# الموضوع الثاني

## التمرين الأوّل: 5 نقاط

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(0;0;1)$ ، $B(2;2;-1)$ ، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

و المستوي $(P)$ المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$ ، $\alpha$ و $\beta$ وسيطيان حقيقيان.

**1.** أ - بيّن أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

**ب -** تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له.

**2.** أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$، ثمّ بيّن أنّ المستويين $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان .

**ب -** بيّن أنّ تقاطع $(ABC)$ و $(P)$ هو المستقيم $(\Delta)$ ذو التمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

**جـ -** احسب المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$، والمسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(P)$، ثمّ استنتج المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$

**3.** $(Q)$ المستوي الذي يشمل النقطة $D$ والعمودي على كل من المستويين $(ABC)$ و $(P)$.

**أ -** اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$.

**ب -** بيّن أنّ المستويات الثلاثة $(ABC)$، $(P)$ و $(Q)$ تتقاطع في نقطة واحدة $H$، ثمّ عيّن إحداثيات $H$ .

**جـ -** احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$.

## التمرين الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3z^2+3z+7=0$.

1) بيّن أنّ العدد $-1$ حلا لهذه المعادلة، ثم جد الحلين الآخرين.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط: $A$ ، $B$ ، $C$ ، $G$ لواحقها على الترتيب: $z_1$ ، $z_2$ ، $z_3$ و $z_4$ حيث $z_1=-1$ ، $z_2=2+\sqrt{3}i$ ، $z_3=2-\sqrt{3}i$ و $z_4=3$ .

ـ اكتب العدد $\dfrac{z_1-z_3}{z_4-z_3}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث $ACG$ .

3) نسمي $(\gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق: $\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG}=12.........(1)$ .

أ ـ أثبت أنّ $G$ هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.

ب ـ بيّن أنّ المساواة $(1)$ يمكن كتابتها على الشكل $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4........(2)$ .

جـ ـ تأكد أنّ النقطة $A$ تنتمي إلى المجموعة $(\gamma)$.

د ـ بيّن أنّه يمكن كتابة المساواة $(2)$ على الشكل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$ ، ثمّ استنتج طبيعة $(\gamma)$ وارسمها.



aziz_mus1@hotmail.fr

**التمرين الثالث:**

**I -** الدّالة $g$ معرّفة على $\mathfrak{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$.

1. **أ -** احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

**ب -** ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها. ( **نأخذ:** $g(1-\sqrt{2})\approx-0,25$ و $g(1+\sqrt{2})\approx1,43$ )

2. **أ -** بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$

**ب -** استنتج إشارة $g(x)$؛ حسب قيم العدد الحقيقي $x$.

**II -** الدّالة $f$ معرّفة على $\mathfrak{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.

$(C_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **أ -** احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**ب -** بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

**جـ -** ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

2. **أ -** بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=g(x)$. ( يرمز $f'$ إلى الدّالة المشتقة للدالة $f$ ).

**ب -** شكّل جدول تغيّرات الدّالة $f$ على $\mathfrak{R}$. ( **نأخذ:** $f(\alpha)\approx-0,9$ )

3. **أ -** بيّن أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

**ب -** مثّل $(\Delta)$ والمماسين والمنحنى $(C_f)$

**جـ -** ناقش بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$: $(x+1)^2+me^x=0$.

**التمرين الرابع:**

I) الدّالة العددية $g$ معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $g$.
2. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العدديـــة $f$ معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

1. أ - احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب - احسب $\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ - بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.

ب - شكل جدول تغيّرات الدّالة $f$.

3. أ - بيّن أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.

ب - ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(D)$.

4. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1-\dfrac{1}{e}$ يمسّ المنحنى في نقطة $A$ يطلب تعيين إحداثيتيها.
5. ارسم $(\Delta)$، $(D)$ و $(C_f)$.

# حل الموضوع الثاني

**التمرين الأوّل:**

**1. أ ـ إثبات أنّ النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.**

لدينا $\overrightarrow{AB}(2;2;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-7;-8)$ و $\frac{-2}{2} \neq \frac{-7}{2}$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعيّن مستويا.

**ب ـ التحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ، ثمّ كتابة معادلة ديكارتية له.**

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=3(2)-2(2)-2=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=3(-2)-2(-7)-8=0$

ومنه $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ وبالتالي $\vec{n}$ ناظم للمستوي $(ABC)$.

