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ نعتبر النقط $A(2,1,3)$ و $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$

1. بين أن النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة

2. ليكن (D) المستقيم ذو التمثيل الوسيطي التالي $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

أ) بين أن المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC)

ب) عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. لتكن H نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوي (ABC)

أ) بين أن النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$

عين طبيعة المجموعة (E) و حدد عناصرها المميزة

ج) لتكن (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

عين طبيعة المجموعة (F) و حدد عناصرها المميزة

د) عين المجموعة $(E)\cap(F)$ و هل النقطة $S(-8,1,3)$ تنتمي الى المجموعة $(E)\cap(F)$

التمرين الرابع(8 نقاط):

f دالة عددية معرفة على $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ كمايلي : $f(x)=\ \ln(2x+1)-x$

(C) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $4cm$)

<u>الجزء الأول</u> : 1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أنه يوجد عدد حقيقي غير معدوم β ينتمي إلى $[1;2]$ يحقق $\ln(2\beta+1)=\beta$

4) اكتب معادلة للمماس للمنحنى (C) عند النقطة O مبدأ المعلم.

5) أنشئ المماس عند O و المنحنى (C)

<u>الجزء الثاني :</u>

1) عين العدد الحقيقي b علما أن الدالة h المعرفة بـ : $h(x)=(x+b)\ \ln(2x+1)-x$

دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(2x+1)$ على المجال $\left]-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

2) احسب بدلالة β المساحة S للحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحور الفواصل .

3) تحقق أن $S=\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ ثم بين أن $0\prec S\prec\frac{3}{8}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4 نقاط):

I) 1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على

2) استنتج باقي قسمة العدد A على 10 حيث: $A = 63\times 9^{2011} - 7^{1432}$

3) برهن أنه من أجل عدد طبيعي n فإن: $3n\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1)3^{2n+1}[10]$

4) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $3n\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$

II) 1) احسب: $PGCD(225;180)$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $225x - 180y = 90$

3) نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث: $a = \overline{52}^{\alpha} = \overline{44}^{\beta}$ ، $b = \overline{252}^{\alpha} = \overline{206}^{\beta}$.

عين: α، β ثم a و b

التمرين الثاني (4 نقاط):

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ حيث

$$P(z) = z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i$$

1) بين أن العدد i حل للمعادلة $P(z)=0$

2) جد الأعداد الحقيقية c,b,a بحيث لكل عدد مركب z يكون : $P(z) = (z-i)(az^2+bz+c)$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ النقط C,B,A لواحقها على الترتيب $z_A = i$ و $z_B = 2+3i$ و $z_C = 2-3i$

1) ليكن R الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$

عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R

2) بين أن النقط C,B,A' على استقامة واحدة

3) عين الكتابة المركبة للتحاكي H الذي مركزه B و يحول A' الى C

التمرين الثالث (8 نقاط):

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة f واستنتج إشارة $f(x)$

2) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = e^{-x}\ln(e^x+1)$. (C_g) التمثيل البياني الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$).

أ/ بين أنه من أجل كل x حقيقي فإن: $g'(x) = e^{-x}f(x)$.

ب/ ادرس تغيرات الدالة g

جـ/ ارسم (C_g)

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $h(x)=\ln(e^{-x}+1)$.

أ/ تحقق أن: $h'(x)=-\dfrac{1}{e^{x}+1}$.

ب/ احسب بالسنتيمتر المربع المساحة $A(\lambda)$ الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g)، محور الفواصل، المستقيمان اللذان معادلتاهما: $x=0$; $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.(يمكنك استعمال التكامل بالتجزئة)

ج/ احسب: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

التمرين الرابع (4 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معتم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

اختر من بين الإقتراحات الموضوعة الأجوبة الصحيحة لكل عبارة مع التعليل :

1) (P) المستوي ذو المعادلة $2x+3y+4z=0$:

أ) المسافة بين o و (P) تساوي $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ ب) الشعاع $\vec{n}\left(1;\dfrac{3}{2};2\right)$ ناظمي للمستوي (P)

ج) المسافة بين o و (P) تساوي 1 د) المستوي (Q) ذو المعادلة $-5x+2y+z=0$ يوازي (P)

2) (P) المستوي ذو المعادلة : $2x+y-z=0$ و (D) المستقيم المار من النقطة $A(1,1,1)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(1,-4,-2)$:

أ) (D) يوازي (P) ب) (D) يعامد (P)

ج) (D) يقطع (P) د) (D) له تمثيل وسيطي $\begin{cases}x=1+t\\y=1-4t\\z=1-2t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

3) (S) هي مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

أ) (S) هي سطح كرة مركزها $\Omega(1,0,2)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$

ب) (S) هي سطح كرة قطرها $[AB]$ حيث $A(0,1,-1)$ و $B(-1,1,3)$

ج) (S) مماسة للمستوي (OCD) في النقطة C حيث $C(0,-1,1)$ و $D(1,-1,0)$

د) (S) مجموعة خالية

4) النقط $A(0,0,-1)$ و $B(-1,1,2)$ و $C(1,1,-4)$:

أ) تعين المستوي (ABC) ب) C,B,A في استقامية

ج) النقطة $G\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{4}{5};\dfrac{-11}{5}\right)$ هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,1);(C,3)\}$

د) المستقيم (AD) له تمثيل وسيطي $\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-1-t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

{ مع تمنياتنا بالنجاح في شهادة البكالوريا 2015 }

الاستاذ: عريوة.ب

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبية
في مادة الرياضيات

الشعبة : تقني رياضي (هندسة كهربائية).

الموضوع الأول

التنقيط	الإجابة النموذجية
	التمرين الأول :
0,25 x 2	I) 1) $u_2=\sqrt{e}$ ؛ $u_3=e^{-\frac{1}{4}}$
0,5	2) إثبات أن : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_n>\frac{1}{e}$
	نبرهن بالتراجع : من أجل $n=1$ لدينا : $u_1=e^2$ و $e^2>\frac{1}{e}$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n=1$
	نفرض أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا $u_n>\frac{1}{e}$ ونبرهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}>\frac{1}{e}$
	لدينا من فرضية التراجع : $u_n>\frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n}>\frac{1}{\sqrt{e}}$ أي : $\sqrt{u_n}>e^{-\frac{1}{2}}$
	ومنه : $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}>e^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}}$ أي : $u_{n+1}>e^{-1}$ أي : $u_{n+1}>\frac{1}{e}$
	ومنه الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .
0,5	3) البرهان أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكون : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$:
	لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}}{u_n}$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}}$
	من السؤال ② لدينا : $u_n>\frac{1}{e}$ ومنه $\sqrt{u_n}>\frac{1}{\sqrt{e}}$ ومنه : $\frac{1}{\sqrt{u_n}}<\sqrt{e}$
	وبالتالي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{e}$ ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n}<e^{-\frac{1}{2}}.e^{\frac{1}{2}}$ أي : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$.
0,25	استنتاج تقارب (u_n) :
	من السؤال ② لدينا $u_n>\frac{1}{e}$ أي (u_n) محدودة من الأسفل .
	من السؤال ③ لدينا : $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ أي $u_{n+1}<u_n$ ومنه (u_n) متناقصة تماما
	نستنتج حسب المبرهنة أن (u_n) متتالية متقاربة .
0,75	II) 1) إثبات أن (v_n) هندسية :
	(v_n) هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $v_{n+1}=q\times v_n$.
	لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln u_{n+1}$
	$v_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln\frac{u_n}{e}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln u_n-\frac{1}{4}$
	أي : $v_{n+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln u_n=\frac{1}{2}v_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $V_1=\frac{3}{2}$

0,25 — 2) عبارة V_n : من أجل كل n من N^* : $V_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ∴

0,5 — استنتاج U_n : من أجل كل n من N^* لدينا $V_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln U_n$

ومنه : $U_n=e^{2V_n-1}$ أي : $U_n=e^{2\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}$.

أي : $U_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

0,25 — 3) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

0,5 — 4) حساب الجداء P_n :

$P_n=U_1\times U_2\times\dots\times U_n$ أي : $P_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)-1}\times e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}\times\dots\times e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$

ومنه : $P_n=e^{6\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n}$ ومنه : $P_n=e^{6\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]-n}$

وبالتالي : $P_n=e^{6\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]-n}$.

التمرين الثاني :

0,5 — 1) طبيعة S وعناصرها المميزة :

S من الشكل : $z'=az+b$ حيث $a=2-2i$ و $b=1$

لدينا : $|a|=2\sqrt{2}$ ، $\arg a=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، $\frac{b}{1-a}=\frac{-1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}i$

ومنه S هو تشابه مباشر مركزه $\Omega\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ ونسبته $2\sqrt{2}$

0,25 — 2) أ) تعيين $z_{B'}$ لاحقة B' صورة B بالتحويل S :

$z'_B=az_B+b$ أي : $z_{B'}=-3+12i$.

0,5 — ب) (CB') و (CA) متعامدان لأن : $\frac{z_{B'}-z_C}{z_A-z_C}=4i$ و $\arg\left(\frac{z_{B'}-z_C}{z_A-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}$

0,75 — 3) لدينا : $M'(2x+2y\,;\,2y-2x-4)$ ومنه $\overrightarrow{CM'}\begin{pmatrix}2x+2y\\2y-2x\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CM'}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعامدان يكافئ $\overrightarrow{CM'}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ أي : $x+3y=2$

1 — 4) أ) الثنائية $(-4,2)$ حل خاص للمعادلة (E) لأن $-4+3\times2=2$.

لدينا : $x+3y=2$ و $-4+3\times2=2$ ومنه $x+3y=-4+3\times2$ أي $x+4=3(2-y)$

3 يقسم $x+4$ أي 3 يقسم $3(2-y)$ ومنه : $x=3k-4$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

بالتعويض نجد : $y=2-k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{(3k-4\,;\,2-k),k\in\mathbb{Z}\}$

1 — ب) تعيين مجموعة النقط M التي إحداثياتها تنتمي إلى $[-2,2]$:

لدينا $-2\leq x\leq2$ و $-2\leq y\leq2$ ومنه $-2\leq3k-4\leq2$ و $-2\leq2-k\leq2$

نجد : $k\in\{0,1,2,3\}$ ومنه مجموعة النقط M هي :

$\{(-4,2)\,;\,(-1,1)\,;\,(2,0)\,;\,(5,-1)\}$.

