الموضوع السادس

التمرين الأوّل:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط: $A(2;1;-1)$ ، $B(1;-1;3)$ ، $C\left(-\frac{3}{2};-2;1\right)$ و $D\left(\frac{7}{2};-3;0\right)$ ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$.

1) **أ)** أحسب إحداثيات النقطة I.

ب) ليكن المستوي (P) ذو المعادلة: $2x+4y-8z+5=0$ بيّن أنّ (P) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

3) **أ)** جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

ب) بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوي، ثمّ استنتج أنّ المثلث IEC قائم.

4) **أ)** بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة ℂ المعادلة: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي

لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ) عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

د) بيّن أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D، يطلب تعيين نصف قطرها.

هـ) احسب $\frac{z_A}{z_B}$، ثمّ جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A.

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R محددا زاويته.

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثمّ تحقق أنّ النقط C ، A و C' على استقامية.

جـ) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثمّ حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R.

التمرين الثالث:

I) g الدالة المعرفة على ℝ كما يلي: $g(x)=1+(x-1)e^x$.

1. احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. استنتج اشارة $g(x)$ على ℝ.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=x+(x-2)e^x$.

نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

1. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإنّ: $f'(x)=g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

2. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f). ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

3. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.

4. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

6. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1{,}6<\alpha<1{,}7$.

7. احسب $f(0)$ ، $f(1)$ ثم ارسم (Δ)، (T) والمنحني (C_f).

8. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$.

التمرين الرابع:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. ادرس تغيّرات الدّالة g ثم شكل جدول تغيّراتها.

2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3. تحقق أنّ $g(1)=1$ وبيّن أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا آخرا α حيث $0{,}1<\alpha<0{,}3$.

II - لتكن الدّالة f المعرّفة على كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا.

ب - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. أ - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f، ثم شكل جدول تغيّراتها.

جـ - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.

د - عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

3. أ - أثبت أنّ $f(x)=x\left[g(x)-x+1\right]$ ، ثم احسب $f(\alpha)$.

ب - أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

4. أثبت أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1،يطلب كتابة معادلة كل منهما.

5. ارسم (T) ، (T') والمنحني (C_f).

حل الموضوع السادس

التمرين الأوّل:

1) أ) إحداثيات النقطة I.

$x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{3}{2}$ ، $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=0$ ، $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=1$ إذن $I\left(\dfrac{3}{2};0;1\right)$.

ب) تبيين أنّ (P) هو المستوي المحوري لـ $[AB]$.

لدينا $\vec{n}(2;4;-8)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) ولدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ ومنه $\vec{n}=-2\overrightarrow{AB}$ بالتالي الشعاعان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا وعليه $\overrightarrow{AB}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P).

ولدينا $2x_I+4y_I-8z_I+5=2\left(\dfrac{3}{2}\right)+4(0)-8(1)+5=0$ إذن I تنتمي للمستوي (P).

ومنه (P) هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}(1;2;-4)$ شعاع توجيه له.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء.

$M\in(\Delta)$ معناه يوجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ مع $\overrightarrow{CM}\left(x+\dfrac{3}{2};y+2;z-1\right)$.

$\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$ معناه $\begin{cases}x+\dfrac{3}{2}=t\\ y+2=2t\\ z-1=-4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ أي $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+t\\ y=-2+2t\\ z=1-4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

3) أ) إيجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ).

نحل الجملة $\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}+t\\ y=-2+2t\\ z=1-4t\\ 2x+4y-8z+5=0\end{cases}$ وعليه $2\left(-\dfrac{3}{2}+t\right)+4(-2+2t)-8(1-4t)+5=0$

أي $-3+2t-8+8t-8+32t+5=0$ ومنه $-14+42t=0$ وعليه $t=\dfrac{1}{3}$.

إذن $x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{7}{6}$ ، $y=-2+\dfrac{2}{3}=-\dfrac{4}{3}$ ، $z=1-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{1}{3}$ أي $E\left(-\dfrac{7}{6};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

ب) تبيين أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوي.

لدينا $\vec{u}(1;2;-4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB).

و $\overrightarrow{AB}=-\vec{u}$ ومنه الشعاعان $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطيا إذن المستقيمان (Δ) و (AB) متوازيان وبالتالي فهما من نفس المستوي.

استنتاج أنّ المثلث IEC قائم.

(AB) و (Δ) متوازيان ومنه (Δ) عمودي على (P) في E وبما أنّ $C\in(\Delta)$ فإنّ (CE) عمودي على (P) في E وبما أنّ I تنتمي للمستوي (P) فهذا يعني أنّ المثلث IEC قائم في E.