**معادلة المستوي $(ABC)$**

$(ABC)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AM}(x;y;z-1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ معناه $3x-2y+z-1=0$ وهي معادلة للمستوي $(ABC)$.

**2. أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ ، ثمّ تبيين أنّ المستويين $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان.**

لدينا
$$\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta.........(1) \\ y=1-2\alpha.............(2) \\ z=4+\alpha+\beta..........(3) \end{cases}$$

بجمع $(1)$ و $(2)$ نجد $x+y=2+\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=\alpha+\beta$

ولدينا من $(3)$ $z-4=\alpha+\beta$ ومنه $x+y-2=z-4$ وعليه $x+y-z+2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$.

**تبيين أنّ المستويين $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان.**

$\vec{n}(3;-2;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(ABC)$ و $\vec{n'}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(P)$.

$\vec{n}.\vec{n'}=3(1)-2(1)-1=0$ وهذا يعني $\vec{n}$ يعامد $\vec{n'}$ ومنه $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان.

**ب ـ تبيين أنّ تقاطع $(ABC)$ و $(P)$ هو المستقيم $(\Delta)$ ذو التمثيل الوسيطي:**

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t\,;t\in\mathbb{R} \\ z=-7+5t \end{cases}$$

بالتعويض في معادلة $(ABC)$ و $(P)$ نجد:

$3(-2+t)-2(-7+4t)+(-7+5t)-1=0$ ومنه $(\Delta)$ محتوى في المستوي $(ABC)$.

و $(-2+t)+(-7+4t)-(-7+5t)+2=0$ ومنه $(\Delta)$ محتوى في المستوي $(P)$.

وعليه تقاطع $(ABC)$ و $(P)$ هو المستقيم $(\Delta)$.

**جـ ـ المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(ABC)$.**

$$d_1=\frac{|3(-3)-2(4)+4-1|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}.$$


aziz_mus1@hotmail.fr

**المسافة بين النقطة $D$ والمستوي $(P)$.**

$d_2=\dfrac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**استنتاج المسافة $d_3$ بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$.**

المستويان $(ABC)$ و $(P)$ متعامدان ومنه حسب نظرية فيتاغورث $d_3{}^2=d_1{}^2+d_2{}^2$

ومنه $d_3=\sqrt{d_1{}^2+d_2{}^2}$ وعليه $d_3=\sqrt{\dfrac{43}{3}}$.

**3.** $(Q)$ المستوي الذي يشمل النقطة $D$ والعمودي على كل من المستويين $(ABC)$ و $(P)$.

**أ ـ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي $(Q)$.**

$(ABC)$ و $(P)$ يتقاطعان في المستقيم $(\Delta)$ وبما أن $(Q)$ يعامد $(ABC)$ و $(P)$ فإنه يعامد المستقيم $(\Delta)$ أي أنّ $\vec{u}(1;4;5)$ شعاع توجيه $(\Delta)$ هو شعاع ناظمي للمستوي $(Q)$.

معادلة المستوي $(Q)$ من الشكل $x+4y+5z+d=0$ وبما أنّ $D$ تنتمي للمستوي $(Q)$ فإنّ $-3+4(4)+5(4)+d=0$ ومنه $d=-33$ وعليه $(Q):x+4y+5z-33=0$.

**ب ـ تبيين أنّ المستويات الثلاثة $(ABC)$، $(P)$ و $(Q)$ تتقاطع في نقطة واحدة $H$.**

بما أنّ $(ABC)\cap(P)=(\Delta)$ فإنّ $(ABC)\cap(P)\cap(Q)=(Q)\cap(\Delta)$.

بما أنّ $(\Delta)$ يعامد $(Q)$ فإنّ $(\Delta)$ و $(Q)$ يتقاطعان في نقطة $H$.

**تعيين $H$ نقطة تقاطع $(\Delta)$ و $(Q)$.**

إحداثيات $H$ هي حل للجملة
$$\begin{cases} x=-2+t \ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ y=-7+4t \ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\ z=-7+5t \ldots\ldots\ldots\ldots(3)\\ x+4y+5z-33=0 \ldots..(4)\end{cases}$$

ومنه $-2+t+4(-7+4t)+5(-7+5t)-33=0$ وعليه $t=\dfrac{7}{3}$ إذن $H\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{14}{3}\right)$.