التمرين الثالث :

1) النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ... 0,5

2) أ) المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) لأن شعاع توجيهه $\vec{u}(2,-3,1)$ ... 0,5
عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\\4\end{pmatrix}=0$

ب) معادلة المستوي (ABC) : 0,5
بما أن (D) عمودي على المستوي (ABC) فإن شعاع توجيه (D) هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) الذي يشمل النقطة A ومنه معادلة المستوي (ABC) هي :

$$2x-3y+z-4=0.$$

3) أ) H مرجح الجملة $\{(A,-2);(B,-1);(C,2)\}$ ومنه $H(-5,-3,5)$ 0,5
وتقاطع (D) مع (ABC) هي حل الجملة

$$\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \\ 2x-3y+z-4=0 \end{cases}$$

بحل الجملة نجد النقطة H (نجد $t=1$ وبالتعويض نجد احداثيات H).

ب) تعيين المجموعة (E) : 0,75
$(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})\cdot(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ يكافئ : $-\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ يكافئ $\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{CB}=0$
ومنه (E) هي المستوي المار من النقطة H والعمودي على المستقيم (CB).

ج) تعيين المجموعة (F) : 0,75
$\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{29}$ يكافئ : $MH=\sqrt{29}$
ومنه (F) هي السطح الكرة التي مركزها النقطة H ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

د) تعيين $(E)\cap(F)$: 0,25
$(E)\cap(F)$ هي دائرة مركزها النقطة H لأن H تنتمي إلى (E) وإلى (F) ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

هـ) هل $S(-8,1,3)$ تنتمي إلى $(E)\cap(F)$: 0,25
$S\in(E)\cap(F)$ إذا وفقط إذا كانت المسافة بين النقطة S ومركز الدائرة H تساوي نصف القطر أي $\sqrt{29}$.

لدينا : $SH=\sqrt{(-5+8)^2+(-3-1)^2+(5-3)^2}$ أي $SH=\sqrt{3^2+4^2+2^2}$ ومنه : $SH=\sqrt{29}$

إذن $S\in(E)\cap(F)$.

التمرين الرابع :

1) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث :

$f'(x) = 1 - \frac{4e^x(e^x+3) - 4e^x \cdot e^x}{(e^x+3)^2}$ أي : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

إشارة $f'(x)$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=0$ يكافئ $e^x-3=0$

أي : $x = \ln 3$

ومنه $f'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{\ln 3\}$ إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ج)

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

د) $f'(x)$ ينعدم عند $x=\ln 3$ ولا يغير إشارته ومنه النقطة $(\ln 3, \ln 3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

(يمكن حساب المشتقة الثانية للدالة f نجد : $f''(x) = 12e^x\frac{(e^x-3)}{(e^x-3)^3}$ والتي تنعدم عند $x=\ln 3$ وتغير إشارتها).

هـ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $f[(\ln 9 - x)] + f(x) = \ln 9 - x - \frac{4e^{\ln 9 - x}}{e^{\ln 9 - x}+3} + x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3} = 2\ln 3$.

ومنه النقطة $(\ln 3, \ln 3)$ هي مركز تناظر المنحنى (C_f).

2) أ) المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ لأن

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4e^x}{e^x+3} = 0$.

ولدينا من أجل x من $\mathbb{R}$: $\frac{-4e^x}{e^x+3} < 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقع تحت (D).

ب) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{12}{e^x+3} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{12}{e^x+3} > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ).

ج) الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1,8 ; -1,7[$ و $f(-1,8)\times f(-1,7) < 0$

لأن : $f(-1,8) \simeq -0,002$ و $f(-1,7) = 0,008$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]-1,8 ; -1,7[$ حيث $f(\alpha)=0$ أي (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $(\alpha, f(\alpha))$

3) أ) إنشاء (C_f)

3) أ) $A(\alpha) = \int_\alpha^0 [-f(x)]\,dx$ نجد بعد الحساب $A(\alpha) = 4[\ln 4 - \ln(e^\alpha+3)]$

ب) نبين أن : $A(\alpha) = 4[\ln(\alpha+2) - 2]$:

لدينا $f(\alpha)=0$ و منه : $\alpha+2=\frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3}$ أي : $e^{\alpha}+3=\frac{4e^{\alpha}}{\alpha+2}$

و لدينا $A(\alpha)=4\left[\ln 4-\ln(e^{\alpha}+3)\right]$ و منه : $A(\alpha)=4\left[\ln 4-\ln\left(\frac{4e^{\alpha}}{\alpha+2}\right)\right]$

أي : $A(\alpha)=4\left[\ln 4-\ln 4e^{\alpha}+\ln(\alpha+2)\right]=4\left[\ln 4-\ln 4-\ln e^{\alpha}+\ln(\alpha+2)\right]$

و بالتالي : $A(\alpha)=4\left[\ln(\alpha+2)-\alpha\right]$

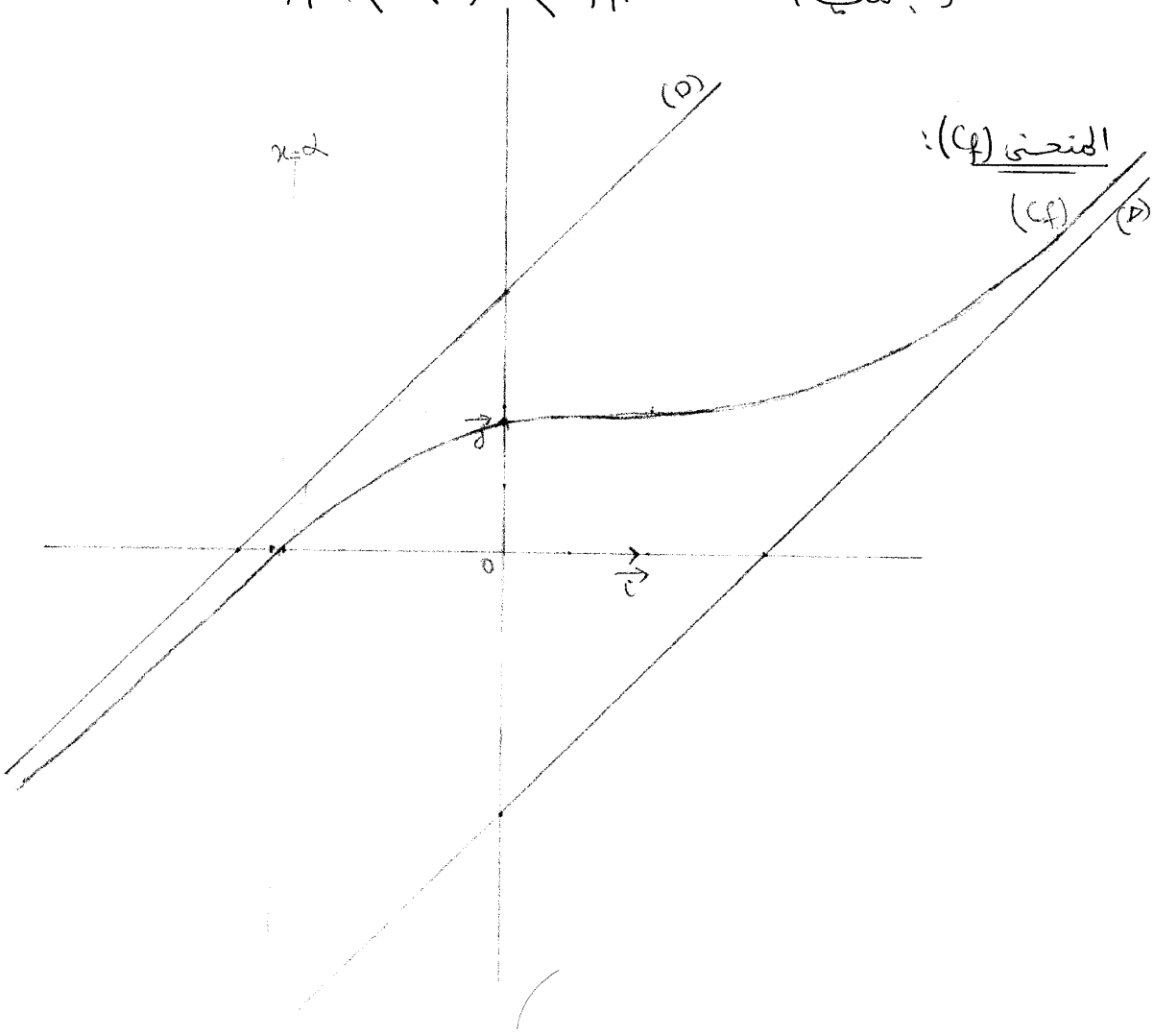
<u>حصر $A(\alpha)$</u> : لدينا : $-1{,}8<\alpha<-1{,}7$ و منه $1{,}7<-\alpha<1{,}8$

و $\ln 0{,}2<\ln(\alpha+2)<\ln 0{,}3$

و : $\ln 0{,}2+1{,}7<\ln(\alpha+2)-\alpha<\ln 0{,}3+1{,}8$

و بالتالي : $0{,}4<A(\alpha)<2{,}4$

<u>المنحنى (C_f)</u> :



الموضوع الثاني .

التنقيط	الإجابة النموذجية

التمرين الأول :

1) دراسة بواقي قسمة 3^n على 11 :

$3^0\equiv 1[11]$ ؛ $3^1\equiv 3[11]$ ، $3^2\equiv 9[11]$ ؛ $3^3\equiv 5[11]$ ، $3^4\equiv 4[11]$ ؛ $3^5\equiv 1[11]$ 0,5

ومنه من أجل كل k من $\mathbb{N}$ لدينا :

$3^{5k}\equiv 1[11]$ ؛ $3^{5k+1}\equiv 3[11]$ ؛ $3^{5k+2}\equiv 9[11]$ ، $3^{5k+3}\equiv 5[11]$ ، $3^{5k+4}\equiv 4[11]$.