4) أ) تبيين أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).

لدينا $\overrightarrow{ID}(2;-3;-1)$ و $\overrightarrow{IE}\left(-\frac{8}{3};\frac{-4}{3};\frac{-4}{3}\right)$ و $\overrightarrow{AB}(-1;-2;4)$.

ومنه $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=2(-1)-3(-2)-1(4)=0$ و $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IE}=2\left(-\frac{8}{3}\right)-3\left(-\frac{4}{3}\right)-1\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{16}{3}+\frac{12}{3}+\frac{4}{3}=0$.

اذن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE).

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$.

لدينا (ID) عمودي على (AB) إذن فهو عمودي على (CE) لأنّ (CE) هو المستقيم (Δ) و (Δ) يوازي (AB)

ومنه (ID) عمودي على كل من (CE) و (IE) وبالتالي (ID) يعامد المستوي (ICE)

فتكون النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ICE).

وعليه حجم رباعي الوجوه $DIEC$ يعطى كما يلي $V=\frac{1}{3}S_{ICE}\times ID$ حيث S_{ICE} هي مساحة المثلث ICE.

$$S_{ICE}=\frac{IE.CE}{2}=\frac{\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{3}}{2}=\frac{2\sqrt{14}}{3}$$ و $$ID=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{14}.$$

وعليه $V=\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{14}}{3}\times\sqrt{14}=\frac{28}{9}uv$.

التمرين الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$.

$\Delta=\left(6\sqrt{2}\right)^2-144=-72=\left(6i\sqrt{2}\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ،

$z_2=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A ، B ، C و D التي

لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ) كتابة z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

$$z_A=3\sqrt{2}(1+i)=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ، } z_B=\overline{z_A}=6e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ، } (1+i)z_A=6\sqrt{2}i=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب) حساب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014}=e^{i1007\pi}=e^{i\pi}=-1.$$

جـ) تعيين قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا سالبا.

لدينا $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{2}}$.

$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^n = (1+2k)\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{2} = (1+2k)\pi$

بالتالي $n = 2+4k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

د) تبيين أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

$DO = |z_O - z_D| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$.

$DA = |z_A - z_D| = |3i\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

$DB = |z_B - z_D| = |-3i\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

$DC = |z_C - z_D| = |3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$

ومنه $DO = DA = DB = DC = 3\sqrt{2}$ بالتالي النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $3\sqrt{2}$.

هـ) حساب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثمّ إيجاد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$.

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{3\sqrt{2}(1+i)}{3\sqrt{2}(1-i)} = \frac{(1+i)}{(1-i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$.

تعيين طبيعة الرباعي $OACB$.

$\frac{z_C - z_B}{z_A} = \frac{6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}} = 1$ ومنه $z_C - z_B = z_A$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

زيادة على ذلك لدينا $\frac{z_A}{z_B} = i$ وهذا يعني أنّ $OA = OB$ و $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2}$ إذن $OACB$ مربع.

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A .

أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R وتحديد زاويته.

العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z' - z_O = \alpha(z - z_O)$ أي $z' = \alpha z$.

وبما أنّ $R(B) = A$ فإنّ $z_A = \alpha z_B$ ومنه $\alpha = \frac{z_A}{z_B} = i$

إذن العبارة المركبة للدوران R هي $z' = iz$.

زاوية الدوران R هي $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{2}$.

ب) تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R .

$R(C) = C'$ معناه $z_{C'} = iz_C$ ومنه $z_{C'} = 6i\sqrt{2}$.

التحقق أنّ النقط C ، A و C' على استقامية.

تكون النقط C ، A و C' على استقامية إذا كان $\frac{z_C - z_{C'}}{z_A - z_C}$ عدد حقيقي.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

لدينا $\frac{z_C - z_{C'}}{z_A - z_C} = \frac{6i\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}(-1+i)}{3\sqrt{2}(-1+i)} = 2 \in \mathbb{R}$ ومنه النقط C ، A و C' على استقامية.

جـ) تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R .

$R(A) = A'$ معناه $z_{A'} = iz_A$ ومنه $z_{A'} = i\left(3\sqrt{2}(1+i)\right)$ أي $z_{A'} = -3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$.

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

بما أنّ $R(O) = O$ و $R(A) = A'$ و $R(C) = C'$ و $R(B) = A$ فإنّ صورة الرباعي $OACB$ هو الرباعي $OA'C'A$.

