الموضوع الخامس

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A\left(1;4;-5\right)$ ، $B\left(3;2;-4\right)$ ، $C\left(5;4;-3\right)$ و $D\left(-2;8;4\right)$ والشعاع $\vec{u}\left(1;5;-1\right)$.

1. بيّن أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$.
2. حدّد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(T\right)$ الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.
3. ليكن $\left(P\right)$ المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

أ - بيّن أنّ المستويين $\left(ABC\right)$ و $\left(P\right)$ يتقاطعان وفق مستقيم $\left(\Delta\right)$ تمثيله الوسيطي $\left(t\in\mathbb{R}\right)$ $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases}$

ب - بيّن أنّ المستقيمين $\left(T\right)$ و $\left(\Delta\right)$ ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E\left(3;0;-4\right)$ و $F\left(-3;3;5\right)$ ، تحقق أنّ: $E\in\left(\Delta\right)$ و $F\in\left(T\right)$.
5. لتكن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - جد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ$\left(\Gamma\right)$ واستنتج أنّ $\left(\Gamma\right)$ مستو، $\overrightarrow{EF}$ شعاع ناظمي له.

ب - عيّن قيمة α حتى يكون $\left(\Gamma\right)$ المستوي المحوري للقطعة $\left[EF\right]$.

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $\left(1\right)$...........$z^3+z^2+3z-5=0$
2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=1$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=-1-2i$

- اكتب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC.

3. لتكن $\left(E\right)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1+2e^{i\theta}$ مع $\theta\in\left]-\pi;\pi\right[$

ولتكن $\left(F\right)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$.

أ - تحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من $\left(E\right)$ و $\left(F\right)$.

ب - اكتب معادلة ديكارتية لكل من $\left(E\right)$ و $\left(F\right)$؛ وعيّن نقطتي تقاطعهما.

4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B

أ - اكتب العبارة المركبة للتشابه S وعين نسبته وزاويته.

ب - عيّن $\left(E'\right)$ و $\left(F'\right)$ صورتا $\left(E\right)$ و $\left(F\right)$ بالتشابه S.

جـ - استنتج تقاطع $\left(E'\right)$ و $\left(F'\right)$

aziz_mus1@hotmail.fr

سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

التمرين الثالث:

I- نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. ادرس تغيّرات الدّالة g.
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,38<\alpha<-0,37$.
3. استنتج إشارة $g(x)$ ؛ حسب قيم x.

II- نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$.
2. ادرس تغيّرات الدّالة f.

. بيّن أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d).
5. بيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف.
6. بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.
7. ارسم (d) و (C_f) ؛ نأخذ $\alpha\approx-0,375$.

III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y=2x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.

1. عيّن β حتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
2. ناقش بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي β، عدد حلول المعادلة : $-\dfrac{x}{e^x}+1-\beta=0$

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.
2. برهن أنّ الدّالة f زوجية.
3. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.
6. ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).
7. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

حل الموضوع الخامس

التمرين الأوّل:

1. إثبات أنّ $x-2z-11=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

لدينا $x_A-2z_A-11=1-2(-5)-11=0$ و $x_B-2z_B-11=3-2(-4)-11=0$

و $x_C-2z_C-11=5-2(-3)-11=0$ ومنه إحداثيات النقط A ، B و C تحقق المعادلة $x-2z-11=0$

وبالتالي $x-2z-11=0$ هي معادلة المستوي (ABC).

2. تحديد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D ويوازي $\vec{u}$.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

M تنتمي لـ (T) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{DM}=k\vec{u}$.

ومنه $\begin{cases} x+2=k \\ y-8=5k \\ z-4=-k \end{cases} (k\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases} x=-2+k \\ y=8+5k \\ z=4-k \end{cases} (k\in\mathbb{R})$.

3. ليكن (P) المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$.

أ ـ إثبات أنّ المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=11+2t \\ y=4+t \\ z=t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$

بالتعويض في معادلة كل من (ABC) و (P) نجد:

$(11+2t)-2(t)-11=0$ و $(11+2t)-(4+t)-t-7=11-11+2t-2t=0$

ومنه (Δ) محتوى في (ABC) ومحتوى في (P) وعليه (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب ـ إثبات أنّ المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;5;-1)$ هو شعاع توجيه لـ (T) و $\vec{v}(2;1;1)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ).