2) لدينا $4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv(4\times(3^{5n+3})^2+7\times(3^{5n+3})^4\times 3-8)[11]$ 0,5

$4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv(4\times 5^2+7\times 5^4\times 3-8)[11]$.

$4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv(4\times 3+7\times 9\times 3-8)[11]$.

$4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv(1+2-8)[11]$.

أي :

$4\times 69^{10n+6}+7\times 58^{20n+13}-8\equiv 6[11]$.

3) إيجاد العدد الطبيعي n حيث : $n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv 0[11]$ 1

لدينا :

$n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv(n^2+3^{5n}\times n+3^{5n+3}+5)[11]$.

$n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv(n^2+n+5+5)[11]$.

$n^2+36^{5n}\times n+14^{5n+3}+5\equiv(n^2+n+10)[11]$.

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n^2\equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$n^2+n+10\equiv$	10	1	5	0	8	7	8	0	5	1	10

ومنه : $n=11k+3$ أو $n=11k+7$ مع $k\in\mathbb{N}$.

4) إيجاد قيم β الصحيحة حيث : $80^{3n+2}\times\beta+91^{3n+1}\equiv 0[11]$: 0,5

لدينا : $80^{3n+2}\times\beta+91^{3n+1}\equiv 0[11]$ أي $3^{3n+2}\times\beta+3^{3n+1}\equiv 0[11]$ أي $3^{3n+1}(3\beta+1)\equiv 0[11]$

ومنه $3\beta+1\equiv 0[11]$ إذن : $\beta\equiv 7[11]$ أي $\beta=11k+7$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

استنتاج قيم β حيث : $|\beta|\leq 20$: 0,5

$|\beta|\leq 20$ معناه $|11k+7|\leq 20$ معناه : $-20\leq 11k+7\leq 20$ ومنه $-2\leq k\leq 1$

أي : $k\in\{-2,-1,0,1\}$ وبالتالي : $\beta\in\{-15,-4,7,18\}$.

5) إيجاد (x,y) من $\mathbb{N}^2$ حيث : $14^x+25^y\equiv 8[11]$: 1

لدينا $14^x+25^y\equiv 8[11]$ معناه $3^x+3^y\equiv 8[11]$

لما $x=5k$ فإن $1+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 7[11]$ مستحيلة.

لما $x=5k+1$ فإن $3+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 5[11]$ إذن $y=5k'+3$.

لما $x=5k+2$ فإن $9+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 10[11]$ مستحيلة.

لما $x=5k+3$ فإن $5+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 3[11]$ ومنه $y=5k'+1$.

لما $x=5k+4$ فإن $4+3^y\equiv 8[11]$ ومنه $3^y\equiv 4[11]$ ومنه $y=5k'+4$.

وبالتالي : $(x,y)\in\{(5k+1,5k'+3);(5k+3,5k'+1);(5k+4,5k'+4)\}$ $k\in\mathbb{N}$, $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثاني :

I) 1) . i حل للمعادلة $P(z)=0$ لأن : $P(i) = -i + (4+i) + 13i - 4 - 13i = 0$ ... 0,25

2) $P(z) = (z-i)(az^2+bz+c)$ بعد النشر والمطابقة نجد : $a=1$ ، $b=-4$ ، $c=13$ 0,75

ويكون : $P(z)=(z-i)(z^2-4z+13)$

3) حل المعادلة $P(z)=0$: 1

$P(z)=0$ معناه $\begin{cases} z-i=0 \\ z^2-4z+13=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z=i \quad ...(1) \\ z^2-4z+13=0 \quad ...(2) \end{cases}$

المعادلة (2) لها مميز $\Delta = 36i^2$ ومنه فالمعادلة تقبل حلين هما : $z_1=2-3i$ و $z_2=2+3i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $\{i,\ 2-3i,\ 2+3i\}$

II) 1) عبارة الدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$ هي :

$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z + \frac{4+\sqrt{2}}{2} + \frac{6-5\sqrt{2}}{2}i$.

ومنه نجد $z_{A'} = 2 + (3-2\sqrt{2})i$ 0,5

2) النقط A' ، B ، C على استقامة واحدة لأن لها نفس الفاصلة 2 فهي 0,5

إذن تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $x=2$.

(يمكن استعمال توازي الشعاعين $\overrightarrow{CA'}$ و $\overrightarrow{CB}$) .

3) عبارة التحاكي H : 1

العبارة العامة من الشكل : $z' = az+b$

ولدينا : $\begin{cases} z_B = az_B + b \\ z_C = az_{A'} + b \end{cases}$ بالطرح نجد : $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين نجد : $b = 2-3\sqrt{2} + \left(3 - \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)i$

وبالتالي عبارة التحاكي H هي :

$z' = \frac{3\sqrt{2}}{2}z + (2-3\sqrt{2}) + \left(3 - \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)i$.

التمرين الثالث :

I) 1) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة g' حيث : 0,5

$g'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$. ونلاحظ أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ يكون 0,5

$g'(x)>0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$.

2) $g(1)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = -\infty$ 0,5

وبما أن g متزايدة على $]0,+\infty[$ نستنتج أن $g(x)<0$ على المجال $]0,1[$ و $g(x)>0$ على المجال $]1,+\infty[$.

II) 1) أ) $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$ لأن: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$ 0,25

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته: $x=0$ 0,25

ب) بوضع $\sqrt{x}=t$ يكون: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t^2}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2\ln t}{t} = 0$ 0,5

ومنه: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$ 0,5

ج) لدينا $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (1-x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة ... 1

$y = 1-x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د) لدينا من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f(x) - y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ وبما أن ... 0,5

$\sqrt{x} > 0$ من أجل كل $x > 0$ فإن إشارة $f(x) - y$ من إشارة $\ln x$.

وبالتالي: إذا كان $x \in]0,1[$ فإن $\ln x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ).

إذا كان $x \in]1,+\infty[$ فإن $\ln x > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ).

إذا كان $x = 1$ فإن (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(1,0)$.

3) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث 0,5

$f'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{2\sqrt{x}}\ln x}{(\sqrt{x})^2} - 1$ أي: $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} - 1$ أي: $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$

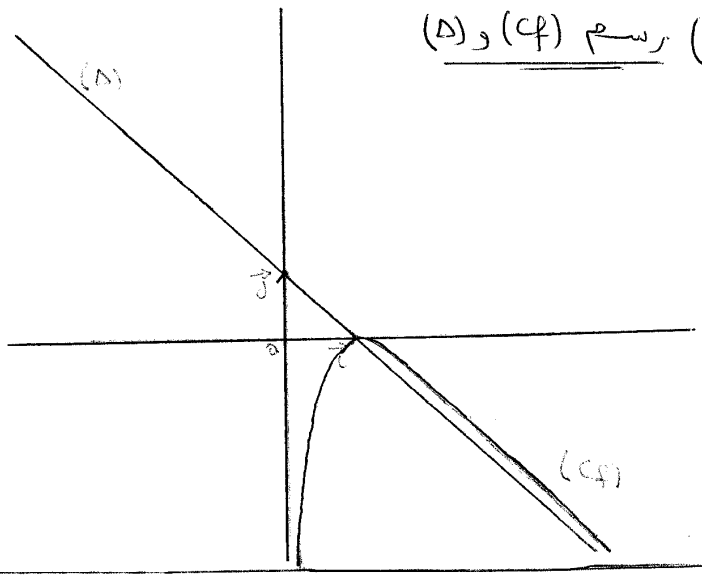
ب) بما أن $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$. 1,25

ونستنتج أن: f متزايدة تماما على المجال $]0,1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

4) رسم (C_f) و (Δ) 0,25+0,5



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
الشعبة : تقني رياضي
بكالوريا تجـــــريبي

دورة : ماي 2014
المدة:4 سا ونصف
ثانوية : 16 شهيدا بليمور

اختبار في مادة الرياضيـــــــات

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (3.5ن)

1. أدرس حسب قيم n الطبيعية بواقي قسمة العدد 3^n على 10 .....(1ن)
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$ .....(0.5ن)
3. عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ و $10\prec n\leq 25$ .....(0.5)
4. ليكن العدد A مكتوب $\overline{xx02102}$ في النظام ذي الأساس 3 و مكتوب $\overline{y67y}$ في النظام ذي الأساس 9
   أ . عيّن x و y .....(0.5ن)
   ب. أحسب A في النظام العشري .....(0.5ن)
   جـ . أكتب A في النظام ذي الأساس 7 .....(0.5ن)

التمرين الثاني:(3.5ن)

نعتبر f الدالة المعرفة على IR كما يلي :

$$f(x)=x+e^{2x}-2e^{x}$$

(c_f) منحني الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الأطوال $2cm$

1. أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ .....(0.5ن)
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f شكل جدول تغيراتها .....(0.25ن)+(0.25ن) +(0.25ن)
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;5;0,6[$ .....(0.5ن)
4. بين أنّ المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحني (c_f) في جوار $-\infty$....(0.25ن)
5. أثبت أنّ المنحني (c_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (D) عين معادلة له.(0.25ن) +(0.25ن)
6. ارسم المنحني (c_f) و المستقيمين (D) و (T).....(0.5ن)
7. ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ .....(0.5ن)

التمرين الثالث: (4.5ن)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=1$, $u_1=2$ و $u_n=2u_{n-1}+3u_{n-2}$.

1. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي : $v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$ حيث $\beta;\alpha$ عددان حقيقيان غير منعدمان .
   أ. أحسب u_2 و u_3 .....(0.5ن)
   ب. أحسب v_1 ; v_2 و v_3 بدلالة α و β .....(0.5ن)
   ج. بيّن أنّه إذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ : $3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$ .....(0.5ن)
2. نضع $\beta=\alpha$:
   أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ....(0.5ن) + (0.25ن)

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n + u_{n-1} = 3^n$ .....(0.5ن)

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . .(0.5ن) + (0.25ن)

ب. استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$ .....(0.5ن)

4. بيّن أنّ : [(v_n) متتالية هندسية] معناه [$\beta = \alpha$ أو $\beta = -3\alpha$] ....(0.5ن)

التمرين الرابع : (3.5ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, نعتبر النقط $A(1;1;0)$, $B(0;1;2)$ و $C(2;-2;1)$.