التمرين الثالث:

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1+(x-1)e^x$.

1. **حساب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.**

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1+(x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 1+xe^x - e^x = 1$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1+(x-1)e^x = +\infty$.

2. **دراسة اتجاه تغيّر الدالة g .**

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x وعليه $g'(0) = 0$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ فإنّ $g'(x) < 0$

ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ $g'(x) > 0$

إذن الدّالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدّالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

3. **استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.**

من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنّ $g(x) \geq 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x) = x+(x-2)e^x$.

نرمز بـ(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإنّ: $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 1+e^x+(x-2)e^x = 1+(x-1)e^x = g(x)$$

ب) استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ ومنه أجل كل $x \in]-\infty;2]$ ، $f'(x) \geq 0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;2]$.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	2

2. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

$$\lim_{x\to-\infty} = f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} f(x) = (x-2)e^x = \lim_{x\to-\infty} xe^x - e^x = 0$$

إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$.

3. إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.

طريقة 1: لدينا $f''(x)=g'(x)$ ومنه $f''(x)$ تنعدم عند 2 وتغير من إشارتها ما يعني أنّ النقطة $\omega(0;-2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

طريقة 2: لدينا الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و $f'(0)=0$ إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا عند النقطة $\omega(0;-2)$ معادلته $y=-2$.

نلخص إشارة $f(x)+2$ من خلال جدول تغيرات الدّالة f.

من أجل $x\in]-\infty;0[$ ، $f(x)<-2$ أي $f(x)+2<0$

ومن أجل $x\in]0;2[$ ، $f(x)>2$ أي $f(x)+2>0$

في المجال $]-\infty;0[$ المنحنى (C_f) يقع تحت مماسه ؛ و في المجال $]0;2[$ المنحنى (C_f) يقع فوق مماسه.

المماس يخترق المنحنى في نقطة التماس $\omega(0;-2)$ و هذا يعني أن النقطة $\omega(0;-2)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

ملاحظة: يمكن إثبات ذلك مباشرة بما أنّ $f'(x)$ تنعدم عند 0 ولا تغيّر من إشارتها بجوار العدد 0 فإن النقطة $\omega(0;-2)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

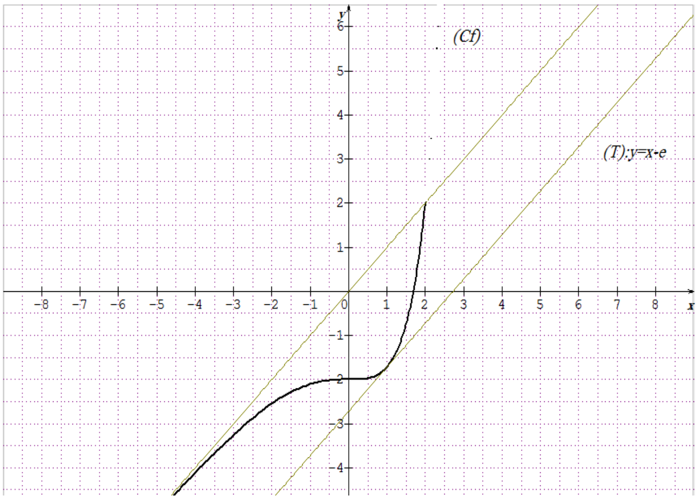
4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=(x-1)+1-e$ أي $(T): y=x-e$.

6. تبيين أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1{,}6<\alpha<1{,}7$.

لدينا الدّالة f مستمرة على ℝ وخاصة على المجال $[1{,}6;1{,}7]$ و $f(1{,}6)\approx-0{,}38$ ، $f(1{,}7)\approx0{,}05$ أي $g(1{,}6)\times g(1{,}7)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]1{,}6;1{,}7[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على ℝ فإنّ α وحيد ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $1{,}6<\alpha<1{,}7$.

7. حساب $f(0)$ ، $f(1)$ **ورسم** (Δ)، (T) **والمنحني** (C_f).



$f(0)=0+(0-2)e^0=-2$ ،

$f(2)=2+(2-2)e^2=2$.

8. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m **عدد حلول المعادلة:** $f(x)=x+m$.

إذا كان $m<-e$ أو $m>0$ فإنّ المعادلة لا تقبل أي حل

إذا كان $m=-e$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا

إذا كان $m=0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا وحيدا

إذا كان $-e<m<0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

التمرين الرابع:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. دراسة تغيّرات الدّالة g

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x-1-\ln x=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}=0$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $2x-1$ لأنّ $x>0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدّالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيّرات الدالة g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ **على المجال** $]0;+\infty[$.