و $\frac{1}{5}\neq\frac{2}{1}$ إذن (T) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطع (T) و (Δ).

نحل الجملة $\begin{cases} 11+2t=-2+k\,......(1) \\ 4+t=8+5k\,..........(2) \\ t=4-k\,.................(3) \end{cases} (*)$

ندرس إمكانية وجود ثنائية t و k من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة $(*)$.

بتعويض t بقيمتها من (3) في (2) نجد $4+(4-k)=8+5k$ ومنه $k=0$

بالتعويض في (3) نجد $t=4$ وبتعويض t و k بقيمهما في (1) نجد $19=-2$ تناقض.

إذن (T) و (Δ) غير متقاطعين وبما أنهما غير متوازيين فإنهما ليسا من نفس المستوي.

4. تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ ، التحقق أنّ: $E\in(\Delta)$ و $F\in(T)$.

$E\in(\Delta)$ معناه $\begin{cases} 3=11+2t \\ 0=4+t \\ -4=t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=-4 \\ t=-4 \\ t=-4 \end{cases}$ بما أن t وحيدة فإنّ $E\in(\Delta)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

معناه $F\in(T)$ $\begin{cases}-3=-2+k\\3=8+5k\\5=4-k\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k=-1\\k=-1\\k=-1\end{cases}$ بما أنّ k وحيدة فإنّ $F\in(T)$.

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ مع α عدد حقيقي.

أ - إيجاد بدلالة α معادلة ديكارتية لـ(Γ).

$\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$.

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ معناه $6(3-x)+3y-9(-4-z)=\alpha$ ومنه $-6x+3y+9z+54-\alpha=0$

هي معادلة ديكارتية لـ (Γ) وهي معادلة مستو شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$.

ب - تعيين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[EF]$.

لتكن I منتصف $[EF]$ ومنه $I\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ شعاعه الناظمي $\overrightarrow{EF}$ ويشمل النقطة I.

ومنه $-6(0)+3\left(\frac{3}{2}\right)+9\left(\frac{1}{2}\right)+54-\alpha=0$ أي $\alpha=63$.

طريقة أخرى:

المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$.

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ معناه $(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EI}).\overrightarrow{FE}=0$ ومعناه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}=0$

أي $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{FE}$ ومنه $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FE}$.

$\overrightarrow{IE}\left(3;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$ ومنه $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{EF}=3(6)-\frac{3}{2}(-3)-\frac{9}{2}(-9)=18+45=63$

ومنه $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}=0$ تعني $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$.

إذن المستوي المحوري للقطعة $[EF]$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=63$ وعليه $\alpha=63$

التمرين الثاني:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^3+z^2+3z-5=0..........(1)$

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 ومنه العدد 1 هو حل ظاهري للمعادلة (1).

ومنه $z^3+z^2+3z-5=(z-1)(z^2+az+b)$ حيث a و b عددان حقيقيان

$z^3+z^2+3z-5=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$ بالمطابقة نجد $a=2$ و $b=5$

ومنه $z^3+z^2+3z-5=(z-1)(z^2+2z+5)$

(1) تكافئ $z=1$ أو $z^2+2z+5=0$

$\Delta=4-20=-16=(4i)^2$ للمعادلة حلان هما $z=-1-2i$ أو $z=-1+2i$.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\{1;-1-2i;-1+2i\}$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=1$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=-1-2i$

كتابة العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث ABC.

لدينا $z_C-z_A=-1-2i-1=-2-2i$ و $z_B-z_A=-1+2i-1=-2+2i$

ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-2-2i}{-2+2i}=\frac{1+i}{1-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ

$AC=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A.

3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1+2e^{i\theta}$ مع $\theta\in]-\pi;\pi[$

ولتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$.

أ ـ التحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من (E) و (F).

A تنتمي إلى (E) إذا وُجد عدد حقيقي θ بحيث $z_A=-1+2e^{i\theta}$

لدينا $z_A=-1+2=-1+2e^{i0}$ إذن من أجل $\theta=0$ نجد النقطة A من (E).

A تنتمي إلى (F) إذا وُجد عدد حقيقي λ بحيث $z_A=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $z_A=-1-2i+2+2i=-1+2i+2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن من أجل $\lambda=2\sqrt{2}$ نجد النقطة A من (F).