1. بين أن النقط $A;B$ و C تعين مستويا .....(0.25ن)
2. تحقق أنّ $\vec{n}(2;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ، استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) 0.75
3. ليكن (P) مستوي تمثيله الوسيطي : $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} x = 2 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 1 - \beta \end{cases}$
   - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) .....(0.5ن)
   - بيّن أنّ تقاطع المستويين (ABC) و (P) هو المستقيم (Δ) ، يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له 0.75
4. عيّن (Q) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث : $(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 0$.
5. نفرض أنّ : $(Q): x - 2z + 5 = 0$ .....(0.5ن)
   - أدرس تقاطع المستويات (Q) ، (P) و (ABC) .....(0.75ن)

التمرين الخامس : (5ن)

تعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ النقط $I;D;C;B;A$ ذات اللواحق :

$Z_A = i$; $Z_B = \overline{Z_A}$; $Z_C = -1 + \sqrt{3}i$; $Z_D = \overline{Z_C}$ ، I منتصف $[CD]$ ....(0.25ن)

1. مثل النقط في المعلم .....(0.5ن)
2. أكتب العدد L على الشكل الأسي ، حيث : $L = \dfrac{Z_A - Z_I}{Z_B - Z_I}$ .....(0.5ن)
   - استنتج طبيعة المثلث ABI . .....(0.25ن)
   - عيّن المركز ω و نصف القطر r للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABI .....(0.5ن)
   - أنشئ الدائرة (C) .....(0.25ن)
3. ليكن R دوران مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، h التحاكي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D .
   - عيّن العبارة المركبة لكل من R و h ....(0.5ن) + (0.5ن)
   - ما هي طبيعة التحويل hoR محددا عبارته المركبة و عناصره . (0.25ن)+(0.5ن)+(0.5ن)
4. عيّن معادلة (C') صورة (C) بالتحويل hoR مستعملا طريقتين . (0.25ن)+(0.25ن)

بالتوفيق . بن درميع نبيلة

مناقشة الإختبار(بكالوريا تجريبي 3تق ر)

حل التمرين الأول:

1. دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 10

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$3^n \equiv .[10]$	1	3	9	7

2. إثبات أنّ $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$

$33\equiv 3[10]$ معناه $33^{16n}\equiv 1[10]$

$$33^{16n+2}\equiv 33^{16n}\times 33^2[10]$$

$$\equiv 3^2[10]\equiv 9[10]$$

و لدينا $109\equiv 3^2[10]$

$$109^{8n+1}\equiv 3^{16n+2}[10]\equiv 9[10]$$

$$33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 9-18-11[10]$$

$$\equiv 0[10]$$

3. تعيين الأعداد الطبيعية n حيث:

$$7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]/10\prec n\leq 25$$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
الباقي هو	0	2	8	6

$n=4k/10\prec 4k\leq 25$ ومنه $k\in\{3;4;5;6\}$ معناه

$$n\in\{12;16;20;24\}$$

4. أ. $(x;y)=(2;2)$

ب. $A=2009$

جـ. كتابة A في النظام ذي الأساس 8 .

$$2009=3\times 8^3+7\times 3^2+3\times 8+1$$

و منه A يكتب $\overline{3731}$ في النظام ذي الأساس 8 .

حل التمرين الثاني :

1. حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2. حساب $f'(x)$

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=2e^{2x}-2e^x+1$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. $f(0.5)=-0.07$; $f(0.6)=0.02$

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0.5;0.6]$

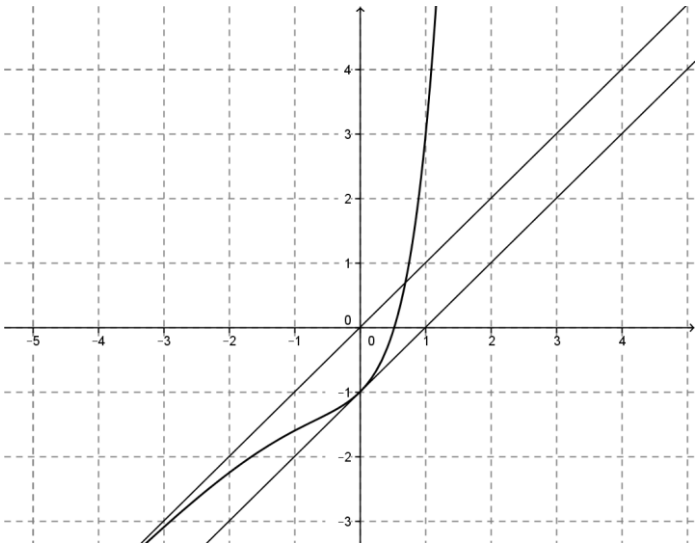
$f(0.5)\times f(0.6)\prec 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $[0.5;0.6]$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$ و منه $y=x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

3. $f'(x_0)=1$ معناه $x_0=0$ و منه (C_f) يقبل مماسا و حيدا عند النقطة $A(0;-1)$.

$$(\Delta): y=x-1$$

4. الرسم



المناقشة البيانية :

- $m\geq 0$: المعادلة تقبل حل وحيد موجب .
- $m=-1$: المعادلة تقبل حل معدوم .
- $m\prec -1$: المعادلة لا تقبل حلول .
- $-1\prec m\prec 0$: المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة .

حل التمرين الثالث:

1. $v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$

أ. حساب الحدود : $u_3=20$; $u_2=7$.

ب. حساب الحدود : $v_3;v_2;v_1$ ، $v_1=2\alpha+\beta$ ، $v_2=7\alpha+2\beta$ ، $v_3=20\alpha+7\beta$

جـ. $v_3;v_2;v_1$ حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه $v_2^2=v_1\times v_3$

معناه $(7\alpha+2\beta)^2=(2\alpha+\beta)(20\alpha+7\beta)$

معناه $9\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2=0$

$$3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$$

2. نضع $\beta=\alpha$:

أ. لدينا $v_n = \alpha u_n + \alpha u_{n-1}$ معناه

$$v_n = \alpha(u_n + u_{n-1}) \cdots\cdots (1)$$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$
$$= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} + u_n)$$
$$= \alpha(3u_n + 3u_{n-1})$$

و منه

$$v_{n+1} = 3v_n$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ و حدها الأول $v_1 = 3\alpha$.

ب. لدينا : $v_n = v_1 \times 3^{n-1}$ و منه $v_n = 3\alpha \times 3^{n-1}$

معناه : $v_n = \alpha \times 3^n \cdots\cdots (2)$ من (1)و(2)

نستنتج أنّ: $\alpha(u_n + u_{n-1}) = \alpha \times 3^n$ معناه

$$u_n + u_{n-1} = 3^n$$

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية .

لدينا $v_n = \alpha u_n - 3\alpha u_{n-1} \cdots\cdots (1)$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - 3u_n)$$
$$= \alpha(2u_n + 3u_{n-1} - 3u_n)$$
$$= \alpha(-u_n + 3u_{n-1})$$

و منه

$$= -\alpha(u_n - 3u_{n-1})$$
$$v_{n+1} = -v_n$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -1$ و حدها الأول $v_1 = -\alpha$.

ب. لدينا $v_n = -\alpha(-1)^{n-1}$ و منه

$v_n = \alpha(-1)^n \cdots\cdots (2)$ من (1) و (2)نستنتج أنّ:

$\alpha(u_n - 3u_{n-1}) = \alpha(-1)^n$ و منه

$$u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$$

4. (v_n) متتالية هندسية معناه $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

$\Delta = 16\beta^2$ معناه $\alpha = \beta$ و $\alpha = -3\beta$

حل التمرين الرابع :

1. إثبات أنّ $C;B;A$ تعين مستويا .

$\overrightarrow{AB}(-1;0;2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-3;1)$

$\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطيا

2. $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB} = 0$ و منه $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي (ABC)

$\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC} = 0$

$$(ABC): 2x + y + z - 3 = 0$$

3. ليكن (P) مستوي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha + 2\beta \cdots\cdots (1) \\ y = 1 + 2\alpha \\ 2z = 2 - 2\beta \cdots\cdots (2) \end{cases} \qquad (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

بجمع (1) و (2) نجد $x + 2z = \alpha + 4$ بالتعويض $\alpha = x + 2z - 4$

في(3) نجد : $2x - y + 4z - 7 = 0$

$(P): 2x - y + 4z - 7 = 0$.

- تقاطع المستويين (ABC) و (P) .

$$\begin{cases} 2x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y + 4z - 7 = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}(2;1;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC)

$\vec{n}(2;-1;4)$ شعاع ناظمي لـ (P)

$\vec{n_1}\bullet\vec{n_2} \neq 0$ و منه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق

مستقيم (Δ) : $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{4}t + \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{2}t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

4. (Q) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء

$$\left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{BA} = 0$$

(Q) مستوي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له .

- تقاطع المستويات (Q) ، (P) و (ABC) .

$$(ABC)\cap(P)\cap(Q) = (\Delta)\cap(Q)$$

$\vec{u}\left(-\frac{5}{4};\frac{3}{2};1\right)$ شعاع توجيه (Δ).

$\vec{n}(1;0;-2)$ شعاع ناظمي لـ (Q) .

$\vec{n};\vec{u}$ غير مرتبطان خطيا .