**جـ ـ حساب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة $D$ والمستقيم $(\Delta)$.**

المسقط العمودي لكل نقطة من $(Q)$ على $(\Delta)$ هي النقطة $H$ لأنّ $(\Delta)$ عمودي على $(Q)$.

وبما أنّ $D$ نقطة من $(Q)$ فإنّ $H$ هي المسقط العمودي للنقطة $D$ على $(\Delta)$.

بالتالي $d\left(D;(\Delta)\right)=DH$.

لدينا $\overrightarrow{DH}\left(\dfrac{10}{3};-\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ ومنه $DH=\sqrt{\dfrac{100}{9}+\dfrac{25}{9}+\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{129}{9}}=\sqrt{\dfrac{43}{3}}$.

**التمرين الثاني:**

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3z^2+3z+7=0$.

**1) إثبات أنّ العدد $-1$ حلا لهذه المعادلة.**

$(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=-1-3-1+7=0$ ومنه العدد $-1$ حل لهذه المعادلة.


aziz_mus1@hotmail.fr

**إيجاد الحلين الآخرين.**

بما أنّ $-1$ حل للمعادلة فإنّ $z^3-3z^2+3z+7=(z+1)(z^2+az+b)$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

$(z+1)(z^2+az+b)=z^3+(a+1)z^2+(a+b)z+b$ بالمطابقة نجد $a+1=-3$ و $a+b=3$ و $b=7$

أي $a=-4$ و $b=7$ ومنه $z^3-3z^2+3z+7=(z+1)(z^2-4z+7)$.

$z^3-3z^2+3z+7=0$ معناه $(z+1)(z^2-4z+7)$ أي $z=-1$ أو $z^2-4z+7=0.....(1)$

نحل المعادلة $(1)$.

$\Delta=16-28=-12=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z=2+\sqrt{3}i$ أو $z=2-\sqrt{3}i$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط: $A$ ، $B$ ، $C$ ، $G$ لواحقها

على الترتيب: $z_1$ ، $z_2$ ، $z_3$ و $z_4$ حيث $z_1=-1$ ، $z_2=2+\sqrt{3}i$ ، $z_3=2-\sqrt{3}i$ و $z_4=3$.

**ـ كتابة العدد $\dfrac{z_1-z_3}{z_4-z_3}$ على الشكل الأسي.**

$$\frac{z_1-z_3}{z_4-z_3}=\frac{-1-2+\sqrt{3}i}{3-2+\sqrt{3}i}=\frac{-3+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{\left(-3+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)}{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)}=\frac{4\sqrt{3}i}{4}=\sqrt{3}i$$

ومنه $\dfrac{z_1-z_3}{z_4-z_3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

**استنتاج طبيعة المثلث $ACG$.**

**لدينا** $\arg\left(\dfrac{z_1-z_3}{z_4-z_3}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ ومنه $\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث $ACG$ قائم في $C$.

3) نسمي $(\gamma)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق: $\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG}=12..........(1)$.

**أ ـ إثبات أنّ $G$ هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.**

$z_4=3=\dfrac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3}=\dfrac{-z_1+2z_2+2z_3}{3}$ ومنه $G$ هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.

**ب ـ إثبات أنّ المساواة $(1)$ يمكن كتابتها على الشكل $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4........(2)$.**

$G$ مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$ إذن من أجل نقطة $M$ من المستوي يكون لدينا

$-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-1+2+2)\overrightarrow{MG}$ أي $-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

المساواة $(1)$ تكافئ $3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=12$ ومنه $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=4$ أي $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$.

**جـ ـ التأكد أنّ النقطة $A$ تنتمي إلى المجموعة $(\gamma)$.**

$A$ تنتمي إلى المجموعة $(\gamma)$ إذا كان $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4$.

لدينا $A(-1;0)$ ، $C\left(2;-\sqrt{3}\right)$ ، $G(3;0)$، $\overrightarrow{GA}(-4;0)$ ، $\overrightarrow{CG}\left(1;\sqrt{3}\right)$.

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4(1)+0\left(\sqrt{3}\right)=-4$ وهذا يعني أنّ $A$ تنتمي إلى المجموعة $(\gamma)$.

د ـ تبيين أنّه يمكن كتابة المساواة $(2)$ على الشكل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$ .

$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$ معناه $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{CG}=-4$ ومعناه $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=-4$

ولدينا $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4$ ومنه $-4+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=-4$ أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$ .

استنتاج طبيعة $(\gamma)$.

$\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG}=12$ تكافئ $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$ وتكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$

بالتالي $(\gamma)$ هي المستقيم المار من $A$ و $\overrightarrow{CG}$ شعاع ناظمي له.

**التمرين الثالث:**

1. أ ـ حساب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ .

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+\left(x^2-1\right)e^{-x}=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\left(x^2-1\right)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} 1+x^2e^{-x}-e^{-x}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=$ (التزايد المقارن) و $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$

ب ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة $g$ .

الدالة $g$ تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}\left(x^2-1\right)$

$$=e^{-x}\left[2x-\left(x^2-1\right)\right]$$

$$=e^{-x}\left(-x^2+2x+1\right)$$

من أجل كل عدد حقيقي $x$، $e^{-x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $\left(-x^2+2x+1\right)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

الدالة $g$ متناقصة تماما على المجالين $\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]$ و $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$ ومتزايدة تماما على المجال $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$

جدول تغيّرات الدالة $g$ .

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $1-\sqrt{2}$ | $0$ | $1+\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | | $0$ $+$ | | $0$ $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty \searrow$ | $0$ | $\searrow g\left(1-\sqrt{2}\right) \nearrow$ | $0$ | $\nearrow g\left(1+\sqrt{2}\right) \searrow$ | $1$ |

2. أ ـ تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

الدالة $g$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]$ و تأخذ قيمها في المجال $\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);+\infty\right[$ ولدينا $g\left(1-\sqrt{2}\right)\simeq -0,25$ إذن $0\in\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);+\infty\right[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]-\infty;1-\sqrt{2}\right]$

ولدينا الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ وتأخذ قيمها في المجال $\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ و $0\in\left[g\left(1-\sqrt{2}\right);g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ في المجال $\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ ولدينا كذلك الدالة $g$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]1;g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ و $0\notin\left]1;g\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$ إذن على المجال $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right[$، $g(x)\neq 0$

**خلاصة:** المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

التحقّق أنّ أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$

بما أنّ $g(0)=1+(0-1)e^{0}=0$ فإنّ $\beta=0$ ولدينا $g(-0.7)\simeq -0.02$ و $g(-0.8)\simeq 0.19$ أي $g(-0.7)\times g(-0.8)<0$ ومنه $-0,8<\alpha<-0,7$.

ب ـ استنتاج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم العدد الحقيقي $x$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**II** ـ الدّالة $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$.

1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}-(x+1)^2e^{-x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x-(x+1)^2e^{-x}=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x-(x+1)^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}x-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)=+\infty$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}2xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

ب ـ تبيين أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

$$f(x)-x=x-(x+1)^2e^{-x}-x=-(x+1)^2e^{-x}=-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(x^2e^{-x}+2xe^{-x}+e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\left(\dfrac{x^2}{e^x}+2\dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\right)=0$

ومنه المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x$ ، مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$ عند $+\infty$.

جـ ـ دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$.

ليكن $x$ عددا حقيقيا؛ $f(x)-x=-(x+1)^2e^{-x}$

لدينا $e^{-x}>0$ و $(x+1)^2\geq 0$ إذن $f(x)-x\leq 0$

ومنه المنحنى $(C_f)$ يوجد تحت المستقيم $(\Delta)$.


aziz_mus1@hotmail.fr

2. أ ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x)=g(x)$ .

$$f'(x)=1-\left[2(x+1)e^{-x}-e^{-x}(x+1)^2\right]=1-\left[e^{-x}\left(1-x^2\right)\right]=1+e^{-x}\left(x^2-1\right)=g(x)$$

ب ـ جدول تغيّرات الدّالة $f$ .

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(\alpha)$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. أ ـ تبيين أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي $1$، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $1+(x_0{}^2-1)e^{-x_0}=1$ ويكافئ $(x_0{}^2-1)e^{-x_0}=0$ لدينا $e^{-x_0}\neq 0$ ومنه $x_0{}^2-1=0$ أي $x_0=1$ أو $x_0=-1$ إذن $(C_f)$ يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 عند النقطتين $M(1;f(1))$ و $M'(-1;f(-1))$.

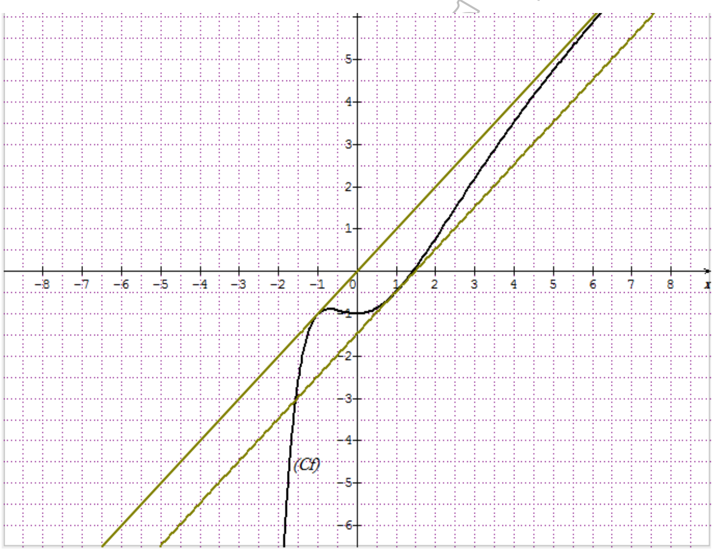
كتابة معادلة المماسين

المماس عند النقطة $M(1;f(1))$ معادلته $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=x-1+(1-4e^{-1})$ أي $y=x-4e^{-1}$

المماس عند النقطة $M'(-1;f(-1))$ معادلته $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ومنه $y=x+1-1$ أي $y=x$

ب ـ تمثيل $(\Delta)$ والمماسين والمنحنى $(C_f)$

جـ ـ المناقشة بيانيا، حسب قيّم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $(x+1)^2+me^x=0$.




$(x+1)^2+me^x=0$ تكافئ

$me^x=-(x+1)^2$

وتكافئ $m=-(x+1)^2e^{-x}$ و تكافئ

$x+m=x-(x+1)^2e^{-x}$ أي

$f(x)=x+m$

إذا كان $m\in\left]-\infty;-4e^{-1}\right[$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا

إذا كان $m=-4e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف

إذا كان $m\in\left]-4e^{-1};0\right[$ فإن المعادلة تقبل ثلاثة حلول

إذا كان $m=0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا

إذا كان $m\in\left]0;+\infty\right[$ فإن المعادلة لا تقبل حلا

**التمرين الرابع:**

I) الدّالة العددية $g$ معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

**1. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة $g$.**

الدّالة $g$ تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-2x-\dfrac{1}{x}$

من أجل كل $x$ من المجال $]0;+\infty[$، $g'(x)<0$ وبالتالي الدّالة $g$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

**2. حساب $g(1)$ واستنتاج تبعا لقيم $x$ إشارة $g(x)$.**

$g(1)=1-1^2-\ln 1=0$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

II) الدّالة العدديــة $f$ معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

**1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

**ب ـ حساب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$.**

لدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$.

**تفسير النتيجة هندسيا.**

$(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

**2. أ ـ تبيين أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$**

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}\right]=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

**استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة $f$.**

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

من أجل $x\in]0;1[$، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$.

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

إذن الدّالة $f$ متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

**ب ـ جدول تغيّرات الدّالة $f$.**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. أ ـ تبيين أنّ المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه المستقيم $(D)$ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(C_f)$

**ب ـ دراسة وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(D)$.**

لدينا $f(x)-(x-1)=\frac{-\ln x}{x}$ ومنه إشارة $f(x)-(x-1)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)-y$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضعية النسبية | $(C_f)$ فوق $(D)$ | $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في النقطة $A(1;0)$ | $(C_f)$ تحت $(D)$ |

**4. تبيين أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=x-1-\frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى $(C_f)$ في نقطة $A$ يطلب تعيين إحداثيتيها.**

$f'(x_0)=1$ تعني $\frac{-g(x)}{x^2}=1$ ويكافئ $x^2-1+\ln x=x^2$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$

ولدينا $f(e)=e-1-\frac{1}{e}$ و $y=e-1-\frac{1}{e}$ إذن المستقيم $(\Delta)$ يمسّ المنحنى $(C_f)$ في النقطة $A\left(e;e-1-\frac{1}{e}\right)$

**5. رسم $(\Delta)$، $(D)$ و $(C_f)$.**