ب ـ كتابة معادلة ديكارتية لـ (E)

$z=-1+2e^{i\theta}$ معناه $z+1=2e^{i\theta}$ بوضع $z_I=-1$ ومنه $z-z_I=2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z-z_I|=2$ أي $IM=2$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $I(-1;0)$ ونصف قطرها 2 والمعادلة الديكارتية لـ(E) هي $(x+1)^2+y^2=4$

كتابة معادلة ديكارتية لـ (F)

$z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ معناه $z-z_C=\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن (F) هي المستقيم الذي يشمل C وميله $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

إذن معادلة (F) من الشكل $y=x+b$ وبما أنّ $C\in(F)$ فإنّ $-2=-1+b$ ومنه $b=-1$

وعليه معادلة (F) هي $y=x-1$.

تعيين نقطتي تقاطعهما.

نحل الجملة $\begin{cases}y=x-1\\(x+1)^2+y^2=4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-1\\(x+1)^2+(x-1)^2=4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-1\\x^2=1\end{cases}$

إذن $(x;y)\in\{(1;0);(-1;-2)\}$ ومنه (E) و (F) يتقاطعان في النقطتين A و C.

4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B

أ ـ كتابة العبارة المركبة للتشابه S وتعيين نسبته وزاويته.

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z'-z_C=a(z-z_C)$ وبما أنّ $S(A)=B$ فإنّ $z_B-z_C=a(z_A-z_C)$

ومنه $a=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{4i}{2+2i}=1+i$ وعليه الكتابة المركبة للتشابه S هي $z'-z_C=(1+i)(z-z_C)$

أي $z'=(1+i)z-2+i$.

$|a|=|1+i|=\sqrt{2}$ ومنه نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$\arg(a)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ومنه زاوية التشابه S هي $\frac{\pi}{4}$.

ب ـ تعيين (E') و (F') صورتا (E) و (F) بالتشابه S.

نضع $I'=S(I)$ ومنه $z_{I'}=-3$ وبما أنّ نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$ فإنّ (E') هي الدائرة التي مركزها I' ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

بما أنّ $S(A)=B$ و $S(C)=C$ فإنّ (F') هي المستقيم (BC) لأنّ (F) هي المستقيم (AC).

جـ ـ استنتاج تقاطع (E') و (F')

بما أنّ (E) و (F) يتقاطعان في النقطتين A و C فإنّ (E') و (F') يتقاطعان في النقطتين $S(A)$ و $S(C)$ أي في النقطتين B و C.

التمرين الثالث:

I- نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1. دراسة تغيّرات الدّالة g.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x}+2=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}+2=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}-e^{-x}+2=2$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x)=e^{-x}-e^{-x}(x-1)=e^{-x}(2-x)$

من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{-x}>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ مثل إشارة $(2-x)$ وعليه $g'(2)=0$

من أجل كل $x\in]-\infty;2[$ فإنّ $2-x>0$ أي $g'(x)>0$ إذن الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$.

ومن أجل كل $x\in]2;+\infty[$ فإنّ $2-x<0$ أي $g'(x)<0$ إذن الدّالة g متناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

جدول تغيرات الدّالة g:

x	$-\infty$	α		2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗	$2+e^{-2}$	↘	2

2. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,38<\alpha<-0,37$.

لدينا الدّالة g مستمرة على المجال $]-\infty;2]$ وبالتالي على المجال $[-0,38;-0,37]$ و $g(-0,38)\approx-0,01$، $g(-0,37)\approx0,01$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]-0,38;-0,37[$ بحيث $g(\alpha)=0$ وبما أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ فإنّ α وحيد.

3. إشارة $g(x)$؛ حسب قيم x.

من أجل كل $x\in]-\infty;\alpha[$، $g(x)<0$

و من أجل كل $x\in]\alpha;+\infty[$، $g(x)>0$ كما أنّ $g(\alpha)=0$

II- نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x+1-xe^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

aziz_mus1@hotmail.fr

1. تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x) = g(x)$.

ليكن x عددا حقيقيا؛

$$f'(x) = 2 - \left[e^{-x} - xe^{x}\right] = 2 + e^{-x}(x-1) = g(x)$$

2. دراسة تغيّرات الدّالة f.

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ وعليه $f'(\alpha) = g(\alpha) = 0$

من أجل $x \in]-\infty;\alpha[$ فإنّ $f'(x) < 0$ وبالتالي الدّالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

و من أجل $x \in]\alpha;+\infty[$ فإنّ $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. تبيين أنّ المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x+1) = \lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^{x}} = 0$$

إذن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d).