$-\frac{5}{4}t+\frac{5}{2}-2t+5=0$ و منه $t=\frac{30}{13}$

بالتعويض في الجملة نجد

$$\begin{cases} x=-\frac{5}{13} \\ y=-\frac{20}{13} \\ z=\frac{30}{13} \end{cases}$$ و منه

$$(Q)\cap(ABC)\cap(P)=\left\{H\left(-\frac{5}{13};-\frac{20}{13};\frac{30}{13}\right)\right\}$$

حل التمرين الخامس :

$$L=\frac{Z_A-Z_I}{Z_B-Z_I}$$

1. $Z_I=\frac{Z_C+Z_D}{2}=-1$ و منه $L=\frac{1+i}{1-i}$

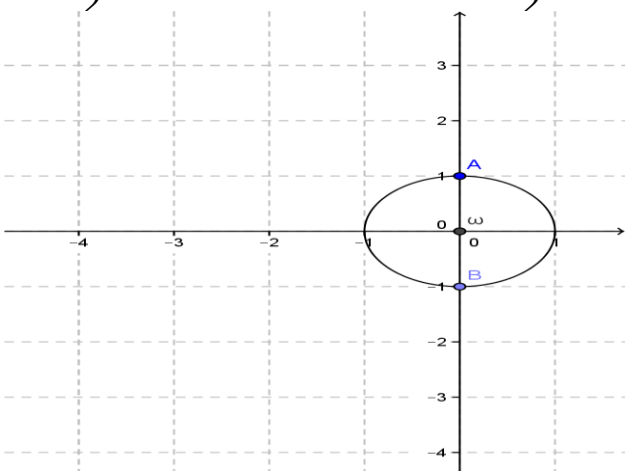
و منه $|L|=1 \quad ; \quad \arg(L)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ومنه $L=e^{i\frac{\pi}{2}}$

- طبيعة المثلث ABI .

لدينا $AI=BI$ و $(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IA})=\frac{\pi}{2}$ و منه ABI مثلث متساوي الساقين و قائم في I .

- تعيين المركز ω و نصف القطر r للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABI .

$Z_\omega=\frac{Z_A+Z_B}{2}=0$ معناه $\omega(0;0)$ ، $r=\frac{AB}{2}=1$



3 $(Z'-Z_I)=i(Z-Z_I)$ و منه

$$R(M)=M':\quad Z'=iZ+i-1$$

$\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ معناه $\begin{cases} Z_C=aZ_A+b \\ Z_D=aZ_B+b \end{cases}$

$a=\frac{Z_C-Z_D}{Z_A-Z_B}=\frac{2\sqrt{3}i}{2i}=\sqrt{3}$ ، $a=\sqrt{3}$ و $b=-1$

$$h(M)=M':\ Z'=\sqrt{3}Z-1$$

- طبيعة التحويل hoR .

hoR هو تشابه مباشر نسبته $k=\sqrt{3}$ و زاويته $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

- عبارته المركبة و عناصره :

$$M(Z)\xrightarrow{R}M_1(Z_1)\xrightarrow{h}M'(Z')$$

$Z_1=iZ+i-1$ و

$Z'=\sqrt{3}Z_1-1=\sqrt{3}(iZ+i-1)-1$ و منه

$$Z'=\sqrt{3}iZ-\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i$$

المركز هو النقطة الصامدة Ω حيث :

$Z_\Omega=\frac{-\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ ، $\Omega\left(\frac{-\sqrt{3}-4}{4};\frac{-3}{4}\right)$

طريقة-1-

(C') دائرة مركزها ω' بحيث: $hoR(\omega)=\omega'$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$

$Z'_{\omega'}=-\sqrt{3}-1+\sqrt{3}i$ و منه $\omega'(-\sqrt{3}-1;\sqrt{3})$

$$(C'):(x+1+\sqrt{3})^2+(y-\sqrt{3})^2=3$$

طريقة -2-

(C_1) صورة (C) بالدوران R

(C_1) مركزها ω_1 حيث: $R(\omega)=\omega_1$ و نصف قطرها $r=1$ حيث: $Z_{\omega_1}=iZ_\omega+i-1=i-1$

(C') صورة (C_1) بالتحاكي h

(C') مركزها ω حيث : $h(\omega_1)=\omega$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$ حيث :

$$Z_{\omega'}=\sqrt{3}(i-1)-1$$
$$=-1-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$$

$$(C'):(x+1+\sqrt{3})^2+(y-\sqrt{3})^2=3$$

امتحان مقترح لتلاميذ السنة النهائية	المادة : رياضيات	الشعبة : تقني رياضي	المدة: 4 ساعات و 30دقيقة

الموضوع الأول:

التمرين الأول :

لكل سؤال أربعة أجوبة مقترحة أحدها فقط – صحيح، يطلب تحديده مع التبرير.

1 - في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$.

(أ) لا تقبل حلولا . (ب) حلولها زوجية .

(جـ)حلولها تحقق $x \equiv 2\ [6]$. (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$.

2 –نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية : $24x + 34y = 2$ ...(1) .

(أ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(17k-7\ ;\ 5-12k)$.

(ب) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(-7k\ ;\ 5k)$.

(جـ)حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(34k-7\ ;\ 5-24k)$.

(د) المعادلة (1) لا تقبل حلولا .

3- N عدد طبيعي يكتب : $\overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5 .

العدد N يكتب في النظام ذي الأساس 6 بالشكل : (أ) $\overline{421}$ (ب) $\overline{111}$ (جـ) $\overline{303}$ (د) $\overline{222}$.

4- باقي القسمة الإقليدية للعدد 1432^{2011} على العدد 3 هو : (أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 .

5- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $a = n(n+2)$, $b = n+1$.

بما أن: $b^2 - a = 1$ فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو : (أ) n (ب) n+1 (جـ) 1 (د) 2 .

التمرين الثاني :

الجزءالأول:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^3 + 2z^2 - 16 = 0 \ldots\ldots (E)$.

1)-أ- بين أن2 حل للمعادلة (E).

ب- أوجد الأعداد الحقيقية a،b،c بحيث يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل: $(z-2)(az^2+bz+c=0)=0$.

جـ- اكتب حلول المعادلة (E) على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

الجزء الثاني:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) علم النقاط: A، B، D ذات اللواحق: $z_A = -2-2i$ ، $z_B = 2$ ، $z_D = -2+2i$.

2) احسب اللاحقة z_C للنقطة C حيث ABCD متوازي أضلاع. علم النقطة C.

3) لتكن E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ، ولتكن F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ – احسب: z_E ، z_F لاحقتي النقطتين: E، F على الترتيب.

ب – علّم النقطتين: E، F .

4) أ – تحقق أن: $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.

ب – استنتج طبيعة المثلث AEF.

التمرين الثالث:

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على المجال $D=]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1- أوجد نهايتي الدالة g على يمين **0** و عند $+\infty$.

2-ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- استنتج إشارة الدالة g .

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D=]0;+\infty[$ كالتالي : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln(x)}{x}$.

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$.

1- أ- أوجد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين **0**. فسر هندسيا النتيجة الثانية .

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) .

جـ - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ).

2-أ- تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$.

3- أثبت أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

4- ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T).

الجزء الثالث: نضع من أجل x ينتمي إلى D : $h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

1- احسب $h'(x)$. ما ذا تستنتج ؟

2- أوجد بالسنتيمتر المربع S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) وبالمستقيمات التي معادلاتها: $x=1\ ;\ x=e\ ;\ y=0$.

التمرين الرابع :

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1- نعتبر المستوي **(P)** المار بالنقطة **B(1;-2;1)** والشعاع $\vec{n}(-2;1;5)$ ناظمي له، و المستوي **(R)** الذي معادلته: **x+2y-7=0**.

أ- بين أن المستويين **(P)** و **(R)** متعامدان .

ب- برهن أن تقاطع المستويين **(P)** و **(R)** هو المستقيم **(D)** المار من النقطة **C(-1;4;-1)** و $\vec{u}(2;-1;1)$ شعاع توجيه له.

جـ - احسب **d1** ،**d2** ، **d3** المسافات بين النقطة **A(5;-2;-1)** والمستويات **(P)** ، **(R)** ، **(D)** على الترتيب .

2-لتكن النقطة **M(1+2 t ; 3-t ; t)** حيث **t** عدد حقيقي و نعرف على IR الدالة العددية ϕ كما يلي: $\phi(t)=\sqrt{6t^2-24t+42}$.

أ- أثبت أن: $AM=\phi(t)$

ب-ادرس تغيرات الدالة ϕ .

جـ- استنتج أن المسافة بين **A** و **(D)** هي $3\sqrt{2}$.

التمرين الخامس :

نفرض في ما يلي أن **n** عدد طبيعي غير معدوم.

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم **n** : $1+5+9+\ldots+(4n-3)=2n^2-n$.

2-نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة ، كما يلي:

$$\begin{cases} u_2+u_4=18 \\ u_6+u_8+u_{10}+u_{12}=132 \end{cases}$$

- أوجد الأساس **r** و الحد الأول u_1 لهذه المتتالية ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3-نضع : $S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$. عبر عن S_n بدلالة **n** .

الموضوع الثاني :

التمرين الأول:

n عدد طبيعي .

1- ادرس بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 .

2- عين قيم n التي من أجلها يكون العدد $16^{3n}+16^n-5$ قابلا القسمة على 9 .

3- أثبت أن العدد 7^n+3n+8 من مضاعفات العدد 9 .

التمرين الثاني:

التمرين يحتوي على أربعة أسئلة، و لكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة ، المطلوب وضع العلامة (x) في المكان المناسب، و دون تبرير.

رقم السؤال	نص السؤال	الإجابات المقترحة	صح	خطأ
1	من أجل كل عدد حقيقي θ و من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(e^{i\theta})^n$ يساوي :	$e^{in\theta}$		
		$\cos(\theta)^n+i\sin(\theta)^n$		
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$		
2	القسم التخيلي للعدد المركب Z يساوي:	$\frac{Z+\bar{Z}}{2}$		
		$\frac{Z-\bar{Z}}{2}$		
		$\frac{Z-\bar{Z}}{2i}$		
3	Z عدد مركب قسمه الحقيقي x و قسمه التخيلي y . إذا كان Z تخيليا صرفا فإن:	$\lvert z\rvert=y^2$		
		$\lvert z\rvert=-y^2$		
		$\lvert z\rvert=-z^2$		
4	الأعداد المركبة $c;b;a$ لواحق النقط $C;B;A$ على الترتيب . من أجل $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$ لدينا:	$BC=2AC$		
		$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA^2$		
		$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /(k\in Z)$		

التمرين الثالث:

لتكن الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) تحقق من أن: $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل x من IR واستنتج أن الدالة f فردية.

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3) أ- بين أن من أجل كل x من IR : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f .

جـ- حدد الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$.

4) أ- بين أن (D) مستقيم مقارب للمنحني (C).

ب- أنشئ المستقيم (D) و المنحني (C).

5) أ - احسب مشتقة العبارة $x-\ln(e^x+1)$ من أجل كل x من IR ثم استنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و المستقيمات التي معادلاتها: $x=-1;x=0;y=1-\frac{1}{2}x$.

التمرين الرابع :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة: $2x+y-2z+4=0$ و النقط $A(3;2;6)$ و $B(1;2;4)$ و $C(4;-2;5)$.

1-أ -تحقق أن المثلث ABC قائم .

ب– بين أن النقط A و B و C تعين المستوي (P).

جـ- اكتب جملة معادلات وسيطية للمسقيم (Δ) المار بالنقطة O و العمودي على المستوي (P).

2- لتكن L المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P).

أ-احسب الطول OL .

ب-احسب V حجم رباعي الوجوه $ABCO$.

3 -لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;1);(C;1);(O;3)\}$ و E مركز ثقل المثلث ABC .

أ-أوجد إحداثيات النقطتين G و E .

ب-تأكدأن G منتصف $[OI]$.

جـ-حدد d المسافة بين النقطة G و المستوي (P).

4- نشير بالرمز (Γ) لمجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{OM}\|=6$.

أ-أثبت أن (Γ) سطح كرة، يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

ب- ما هي مجموعة النقط المشتركة بين (Γ) و (P) ؟ (مع التبرير).

التمرين الخامس :

$(t_n),(w_n),(v_n),(u_n)$ أربع متتاليات عددية معرفة على N كما يلي:

$$t_n=3u_n+8v_n\ ;w_n=v_n-u_n\ ;v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4};u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3};v_0=12;u_0=1.$$

1-برهن بالتراجع أن المتتالية (t_n) ثابتة على N.

2-بين أن (W_n) متتالية هندسية، ثم اكتب w_n بدلالة n.

3-تحقق أن (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة.

4-علما أن (U_n) و (V_n) متقاربتان، أوجد نهاية كل متتالية مما سبق.

5-ما ذا تستخلص من السؤالين 2 و 4 ؟

حل الموضوع الأول :

حل التمرين الأول :

1-الجواب الصحيح هو (د).

طريقة أولى:

يمكن أن نكتب: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$ معناه : $x + 3-5x \equiv 0\ [5]$

$x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$ منه : $x^2 - 4$

منه : $(x-1)(x-3) \equiv 0\ [5]$ ومنه : $x \equiv 1\ [5]$ أو $x \equiv 3\ [5]$

طريقة ثانية:

0	1	2	3	4
0	1	4	4	1
0	2	1	2	0
3	0	4	0	3

حسب هذا الجدول فإن: $x \equiv 1\ [5]$ أو $x \equiv 3\ [5]$

2-الجواب الصحيح هو (أ) .

طريقة أولى:

القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 و 34 (و هو 2) من قواسم العدد2 ، فالمعادلة (1) تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة.

المعادلة (1) تكافئ المعادلة $12x + 17y = 1$ ... (2)

و لدينا: $12(17k-7)+17(5-12k)=204k-84+85-204k = 1$

طريقة ثانية: يمكن حل المعادلة (2) انطلاقا من حل خاص لها و باستعمال مبرهنة غوص.

طريقة ثالثة: يمكن حل المعادلة (2) باستعمال خواص الموافقة في مجموعة الأعداد الصحيحة.

3-الجواب الصحيح هو(جـ).

طريقة أولى: يمكن أن نكتب:

$N=\overline{421}^5 = 1\times5^0+2\times5^1+4\times5^2=111$ و

$\overline{303}^6 = 3\times6^0+0\times6^1+3\times6^2=111=N$.

طريقة ثانية: $N=\overline{421}^5 = 1\times5^0+2\times5^1+4\times5^2=111$.

نكتب العدد 111 في النظام ذي الأساس 6 (حسب الجدول أسفله) فنجد:

$111=\overline{303}^6$.

4- الجواب الصحيح هو (ب).

لدينا: $1432^{2011} \equiv 1\ [3]$ منه $1432^{2011} \equiv 1\ [3]$ و منه باقي قسمة 1432^{2011} على 3 هو 1 .

5- الجواب الصحيح هو (جـ).

طريقة أولى: يوجد عددان صحيحان α و β بحيث: $a + \beta b = 1$

α حيث $\alpha = n + 1$ و $\beta = n(n+2)$.

فحسب مبرهنة بيزو ، العددان a و b أوليان فيما بينهما ، أي أن : $pgcd(a,b)=1$.

طريقة ثانية: إذا كان d القاسم المشترك للعددين a و b فإن d يقسم $a - b^2$ فهو يقسم 1 ومنه $d = 1$.

حل التمرين الثاني :

الجزء الأول:

$$z^3 + 2z^2 - 16 = 0 \qquad (E)$$

1)-أ- تبيين أن 2 حل للمعادلة (E) :

لدينا: $(2)^3 + 2(2)^2 - 16 = 8 + 8 - 16 = 0$.

ب- إيجاد الأعداد الحقيقية a،b،c : لدينا:

$(z-2)(az^2+bz+c = az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c$.

بالمطابقة نجد : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \\ c - 2b = 0 \\ -2c = -16 \end{cases}$ منه $\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 8 \end{cases}$

جـ-كتابة حلول المعادلة (E) على الشكلين الجبري و الأسي :

المعادلة (E) تكافئ : $z = 2$ أو $z^2 + 4z + 8 = 0$.

المعادلة $z^2 + 4z + 8 = 0$ مميزها: $\Delta = 4^2 - 4(8) = -16 = (4i)^2$ لها حلان مترافقان z_1 و z_2 حيث:

$$z_1 = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i \ ; z_2 = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i \ .$$

حلول المعادلة (E) هي: $-2+2i$; $-2-2i$; 2 (على الشكل الجبري).

لدينا: $\sqrt{(2)^2+(2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

بما أن 2 عدد حقيقي موجب تماما فإن: $2 = 2e^{i(0)} = 2e^{i(2\pi)}$.

يمكن أن نكتب:

$$\frac{-2}{2\sqrt{2}}i) = 2\sqrt{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{-\sqrt{2}}{2}i) = 2\sqrt{2}e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$$

.

$$\frac{2}{2\sqrt{2}}i) = 2\sqrt{2}(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2\sqrt{2}e^{i(\pi-\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$$

الجزء الثاني:

1) تعليم النقاط: A، B، D ذات اللواحق: $z_A = -2-2i$ ، $z_B = 2$ ، $z_D = -2+2i$:

2) حساب اللاحقة z_C للنقطة C حيث ABCD متوازي أضلاع، تعليم النقطة C:

ABCD متوازي أضلاع معناه : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ حيث : $\overrightarrow{AB}(4;2)$ و منه : $x_C + 2 = 4$ و $y_C - 2 = 2$ ، ومنه: $C(2;4)$.

إذن: $z_C = 2 + 4i$.

3) أ –حساب: z_E ، z_F لاحقتي النقطتين: E، F على الترتيب:

لدينا: $z_E - Z_B = e^{i(-\frac{\pi}{2})}(z_C - z_B) = -i(4i) = 4$ منه:

$z_E = Z_B + 4 = 6$.

ولدينا: $z_F - Z_D = e^{i(\frac{\pi}{2})}(z_C - z_D) = i(4+2i) = -2+4i$ منه:

$z_F = Z_D - 2 + 4i = -4 + 6i$.

ب – تعليم النقطتين: E، F :

4) أ – التحقق أن: $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$:

لدينا:

$$\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = \frac{(-4+6i)-(-2-2i)}{(6)-(-2-2i)} = \frac{-2+8i}{8+2i} = \frac{i(2i+8)}{(8+2i)} = i$$

ب – استنتاج طبيعة المثلث AEF:

بما أن: $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ فإن : $AE = AF$ و $(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; ; k \in Z$.

إذن: المثلث ABC قائم في A و متقايس الساقين .

ملاحظة: نعتذر لكم عن عدم تمكننا من رسم الشكل حسب معطيات هذا التمرين.

حل التمرين الثالث :

الجزء الأول: $D =]0;+\infty[$ و $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

1- أ- إيجاد نهايتي الدالة g على يمين 0 و عند $+\infty$:

بما أن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x^2+1) = 1$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (-\ln x) = +\infty$ فإن:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = +\infty$$

يمكن أن نكتب: $g(x) = x^2(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x})$ و بما أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

فإن: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2-دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها :

$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$. إشارة $g'(x)$ على D من إشارة $2x^2 - 1$.

$2x^2 - 1 = 0$ معناه: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ أ

.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 1$		+	0	-	0	+	

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ حيث $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 1.85$.

3- استنتاج إشارة الدالة g :

للدالة g قيمة حدية محلية صغرى عند النقطة ذات الإحداثيين $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2)$ و بما أن $g(\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ فإن الدالة g موجبة تماما.

الجزء الثاني: $D =]0;+\infty[$ و $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{x}$ ،

(C) تمثيلها البياني $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث . $\|\vec{i}\| = 2cm$

1- أ-إيجاد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0:

بما أن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (\frac{\ln x}{x}) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$$

حامل محور التراتيب هو مستقيم مقارب للمنحني (C) .

بما أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + \frac{1}{2}) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{\ln x}{x}) = 0$ فإن:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

ب- تبيين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) :

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x + \frac{1}{2})] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ و

هو المطلوب .

جـ -دراسة الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) :

إشارة $f(x) - (x + \frac{1}{2})$ من إشارة $\ln x$.

من أجل $x = 1$ فإن : $\ln x = 0$ و (C) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيين : $(1;\frac{3}{2})$.