لدينا الدّالة g تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ $g(x)\geq \ln 2$

وبالتالي $g(x)>0$.

3. التحقق أنّ $g(1)=1$

$g(1)=2(1)-1-\ln 1=1$

تبيين أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا آخرا α حيث $0{,}1<\alpha<0{,}3$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ وبالخصوص على المجال $[0{,}1;0{,}3]$ ولدينا $g(0{,}1)\approx 1{,}5$، $g(0{,}3)\approx 0{,}8$ أي $g(0{,}3)<1<g(0{,}1)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0{,}1;0{,}3[$ بحيث $g(\alpha)=1$.

II - لتكن الدّالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{x^2-x\ln x}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}x-\ln x=+\infty$$

التفسير: الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يمين 0 ومنحناها البياني (C_f) له نصف مماس مواز لمحور التراتيب

ب - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

2. أ - تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.

$$f'(x)=2x-\left[\ln x+\frac{1}{x}.x\right]=2x-1-\ln x=g(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

جـ - بيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.

لدينا $f''(x)=g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم من أجل $\frac{1}{2}$ وتغير من إشارتها ومنه النقطة $\omega\left(\frac{1}{2};f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

د ـ تعيين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ **وفسّر النتيجة بيانيا.**

الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص عند α ولدينا:

$\lim_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=g(\alpha)=1$ ؛ وتفسير ذلك وجود مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α ميله يساوي 1.

3. أ ـ إثبات أنّ $f(x)=x\left[g(x)-x+1\right]$ ،

$$f(x)=x^2-x\ln x=x(x-\ln x)=x(2x-1-\ln x-x+1)=x\left[g(x)-x+1\right]$$

حساب $f(\alpha)$.

$$f(\alpha)=\alpha\left[g(\alpha)-\alpha+1\right]=\alpha(1-\alpha+1)=\alpha(2-\alpha).$$

ب ـ تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$.

$0,1<\alpha<0,3$ معناه $-0,3<-\alpha<-0,1$ يكافئ $1,7<2-\alpha<1,9$

ومنه $1,7\times0,1<\alpha(2-\alpha)<1,9\times0,3$ أي $0,17<f(\alpha)<0,57$.

4. إثبات أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $g(x_0)=1$ ومنه $x_0=1$ أو $x_0=\alpha$

إذن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1 عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و α.

كتابة معادلة كل منهما.

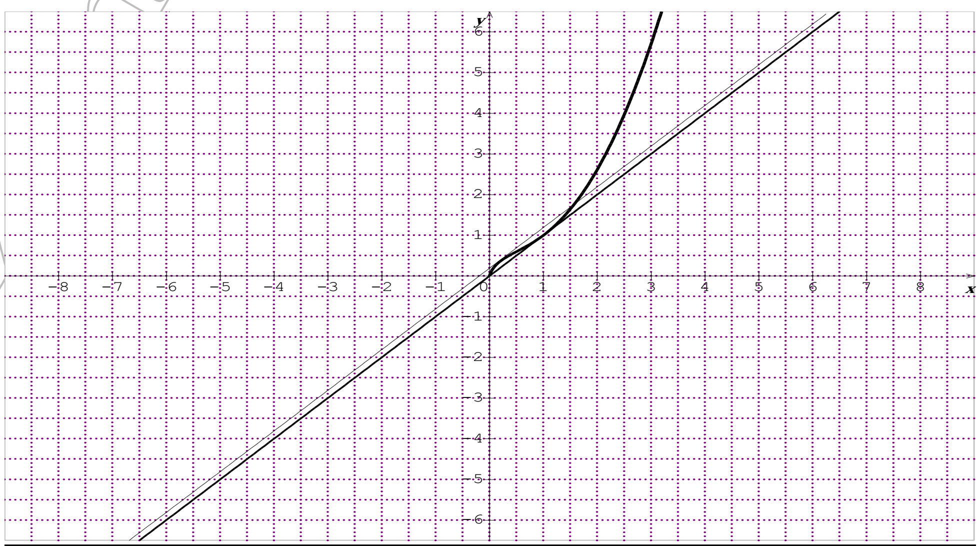
معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=(x-1)+1$ أي $(T):y=x$

معادلة المماس (T') عند النقطة ذات الفاصلة α.

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ومنه $y=(x-\alpha)+\alpha(2-\alpha)$ أي $(T'):y=x-\alpha^2+\alpha$.

5. رسم (T) ، (T') والمنحني (C_f).



aziz_mus1@hotmail.fr