لدينا $f(x) - (2x+1) = -xe^{-x}$ ومنه إشارة $f(x) - (2x+1)$ هي نفس إشارة $-x$.

في المجال $]-\infty;0[$، $-x > 0$ أي $f(x) - (2x+1) > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (d).

و في المجال $]0;+\infty[$، $-x < 0$ أي $f(x) - (2x+1) < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (d).

و (C_f) يقطع (d) في النقطة $A(0;1)$.

5. تبيين أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف.

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $g'(x)$.

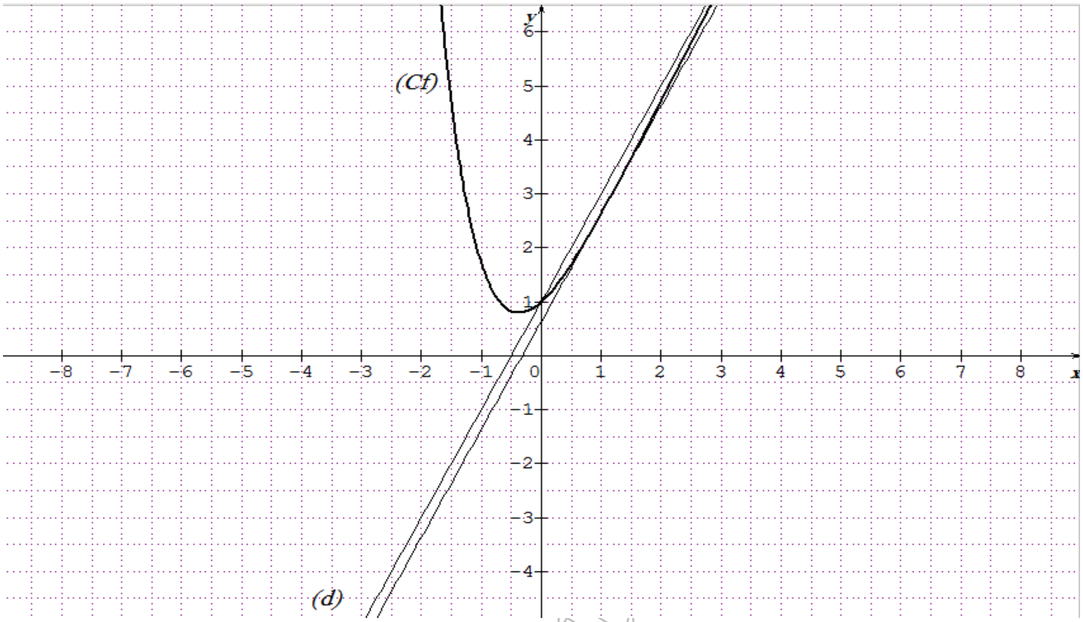
$f''(x)$ تنعدم من أجل 2 وتغير من إشارتها بجوار 2 وهذا يعني أنّ النقطة $B(2;f(2))$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

6. تبيين أنّ $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$.

لدينا $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha e^{-\alpha}$ ولدينا $g(\alpha) = 0$ معناه $(\alpha - 1)e^{-\alpha} + 2 = 0$ أي $e^{-\alpha} = -\dfrac{2}{\alpha - 1}$

إذن $$f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{(2\alpha+1)(\alpha-1) + 2\alpha}{\alpha - 1} = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

7. رسم (d) و (C_f)؛ نأخذ $\alpha \approx -0,375$.



III- (Δ_β) مستقيم معادلته $y=2x+\beta$ حيث β عدد حقيقي.

1.تعيين β حتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

$f'(x)=2$ معناه $(x-1)e^{-x}+2=2$ يكافئ $(x-1)e^{-x}=0$ أي $x=1$

لدينا $f(1)=3-e^{-1}$ ؛

(Δ_β) مماس للمنحنى (C_f) إذا كان يشمل النقطة $A(1;3-e^{-1})$ ومنه $3-e^{-1}=2(1)+\beta$ أي $\beta=1-e^{-1}$

إذن من أجل $\beta=1-e^{-1}$ يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;3-e^{-1})$.

2. المناقشة بيانيا، حسب قيم العدد الحقيقي β ، عدد حلول المعادلة : $-\frac{x}{e^x}+1-\beta=0$

$-\frac{x}{e^x}+1-\beta=0$ تكافئ $\beta=-\frac{x}{e^x}+1$ تكافئ $2x+\beta=-\frac{x}{e^x}+1+2x$ ومنه $2x+\beta=-xe^{-x}+1+2x$

أي $f(x)=2x+\beta$.