من أجل $x > 1$ فإن : $\ln x > 0$ و (C) يقع تماما فوق (Δ) .

من أجل $0 < x < 1$ فإن: $\ln x < 0$ و (C) يقع تماما تحت (Δ) .

2-أ-التحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D :

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$:

$$) = 1 + \frac{(\frac{1}{x})(x) - (1)(\ln x)}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

.

ب – استنتاج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها ، ثم تشكيل جدول تغيراتها :

بما أن g موجبة تماما على D فإن f' موجبة تماما على D و منه f : متزايدة تماما على D و جدول تغيراتها هو :

جـ- كتابة معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1;\frac{3}{2})$: معادلة (T) هي :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $f(1)=\frac{3}{2}$ و

$f'(1)=\frac{1^2+1-\ln 1}{1^2}=2$ منه : $y=2(x-1)+\frac{3}{2}$ و منه :

$(T): y=2x-\frac{1}{2}$.

3-إثبات أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$:

لدينا: $f(1)=\frac{3}{2}$ و $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{-\ln 2}{(\frac{1}{2})}=1-2\ln 2\approx -0.39$

.

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ و

$f(\frac{1}{2})\times f(1)<0$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، يوجد عدد حقيقي

وحيد α ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$ بحيث : $f(\alpha)=0$.

4- رسم المنحني (C) والمستقيمين (Δ) و (T) : (في الصفحة الأخيرة)

الجزء الثالث: نضع من أجل x ينتمي إلى D :

$$h(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

1- حساب $h'(x)$ ، الاستنتاج:

$h'(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2)(\ln x)(\frac{1}{x})=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}=f(x)$.

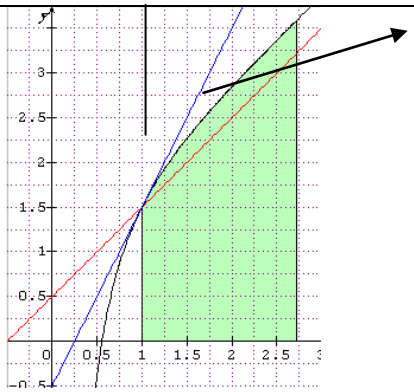
نستنتج أن الدالة h هي دالة أصلية للدالة f على المجال D .

2-إيجاد مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و بالمستقيمات التي معادلاتها: $x=1$; $x=e$; $y=0$:

$$=\int_1^e f(x)dx=4[h(x)]_1^e=4[h(e)-h(1)]\quad cm^2$$

حيث: $h(1)=1$ و $h(e)=\frac{e^2+e+1}{2}$.

إذن: $S=4\frac{e^2+e-1}{2}=2e^2+2e-2\approx 18.21\ cm^2$.



حل التمرين الرابع :

1-أ- تبيين أن المستويين (P) و (R) متعامدان :

$\vec{n}(-2;1;5)$ و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاعان نظميان للمستويين (P) و (R) على الترتيب و $\vec{n}.\vec{n'}=(-2)(1)+(1)(2)+(5)(0)=0$.

ب- البرهان أن تقاطع المستويين (P) و (R) هو المستقيم (D) :

طريقة أولى:

بما أن المستويين (P) و (R) متعامدان فإنهما متقاطعان وفق مستقيم . كي يكون هذا المستقيم هو (D) ، يكفي أن تتحقق الشروط التالية:

$C\in(P)$ و $C\in(R)$ و $\vec{u}.\vec{n}=0$ و $\vec{u}.\vec{n'}=0$.

لدينا: $(-1)+2(4)-7=0$ منه: $C\in(R)$.

و لدينا:

$\vec{n}.\overrightarrow{BC}=(-2)(-2)+(1)(6)+(5)(-2)=0$

منه: $C\in(P)$.

و لدينا: $\vec{u}.\vec{n}=(2)(-2)+(-1)(1)+(1)(5)=0$ و

$\vec{u}.\vec{n'}=(2)(1)+(-1)(2)+(1)(0)=0$.

طريقة ثانية:

نكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) .

معادلة (P) على الشكل: $-2x+y+5z+\alpha=0$ و (P) يشمل النقطة B(1;-2;1) و منه : $-2(1)+(-2)+5(1)+\alpha=0$

و منه : $\alpha=-1$ و منه : $(P): -2x+y+5z+\alpha=0$

المستقيم (D) يتعين بالجملة التالية :

$$\begin{cases}-2x+y+5z-1=0...(1)\\ x+2y-7=0...(2)\end{cases}$$

من(2) نجد: $x=-2y+7$ ، وبالتعويض في (1) نجد:

$(4y-14)+y+5z-1=0$ ، و منه: $5y+5z-15=0$

و منه : $y+z-3=0$ ، ومنه : $z=-y+3$.

إذن: $(D):\begin{cases}x=-2y+7\\ y=y\\ z=-y+3\end{cases}$ ، و بوضع: $y=-m$ نجد:

$$(D):\begin{cases}x=2m+7\\ y=-m\\ z=m+3\end{cases}$$

نلاحظ أن $\vec{u}(2;-1;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C(-1;4;-1) و الموافقة لـ: $m=4$.

طريقة ثالثة:

نتحقق أن المستويين (P) و (R) يشملان المستقيم المار من C(-1;4;-1) و يوازي $\vec{u}(2;-1;1)$.

الجملة: $\begin{cases} x = 2\alpha - 1 \\ y = -\alpha + 4 \\ z = \alpha - 1 \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم المار من C(-1;4;-1) و يوازي $\vec{u}(2;-1;1)$، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

نلاحظ أن: $-2(2\alpha-1)+(-\alpha+4)+5(\alpha-1)-1=0$ و $(2\alpha-1)+2(-\alpha+4)-7=0$ و هو المطلوب.

جـ - حساب d1، d2، d3 المسافات بين النقطة A(5;-2;-1) و (P)، (R)، (D) على الترتيب :

$$d_1 = \frac{|-2(5)+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{18\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{30}}{5} \approx 3.286$$

$$d_2 = \frac{|(5)+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(0)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx 2.683$$

$$d_3 = \sqrt{(d_1)^2 + (d_2)^2} == \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 3.242$$

2-أ- إثبات أن: $AM = \phi(t)$:

لدينا : $AM = \sqrt{[(1+2t)-5]^2+[(3-t)-(-2)]^2+[t-(-1)]^2}$ منه :

$$AM = \sqrt{(2t-4)^2+(5-t)^2+(t+1)^2}$$

و منه : $AM = \sqrt{4t^2-16t+16+25-10t+t^2+t^2+2t+1}$ و منه :

$AM = \sqrt{6t^2-24t+42}$ و هو المطلوب .

ب- حساب $\phi'(t)$:

$$\phi'(t) = \frac{12t-24}{2\sqrt{6t^2-24t+42}} = \frac{6t-12}{\sqrt{6t^2-24t+42}}$$

جـ-تشكيل جدول تغيرات الدالة ϕ ، تفسير هندسي للقيمة الحدية الصغرى للدالة ϕ :

للدالة ϕ قيمة حدية محلية صغرى هي

$\phi(2) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 3.242$ وتمثل المسافة بين النقطة A(5;-2;-1) والمستقيم (D) .

د-استنتاج إحداثيي النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم(D) :

النقطة H هي موضع النقطة M(1+2 t ; 3-t ; t) عندما t =2 و منه: $H(5;1;1)$.

حل التمرين الخامس :

1- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$1+5+9+\ldots+(4n-3)=2n^2-n$

من أجل n=1 فإن المساواة: $1=2(1)^2-(1)$ محققة.

نفرض صحة المساواة $1+5+9+\ldots+(4n-3)=2n^2-n$ ، ونبين صحة المساواة

$1+5+9+\ldots+(4n-[4(n+1)-3] =2(n+1)^2-(n+1)+(3)$.

أي نبين أن: $1+5+9+\ldots+(4n-3)+(4n+1)=2n^2+3n+1$.

بالفعل، $1+5+9+\ldots+(4n-3)+(4n+1)= \underline{1+5+9+\ldots+(4n-3)}+(4n+1)= \underline{2n^2-n}+(4n+1)= 2n^2+3n+1$.

2-إيجاد الأساس r و الحد الأول u_1 لهذه المتتالية ثم كتابة u_n بدلالة n :

لدينا: $\begin{cases} u_2+u_4=18 \\ u_6+u_8+u_{10}+u_{12}=132 \end{cases}$

يمكن أن نكتب:

$$+3r; u_6 = u_1+5r; u_8 = u_1+7r; u_{10} = u_1+9r; u_{12} = u_1+11r$$

بالتعويض في الجملة أعلاه نجد : $\begin{cases} 2u_1+4r=18 \\ 4u_1+32r=132 \end{cases}$ منه

$$\begin{cases} u_1+2r=9...(1) \\ u_1+8r=33...(2) \end{cases}$$

بطرح(1) من (2) نجد $6r=24$ منه $r=4$. و بالتعويض في (1) نجد $u_1 = 9-2r = 1$.

لدينا : $u_n = u_1+(n-1)r = 1+4(n-1) = 4n-3$.

3-التعبير عن S_n بدلالة n :

طريقة أولى:

$$+u_3+\ldots+u_n = 1+5+9+\ldots+(4n-3) = 2n^2-n$$

.

طريقة ثانية:

$$u_1+u_n) = \frac{n}{2}(1+4n-3) = \frac{n(4n-2)}{2} = n(2n-1) = 2n^2-n$$

.

حل الموضوع الثاني :

حل التمرين الأول:

1- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9 :

لدينا: $7^0 \equiv 1\ [9]$ و $7^1 \equiv 7\ [9]$ و $7^2 \equiv 4\ [9]$ و $7^3 \equiv 1\ [9]$.

من أجل n=3k فإن $7^{3k} \equiv 1\ [9]$ و من أجل n=3k+1 فإن $7^{3k+1} \equiv 7\ [9]$ و من أجل n=3k+2 فإن $7^{3k+2} \equiv 4\ [9]$.

2- تعيين قيم n:

$16^{3n}+16^n-5$ يقبل القسمة على 9 معناه : $3^n - 5 \equiv 0\ [9]$

$16^{3n}+16^n$ منه : $1+7^n - 5 \equiv 0\ [9]$ منه : $7^n \equiv 4[9]$ منه :

n=3k+2 حيث k عدد طبيعي .

3-إثبات أن العدد 7^n+3n+8 من مضاعفات العدد 9: نبين أن:

$7^n+3n+8 \equiv 0[9]$.

طريقة أولى					طريقة ثانية			
قيمة n	3k	3k+1	3k+2		8	7	6	5
قيمة 3n	9k	9k+3	9k+6					
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4		6	3	0	6
باقي قسمة 3n على 9	0	3	6		4	7	1	4
باقي قسمة 7^n+3n على 9	1	1	1		1	1	1	1
باقي قسمة 7^n+3n+8 على 9	0	0	0		0	0	0	0

حل التمرين الثاني :

التمرين يحتوي على أربعة أسئلة، و لكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة، المطلوب وضع العلامة (x) في المكان المناسب، و دون تبرير.

رقم السؤال	نص السؤال
1	من أجل كل عدد حقيقي θ و من أجل كل عدد طبيعي n العدد $(e^{i\theta})^n$ يساوي :
2	القسم التخيلي للعدد المركب Z يساوي:
3	Z عدد مركب قسمه x الحقيقي و قسمه التخيلي y . إذا كان Z تخيليا صرفا فإن:
4	الأعداد المركبة a;b;c لواحق النقط A;B;C على التر من أجل $\frac{b-a}{c-a}=i\sqrt{3}$ فإن:

حل التمرين الثالث :

لدينا: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و $D=IR$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- التحقق من أن: $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل x من IR واستنتاج أن الدالة f فردية:

لدينا:

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^{-x}+1}\times\frac{e^x}{e^x}=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1+e^x-1}{1+e^x}=1-\frac{1}{e^x+1}$$

أو

$$1-\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}}=\frac{1}{e^{-x}+1}$$

من أجل $x\in IR$ ، $-x\in IR$ و

$$\frac{1}{e^{-x}+1}+\frac{1}{e^x+1})=2-2[(1-\frac{1}{e^x+1})+\frac{1}{e^x+1}]=2-2(1)=0$$

و هو المطلوب .

2-حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{2}x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{e^x+1})=0$ فإن

: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ منه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

3- أ- تبيين أن: $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$\frac{-2e^x-1+4e^x}{2(e^x+1)^2}=\frac{-e^{2x}+2e^x-1}{2(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}=\frac{-1}{2}(\frac{e^x-1}{e^x+1})^2$$

.

ب-إعطاء جدول تغيرات الدالة f :

جـ- تحديد الوضع النسبي للمنحني (C) **بالنسبة إلى المستقيم** (D)

الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$:

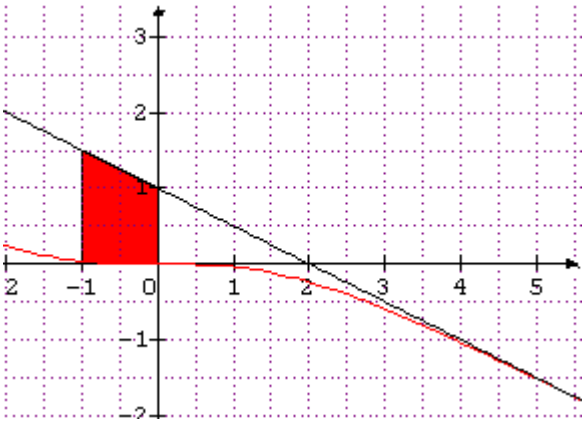
لدينا: $f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)=\frac{-2}{e^x+1}<0$ منه : (C) يقع

تحت (D) .

4) -أ-تبيين أن المستقيم (D) مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{e^x+1}=0$ و هو المطلوب .

ب-إنشاء (C) و (D) :



5) أ - حساب مشتقة العبارة $x-\ln(e^x+1)$ من أجل كل x من IR ثم استنتاج دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ على IR :

لدينا: $[x-\ln(e^x+1)]'=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$.منه :

$x\mapsto x-\ln(e^x+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{e^x+1}$ على IR .

ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيم (D) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=-1$ ، $x=0$:

إذا كانت S هذه المساحة فإن:

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^x}dx=2\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^x}dx=2[x-\ln(e^x+1)]_{-1}^{0}\approx1.24u.a$$

.

حل التمرين الرابع:

$(P):2x+y-2z+4=0$ ، $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

1- أ – التحقق أن المثلث ABC قائم:

طريقة أولى:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;0;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-4;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(3;-4;1)$.

منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2)(1)+(0)(-4)+(-2)(-1)=0$ و هو المطلوب .

طريقة ثانية: $AB^2=4+0+4=8$ و $AC^2=1+16+1=18$ و $BC^2=9+16+1=26$

نلاحظ أن : $AB^2+AC^2=BC^2$ و حسب مبرهنة فيثاغورث فإن المثلث ABC قائم في A .

ب- تبيين أن النقط A و B و C تعين المستوي (P) :

بما أن ABC مثلث فإن النقط A و B و C تعين مستويا. نتحقق أن المستوي (P) يشمل النقط A و B و C .

بالفعل، $2(3)+(2)-2(6)+4=0$ و $2(1)+(2)-2(4)+4=0$ و $2(4)+(-2)-2(5)+4=0$.

جـ-كتابة جملة معادلات وسيطية للمستقيم (Δ) المار بالنقطة O و العمودي على المستوي (P) :

المستقيم (Δ) يشمل O و يوازي $\vec{n}(2;1;-2)$ الشعاع النظم للمستوي (P) .

إذن الجملة التالية هي تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) :

$$\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$$ و $t\in IR$.

2- أ-حساب الطول OL :

OL يمثل بعد النقطة O عن المستوي (P) . منه :

$$OL=\frac{2(0)+(0)-2(0)+4||}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{4}{3}$$.

ب-إيجاد V حجم رباعي الوجوه ABCO :

حجم رباعي الوجوه ABCO قاعدته المثلث ABC القائم في A مساحتها $\frac{AB\times AC}{2}$ و ارتفاعه [OL].

لدينا: $V=\frac{1}{3}(\frac{AB\times AC}{2})\times OL$ منه:

$V=\frac{1}{3}(\frac{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2})\times\frac{4}{3}$ و منه: $V=\frac{8}{3}$.

3 - أ-إيجاد إحداثيات النقطتين G و E :

لدينا: $x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+3x_O}{1+1+1+3}=\frac{(3)+(1)+(4)+3(0)}{6}=\frac{4}{3}$ و

$y_G=\frac{(2)+(2)+(-2)+3(0)}{6}=\frac{1}{3}$ و $z_G=\frac{(6)+(4)+(5)+3(0)}{6}=\frac{5}{2}$.

و لدينا:

$x_E=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{(3)+(1)+(4)}{3}=\frac{8}{3}$ و

$y_E=\frac{(2)+(2)+(-2)}{3}=\frac{2}{3}$ و $z_E=\frac{(6)+(4)+(5)}{3}=5$.

إذن: $G(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2})$ و $E(\frac{8}{3};\frac{2}{3};5)$.

ب-التأكدأن G منتصف [OE]:

طريقة أولى: حسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(E;3);(O;3)\}$ منه G منتصف [OE].

طريقة أخرى: نلاحظ $\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OG}$.

جـ-تحديد d المسافة بين النقطة G و المستوي (P) :

لدينا : $d=\frac{|2(\frac{4}{3})+(\frac{1}{3})-2(\frac{5}{2})+4|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\frac{2}{3}$.

4- أ-إثبات أن (Γ) سطح كرة، تعيين مركزها و نصف قطرها:

$||\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+3\overrightarrow{OM}||=6$ معناه: $||6\overrightarrow{GM}||=6$ منه:

$GM = 1$.

إذن: (Γ) سطح كرة مركزها G و نصف قطرها $R = 1$

ب- مجموعة النقط المشتركة بين (Γ) و (P) : بما أن المسافة بين G مركز الكرة التي سطحها (Γ) و المستوي (P) أصغر تماما من نصف قطرها $(d < R)$ فإن (Γ) و (P) متقاطعان في دائرة.

حل التمرين الخامس :

1-البرهان بالتراجع أن المتتالية (t_n) ثابتة على N :

من أجل $n = 0$ لدينا : $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 99$.

نفرض أن: $t_n = 99$ و نبين أن: $t_{n+1} = 99$.

لدينا:

$$= (u_n + 2v_n) + (2u_n + 6v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n = 99$$

.

2-تبيين أن (W_n) متتالية هندسية ، ثم كتابة w_n بدلالة n :

لدينا:

$$\frac{2v_n}{} = \frac{3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n}{12} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12} w_n$$

.

منه : (W_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$ و حدها الأول

$w_0 = v_0 - u_0 = 11$. منه :

$w_n = w_0 \times q^n = 11 \times (\frac{1}{12})^n$.

3-التحقق أن (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة:

$$> 0 \quad {}_{n+1} - {}_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - {}_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-1}{4} \quad {}_n$$

.

4-إيجاد نهاية كل متتالية:

بما أن (t_n) متتالية ثابتة على N فإن نهايتها هي t_0 و منه:

$\lim_{n \to +\infty} t_n = 99$.

بما أن (W_n) متتالية هندسية أساسها ينتمي إلى المجال $]-1;1[$ فإن نهايتها هي **0** أي $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$.

لدينا: $w_n = v_n - u_n$; $t_n = 3u_n + 8v_n$. فإذا رمزنا بـ : a و b لنهايتي المتتاليتين (U_n) و (V_n) على الترتيب فإن :

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} t_n \\ \lim_{n \to +\infty} (u_n + 3v_n) = \lim_{n \to +\infty} w_n \end{cases}$$ منه: $$\begin{cases} (b - a) = 0 \\ (3a + 8b) = 99 \end{cases}$$ و منه :

$a = b = 9$. أي : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = 9$.

5-استخلاص : المتتاليتان (U_n) و (V_n) إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة و لهما نفس النهاية ، فهما متجاورتان .