إذا كان $\beta\in\left]-\infty;1-e^{-1}\right[$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول.

إذا كان $\beta=1-e^{-1}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا و هو 1.

إذا كان $\beta\in\left]1-e^{-1};1\right[$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $\beta\in\left[1;+\infty\right[$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا.

التمرين الرابع:

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **تبيين أنّه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل:** $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.

لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)=f(x)=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}\left(e^{x}+1\right)$

$$=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}+\ln\left(e^{x}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}x-x+\ln\left(e^{x}+1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}x+\ln\left(e^{x}+1\right)$$

2. **إثبات أنّ الدّالة f زوجية.**

من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ لأن لكل عدد حقيقي معاكس و لدينا $f(-x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=f(x)$ ومنه الدالة f زوجية.

3. **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=+\infty$$

4. **دراسة اتجاه تغيّر الدالة f .**

$$f'(x)=\frac{-1}{2}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{-1-e^{x}+2e^{x}}{2\left(e^{x}+1\right)}=\frac{e^{x}-1}{2\left(e^{x}+1\right)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $2\left(e^{x}+1\right)>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $e^{x}-1$.

$f'(x)=0$ تعني $e^{x}-1=0$ ويكافئ $e^{x}=1$ أي $x=0$

$f'(x)>0$ تعني $e^{x}-1>0$ ويكافئ $e^{x}>1$ أي $x>0$

$f'(x)<0$ تعني $e^{x}-1<0$ ويكافئ $e^{x}<1$ أي $x<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

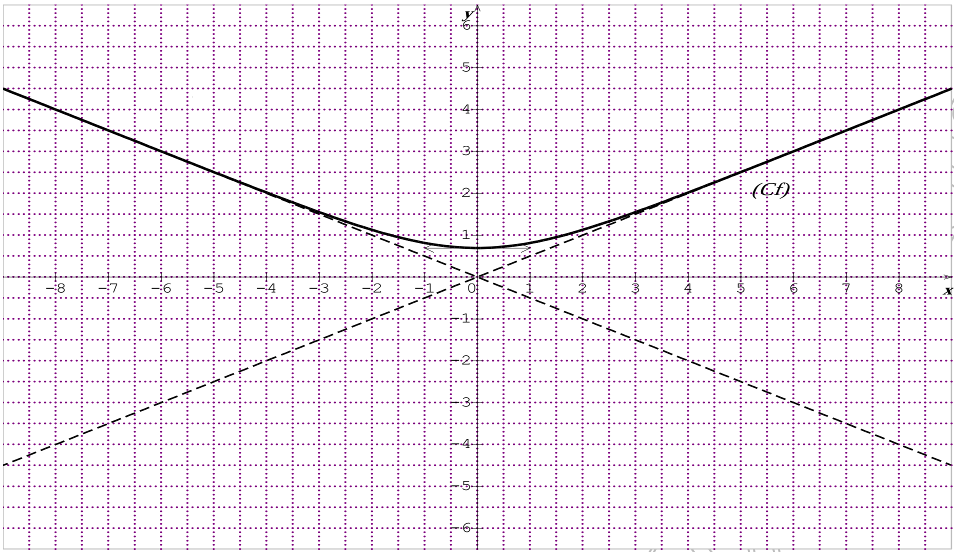
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

5. **إثبات أنّ المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.**

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{1}{2}x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right)=0$ إذن للمنحني $\left(C_f\right)$ مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=\frac{1}{2}x$ بجوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(1+e^{x}\right)=0$ إذن للمنحني $\left(C_f\right)$ مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$.

6. رسم (Δ)، (Δ') و $\left(C_f\right)$.



7. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ ـ التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

لدينا $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln x=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(e^{\ln x}+1\right)=f(\ln x)$

ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة g.

نلاحظ أنّ الدالة g هي مركب الدّالة $\ln$ متبوعة بالدّالة f $(g=f\circ\ln)$

لدينا الدالة اللوغارتمية النيبيرية $\ln$ متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;+\infty[$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذن للدالتين نفس الإتجاه وبالتالي تركيبهما يكون دالة متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيّرات الدالة g.

x	1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$\ln 2$ $\nearrow$ $+\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr